第 47 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 4 月
Vol. 47 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.007

一类半线性分数阶反应扩散方程解的整体存在性[①]

彭红玲, 樊明书

西南交通大学 数学学院,成都 610031

摘要: 研究了齐次 Dirichlet 边界下一类半线性分数阶反应扩散方程解的整体存在性和渐近行为. 通过 Caffarelli-Silvestre 延拓方法将非局部的分数阶 Laplacian 算子转化为局部可变分的算子,再用 Galërkin 方法在适当的假设条件下得到方程整体解的存在性,最后利用一些基本不等式得到方程解的渐近行为.

关 键 词: 分数阶反应扩散方程;整体存在性;渐近行为

中图分类号:O175.29 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2022)04-0045-07

Global Existence of Solutions to Semilinear Fractional Reaction-Diffusion Equation

PENG Hongling, FAN Mingshu

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

Abstract: In this paper, the global solution and long time asymptotic behavior of the semilinear fractional reaction-diffusion equation have been studied with homogeneous Dirichlet boundary. The Caffarelli-Silvestre extension method was used to transform the nonlocal Laplacian problem into a variable local problem. Combing Galërkin method, we can get the existence of solution. Lastly we utilize some inequalities to get long time asymptotic behavior of global solutions.

Key words: fractional reaction-diffusion equation; global existence; asymptotic behavior

随着科学的发展,经典 Laplacian 方程 $\Delta u=0$ 不适合生活中很多复杂的物理问题,特别是大范围不规则的扩散现象,由此人们提出了分数阶 Laplacian 算子. 从概率论的角度看,分数阶 Laplacian 算子是稳定 Lévy 过程中的无穷小生成元,是 Lévy 飞行过程中的尺度极限[1-2],它在金融数学、概率论、生物学等领域中有着广泛的应用[3-5].

常见分数阶 Laplacian 算子的定义有 3 种,根据 Riesz 位势给出的定义[6]、根据傅里叶变换给出的定

① 收稿日期:2021-05-08
基金项目:自然科学基金面上项目(11971331);四川省科技创新团队项目(21CXTD0076).
作者简介:彭红玲,硕士研究生,主要从事偏微分方程的研究.

义[7]以及利用函数延拓给出的等价定义[8]. 本文用文献[8]中的定义.

文献[9]研究了半线性抛物方程 $u_t=\Delta u+V(x)u^p$ 在 Dirchlet 条件下的爆破，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界凸区域，$M\geqslant 0$，V 是 Lipschitz 连续的，$\varphi>0$ 且 φ 满足相容性条件.

文献[10]研究了分数阶多孔介质方程(FPME) $\dfrac{\partial u}{\partial t}+(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}(|u|^{m-1}u)=0$ 在 $\mathbb{R}^N$ 空间中 Cauchy 问题解的存在性和唯一性，其中 $0<\sigma<2$，$m>0$. 近期还有很多关于分数阶反应扩散方程的研究[11-12]. 本文主要研究的是如下一类半线性分数阶反应扩散方程：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=-\dfrac{u_t}{|x|^{2s}}+a(x)u^p & x\in\Omega,\ t>0\\ u=0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega,\ t\geqslant 0\\ u(x,0)=u_0 & x\in\Omega\end{cases}\tag{1}$$

的非负解的性质. 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界光滑域，$a(x)\in C(\overline{\Omega})$，$1<p<2_s^*$，$2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}(N>2s)$ 是分数阶 Sobolev 迹嵌入定理的临界指数，$(-\Delta)^s(0<s<1)$ 是分数阶 Laplacian 算子. 方程(1)描述的是一类反常扩散现象，u 表示的是扩散物质的浓度[13]，故本文默认 $u\geqslant 0$.

将方程(1)按文献[8]中的方法进行延拓. 令 $U:\Omega\times(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是函数 $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 的延拓函数，记

$$D=\{(x,y)\mid (x,y)\in\Omega\times(0,\infty)\}$$

D 的横向边界为 $\partial_L D=\partial\Omega\times[0,\infty)$，将方程(1)化为

$$\begin{cases}\operatorname{div}(y^{1-2s}\nabla U(x,y,t))=0 & (x,y)\in D,\ t>0\\ U(x,y,t)=0 & (x,y)\in\partial_L D,\ t>0\\ -\lim\limits_{y\to 0}k_s y^{1-2s}U_y(x,y)=-\dfrac{U_t}{|x|^{2s}}+a(x)U^p & (x,y)\in\Omega\times\{0\},\ t>0\\ U(x,y,0)=U_0 & (x,y)\in D\end{cases}\tag{2}$$

记 $(-\Delta)^s=A_s$，$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}=A_{\frac{s}{2}}$，$0<s<1$. 方程(1)与方程(2)等价[8]. 定义方程(2)的能量泛函为[14]

$$E(U(t))=\frac{1}{2}\int_D k_s y^{1-2s}|\nabla U(t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{p+1}\int_{\Omega\times\{0\}}a(x)U^{p+1}\,\mathrm{d}x\qquad U\in H_{0,L}^s(D)\tag{3}$$

其中

$$H_{0,L}^s(D)=\left\{U\,\middle|\,U\in L^2(D):U=0(\text{a.e. }x\in\partial_L D),\int_D k_s y^{1-2s}|\nabla U|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty\right\}$$

这里

$$\|U\|=\left(\int_D k_s y^{1-2s}|\nabla U|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

同理方程(1)的能量泛函定义为

$$I(u(t))=\frac{1}{2}\int_\Omega|A_{\frac{s}{2}}u(t)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_\Omega a(x)u^{p+1}\,\mathrm{d}x\qquad u\in H_0^s(\Omega)\tag{4}$$

受文献[13-16]的启发，定义

$$h(U)=\int_D k_s y^{1-2s}|\nabla U|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad g(U)=\int_{\Omega\times\{0\}}a(x)U^{p+1}\,\mathrm{d}x\qquad H(U)=h(U)-g(U)$$

对 $E(U(t))$ 关于 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}E(U(t))}{\mathrm{d}t}=\int_D k_s y^{1-2s}\nabla U\cdot\nabla U_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{\Omega\times\{0\}}a(x)U^pU_t\,\mathrm{d}x=-\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{U_t^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

因为 $a(x) \in C(\overline{\Omega})$，$\Omega$ 是有界区域，故存在 $m, M > 0$，使得 $m \leqslant |a(x)| \leqslant M$ 成立. 定义势井(稳定集)为

$$\Sigma_1 = \{U \in H^s_{0,L}(D) \mid 0 \leqslant E(\lambda U) < d, \lambda \in [0, 1]\}$$

定义势井的深度为

$$d = \inf\{\sup_{\lambda \geqslant 0} E(\lambda U) \mid U \in H^s_{0,L}(D), U \neq 0\}$$

本文的主要结果如下：

定理 1　若 $1 < p \leqslant p^*$，$p^* = \dfrac{N}{N-2s}$，$u_0 \in \Sigma_1$，则方程(1)存在整体解 $u = u(x, t; u_0)$.

定理 2　若 $U = U(x, y, t; U_0)$ 是方程(2)的解，且 $U_0 \in \Sigma_1$，则存在 $\alpha > 0$，使得

$$\int_D k_s y^{1-2s} |\nabla U(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(\mathrm{e}^{-\alpha t}) \qquad t \to \infty$$

定理 3　若 $U = U(x, y, t; U_0)$ 是方程(2)的整体解，且在 $H^s_{0,L}(D)$ 上关于 t 一致有界，则在 $H^s_{0,L}(D)$ 中，对任意序列 $\{t\}_n$，当 $t_n \to \infty$ 时，存在一个稳定解 w，使得 $U(x, y, t_n; U_0) \to w$.

1　解的整体存在性

为证明定理 1，先引入引理 1、引理 2，其证明过程与文献[12]中的相关结论的证明类似，此处省去证明.

引理 1　$d = \dfrac{p-1}{2(p+1)} \vartheta^{-\frac{2(p+1)}{p-1}}$，其中 $\dfrac{1}{\vartheta} = \inf\limits_{\substack{U \in H^s_{0,L}(D) \\ U \neq 0}} \dfrac{h^{\frac{1}{2}}(U)}{g^{\frac{1}{p+1}}(U)}$.

由分数阶 Sobolev 迹嵌入不等式(证明见文献[17])，设 $\dfrac{1}{\vartheta_1}$ 是最好的嵌入指数，由于 $|a(x)| \in [m, M]$，则有

$$\frac{m^{\frac{1}{p+1}}}{\vartheta} \leqslant \frac{1}{\vartheta_1} \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p+1}}}{\vartheta}$$

引理 2　若 $1 < p \leqslant p^*$，$p^* = \dfrac{N}{N-2s}$，令 $\rho_n(x) = \min\{|x|^{-2s}, n\}$，$\beta_n(x) = \min\{a(x)u^p, n\}$，则对任意的 $T > 0$ 和任意 $u_{n_0} \in C_0^\infty(\Omega)$，$a(x) \in C(\overline{\Omega})$，$u \in H_0^s(\Omega)$，方程

$$\begin{cases} \rho_n(x)\dot{u}_n + A_s u_n = \beta_n(u_n) & x \in \Omega, t \in (0, T] \\ u_n(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, t \in [0, T] \\ u_n(x, 0) = u_{n_0} & x \in \Omega \end{cases} \tag{5}$$

存在整体解 $u_n \in C([0, T]; H_0^s(\Omega))$，使得 $\dot{u}_n \in L^2([0, T]; H_0^s(\Omega))$，$\dot{u}_n = \dfrac{\partial u_n}{\partial t}$.

定理 1 的证明.

证　由引理 2 可知，方程(5)存在弱解 $u_n \in C([0, T]; H_0^s(\Omega))$. 在 $H_0^s(\Omega)$ 中，$u_{n_0} \in C_0^\infty(\Omega)$，$u_{n_0} \to u_0$，且存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $I(u_{n_0}) \leqslant I(u_0) + \varepsilon_0 < d$. 在方程 $\rho_n(x)\dot{u}_n + A_s u_n = a(x)u_n^p$ 两边同乘 $\dot{u}_n$，再在 $\Omega \times (0, t)$ 上积分，可得

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_n(x) \dot{u}_n^2(\tau) \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + I(u_n) = I(u_{n_0}) \leqslant I(u_0) + \varepsilon_0 < d \tag{6}$$

下证 $\forall t \in [0, T]$，$u_n(t) \in \Sigma_1$. 用反证法，设存在最小时间 t^*，使得 $u_n(t^*) \notin \Sigma_1$. 因为 $u_n \in C([0, T]; H_0^s(\Omega))$，且 $E(U(t))$ 关于 t 单调递减，则 $u_n(t^*) \in \partial\Sigma_1$，即 $I(u_n(t^*)) = d$ 或 $\int_\Omega |A_{\frac{s}{2}} u_n(t^*)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega a(x) u_n(t^*)^{p+1} \mathrm{d}x$. 显然第一种情况与(6)式矛盾. 将第二种情况代入 $I(u_n)$，再结合 ϑ 的定义和引理 1，

可得

$$I(u_n(t^*))=\frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega \left|A_{\frac{s}{2}}u_n(t^*)\right|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\vartheta^{-\frac{2(p+1)}{p-1}}=d$$

这也与(6)式矛盾.所以 $\forall t\in[0,T]$, $u_n(t)\in\Sigma_1$. 由 Σ_1 的定义,有

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_n(x)\dot{u}_n^2(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega |A_{\frac{s}{2}}u_n(t)|^2\mathrm{d}x<I(u_{n_0})<d \tag{7}$$

即有

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_n(x)\dot{u}_n^2(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau<d \qquad \int_\Omega |A_{\frac{s}{2}}u_n(t)|^2\mathrm{d}x<\frac{2(p+1)}{p-1}d$$

由(7)式,可得

$$\int_\Omega a(x)u_n^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant M\int_\Omega u_n^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{m}\vartheta^{p+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}(I(u_0)+\varepsilon_0)\right)^{\frac{p-1}{2}}\int_\Omega |A_{\frac{s}{2}}u_n(t)|^2\mathrm{d}x$$

令

$$\delta=\vartheta^{p+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}(I(u_0)+\varepsilon_0)\right)^{\frac{p-1}{2}}$$

由引理 1 和 $I(u_0)+\varepsilon_0<d$,可知当 ε_0 取足够小时,有

$$0<\delta<\frac{m}{M}<\vartheta^{p+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}d\right)^{\frac{p-1}{2}}=1$$

令 $\gamma=1-\delta\in(0,1)$,则有

$$\int_\Omega a(x)u_n^{p+1}\mathrm{d}x<\frac{M}{m}(1-\gamma)\int_\Omega |A_{\frac{s}{2}}u_n(t)|^2\mathrm{d}x \tag{8}$$

方程 $\rho_n(x)\dot{u}_n+A_su_n=a(x)u_n^p$ 两边同乘 u_n,再在 $\Omega\times\{0\}$ 上积分,得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_n(x)u_n^2\mathrm{d}x+C_1\int_0^t\int_\Omega |A_su_n(\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau<\frac{1}{2}\int_\Omega\rho_n(x)u_{n_0}^2\mathrm{d}x\leqslant C$$

其中 $C_1=1-\frac{M}{m}(1-\gamma)>0$, C 是与 n,T 无关的常数.所以 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $L^2([0,T];H_0^s(\Omega))$ 中一致有界.

综上所述,对任意的 $T\geqslant0$,序列 $\{u_n\}$ 都存在一个 u,使得

$$\begin{cases}u_n\rightarrow u & \text{a.e. } x\in\Omega_T\\ \sqrt{\rho_n}\dot{u}_n\rightharpoonup\dfrac{\dot{u}}{|x|^{2s}},\ A_{\frac{s}{2}}u_n\rightharpoonup A_{\frac{s}{2}}u & x\in L^2(\Omega_T)\\ u_n\rightharpoonup u & x\in L^2([0,T];L^{p+1}(\Omega))\\ u_n\rightharpoonup u & x\in L^\infty([0,T];H_0^{s,p}(\Omega))\end{cases}$$

所以方程(1)存在整体解.

2 渐近行为

在本节中,为证明定理 2 和定理 3,先引入引理 3,其证明过程参见文献[12].

引理 3 $\Sigma_1=\Sigma_1^*\cup\{0\}$,其中 $\Sigma_1^*=\{U\ |U\in H_{0,L}^s(D),E(U)<d,H(U)=h(U)-g(U)>0\}$.

定理 2 的证明.

由引理 3,对 $\forall t\geqslant0$,有 $H(U(t))\geqslant0$. 则

$$E(U_0)\geqslant E(U)=\frac{1}{2}h(U)-\frac{1}{p+1}g(U)=\frac{p-1}{2(p+1)}h(U)+\frac{1}{p+1}H(U)>\frac{p-1}{2(p+1)}h(U) \tag{9}$$

由分数阶 Sobolev 迹嵌入不等式,有

$$g(U)\leqslant\frac{M}{m}\vartheta^{p+1}h^{\frac{p+1}{2}}(U)<\frac{M}{m}\vartheta^{p+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}E(U_0)\right)^{\frac{p-1}{2}}h(U)$$

与定理 1 中证明过程相似，令 $\delta=\vartheta^{p+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}E(U_0)\right)^{\frac{p-1}{2}}$，同样选适当的 U_0 使得 $0<\delta<\frac{m}{M}<1$. 再令 $\gamma=1-\delta\in(0,1)$，则

$$g(U)\leqslant\frac{M}{m}(1-\gamma)\,h(U) \tag{10}$$

构造 $f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{|U|^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau$，计算得

$$f''(t)=\int_D-k_sy^{1-2s}\,|\nabla U|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{\Omega\times\{0\}}a(x)U^{p+1}\mathrm{d}x=-H(U) \tag{11}$$

在(11) 式中，对任意的 $T>t_0$，由 Hardy 不等式[18] 有

$$\int_t^T H(U(\tau))\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{|U(t)|^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{|U(T)|^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{|U(t)|^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x<\frac{H_{N,s}}{2}h(U) \tag{12}$$

所以，当 $t\in[t_0,T)$ 时，结合(9) 式和(12) 式有

$$\int_t^T H(U(\tau))\mathrm{d}\tau<\frac{H_{N,s}}{2}\frac{2(p+1)}{p-1}E(U(t))=cE(U(t)) \tag{13}$$

由(10) 式知，当 $t\in[t_0,\infty)$ 时，有

$$h(U)\leqslant\frac{1}{1-\frac{M}{m}(1-\gamma)}H(U)=\frac{m}{m+M\gamma-M}H(U) \tag{14}$$

结合(9) 式和(14) 式可知，当 $t\in[t_0,T)$ 时，有

$$E(U)\leqslant\left(\frac{m(p+1)}{2(p+1)(m+M\gamma-M)}+\frac{1}{p+1}\right)H(U) \tag{15}$$

由(13) 式和(15) 式可知

$$\int_t^T E(U(\tau))\mathrm{d}\tau<C\left(\frac{m(p-1)}{2(p+1)(m+M\gamma-M)}+\frac{1}{p+1}\right)E(U(t))=C_2E(U(t))$$

则对任意的 $T_0>t_0$，若 T_0 满足 $C_2\leqslant T_0$，当 $t\geqslant t_0$ 时，有$\int_t^\infty E(U(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant T_0E(U(t))$.

令 $y(t)=\int_t^\infty E(U(\tau))\mathrm{d}\tau>0$，则 $y'(t)\leqslant-\frac{1}{T_0}y(t)$. 由 Gronwall 不等式和 $E(U(t))$ 的单调性可得

$$y(t)\leqslant y(T_0)\mathrm{e}^{\int_{T_0}^t-\frac{1}{T_0}\mathrm{d}\tau}=y(T_0)\mathrm{e}^{-\frac{t-T_0}{T_0}}\leqslant T_0E(U(T_0))\mathrm{e}^{1-\frac{t}{T_0}}\leqslant T_0E(U(t_0))\mathrm{e}^{1-\frac{t}{T_0}} \tag{16}$$

及

$$y(t)=\int_t^\infty E(U(\tau))\mathrm{d}\tau\geqslant\int_t^{T_0+t}E(U(\tau))\mathrm{d}\tau\geqslant T_0E(U(T_0+t))$$

由(16) 式可得，对 $\forall t>T_0$，有 $E(U(T_0+t))\leqslant E(U(t_0))\mathrm{e}^{1-\frac{t}{T_0}}$. 结合(9) 式，可得

$$h(U(T_0+t))<\frac{2(p+1)}{p-1}E(U(T_0+t))<\frac{2(p+1)}{p-1}E(U(t_0))\mathrm{e}^{1-\frac{t}{T_0}}=C\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

其中 $C=\frac{2\mathrm{e}(p+1)}{p-1}E(U(t_0))$，$\alpha=\frac{1}{T_0}$.

定理 3 的证明　对任意序列 $t_n\to\infty$，令 $U_n=U(x,y,t_n;U_0)$. 由于自反巴拿赫空间的有界序列都是弱紧的，所以存在一个序列$\{U_n\}$ 和函数 U，使得

$$\begin{cases} U_n \rightharpoonup U & x \in H^s_{0,L}(D) \\ U_n \to U & x \in L^{p+1}(\Omega \times \{0\}) \\ U_n \to U & \text{a.e. } x \in \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

令测试函数

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} \rho(t - t_n)\psi(x, y) & t > t_n, x \in \overline{\Omega} \\ 0 & 0 \leqslant t \leqslant t_n, x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

其中 $\psi \in H^S_{0,L}(D)$，$\rho \in C^2_0(0, 1)$，$\rho \geqslant 0$，$\int_0^1 \rho(s)\mathrm{d}s = 1$. 由弱解的定义，有

$$\int_{t_n}^{t_n+1}\left[\int_D -\rho(t-t_n)k_s y^{1-2s}\ \nabla U \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Omega\times\{0\}} \frac{U_t}{|x|^{2s}}\rho(t-t_n)\psi\mathrm{d}x + \int_{\Omega\times\{0\}} a(x)U^p\rho(t-t_n)\psi\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{17}$$

对(17)式等号左边第二项用分部积分法，结合 $\rho(0)=\rho(1)=0$，令 $\delta = t - t_n$，得

$$\int_0^1\left[\int_D -\rho(\delta)k_s y^{1-2s}\ \nabla U(t_n+\delta)\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega\times\{0\}}\left(\frac{U(t_n+\delta)}{|x|^{2s}}\rho'(\delta)\psi + a(x)U^p(t_n+\delta)\rho(\delta)\psi\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\delta = 0 \tag{18}$$

因为 $U(t_n+\delta)(0\leqslant\delta\leqslant 1)$ 在 $H^s_{0,L}(D)$ 中一致有界，所以存在序列 $\{t_n\}$ 和函数 ω_δ，ω，使得

$$\| U(t_n+\delta) - \omega_\delta \|_{L^{p+1}(\Omega\times\{0\})} \to 0 \qquad \| U(t_n) - \omega \|_{L^{p+1}(\Omega\times\{0\})} \to 0$$

下证在 $\Omega\times\{0\}$ 中几乎处处有 $\omega_\delta = \omega$. 结合能量等式和 Hölder 不等式，当 $t_n \to \infty$ 时，有

$$\int_{\Omega\times\{0\}} \frac{|U(t_n+\delta)-U(t_n)|^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega\times\{0\}} \frac{1}{|x|^{2s}}\left|\left(\int_{t_n}^{t_n+\delta} 1^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{t_n+\delta} U_\tau^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}x = \delta\int_{t_n}^{t_n+\delta}\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{U_\tau^2}{|x|^{2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \to 0$$

因为 $0\leqslant\delta\leqslant 1$，当 $t_n \to \infty$ 时，有 $\| U(t_n+\delta) - U(t_n) \|_{L^2(\Omega\times\{0\})} \to 0$，即在 $\Omega\times\{0\}$ 中几乎处处有 $\omega_\delta = \omega$. 重新整理(18)式，可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1\left[\int_D -\rho(\delta)k_s y^{1-2s}\ \nabla U(t_n)\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega\times\{0\}}\left(\frac{U(t_n)}{|x|^{2s}}\rho'(\delta)\psi + a(x)U^p(t_n)\rho(\delta)\psi\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\delta - \\ &\int_0^1\int_D k_s y^{1-2s}(\nabla U(t_n+\delta) - \nabla U(t_n))\rho(\delta)\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\delta + \int_0^1\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{U(t_n+\delta)-U(t_n)}{|x|^{2s}}\rho'(\delta)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta + \\ &\int_0^1\int_{\Omega\times\{0\}}(U^p(t_n+\delta) - U^p(t_n))a(x)\rho(\delta)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

由勒贝格控制收敛定理可知，当 $t_n \to \infty$ 时，(19)式后 3 项趋近于 0. 对第二项，有

$$\int_0^1\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{U(t_n)}{|x|^{2s}}\rho'(\delta)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta \to \int_0^1\int_{\Omega\times\{0\}}\frac{\omega}{|x|^{2s}}\rho'(\delta)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta = \int_{\Omega\times\{0\}}\frac{\omega}{|x|^{2s}}\psi(\rho(1)-\rho(0))\mathrm{d}x = 0$$

又因为 $\int_0^1 \rho(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$，所以(19)式可简化为

$$\int_D k_s y^{1-2s}\ \nabla U(t_n)\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y - a(x)U^p(t_n)\psi\mathrm{d}x = o(1) \qquad n \to \infty$$

故 $U(t_n)$ 在弱意义上趋近于一个稳定解.

参考文献：

[1] APPLEBAUM D. Lévy Processes and Stochastic Calculus [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[2] VALDINOCI E. From the Long Jump Random Walk to the Fractional Laplacian [J]. Sema Journal Boletín De La Sociedad Espaola De Matemática Aplicada, 2009, 49(49): 33-44.

[3] CAFFARELLI L, VASSEUR A. Drift Diffusion Equations with Fractional Diffusion and the Quasi-Geostrophic Equation [J]. Annals of Mathematics, 2010, 171(3): 1903-1930.

[4] KISELEV A, NAZAROV F, VOLBERG A. Global Well-Posedness for the Critical 2D Dissipative Quasi-Geostrophic E-

quation [J]. Inventiones Mathematicae，2007，167(3)：445-453.

[5] 柳文清，陈清婉，傅金波. 具有分数阶扩散的捕食-食饵模型的共存性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(3)：16-20.

[6] LANDKOF N S. Foundations of Modern Potential Theory [M]. New-York：Springer-Verlag，1972.

[7] DI NEZZA E，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques，2012，136(5)：521-573.

[8] CAFFARELLI L，SILVESTRE L. An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian [J]. Communications in Partial Differential Equations，2007，32(8)：1245-1260.

[9] CORTAZAR C，ELGUETA M，ROSSI J D. The Blow-Up Problem for a Semilinear Parabolic Equation with a Potential [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，335(1)：418-427.

[10] DE PABL O A，QUIRÓS F，RODRÍGUEZ A，et al. A General Fractional Porous Medium Equation [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics，2012，65(9)：1242-1284.

[11] BESTEIRO A，RIAL D. Global Existence for Vector Valued Fractional Reaction-Diffusion Equations [J]. Publicacions Mathematiques，2021，65(2)：653-680.

[12] TAN Z，XIE M H. Global Existence and Blowup of Solutions to Semilinear Fractional Reaction-Diffusion Equation with Singular Potential [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2021，493(2)：124548.

[13] VLAHOS L，ISLIKER H，KOMINIS Y，et al. Normal and Anomalous Diffusion：A Tutorial [M]. Patras：Patras University Press，2008.

[14] 谭忠. 具有特殊扩散过程的反应扩散方程 [J]. 数学年刊 A 辑，2001，22(5)：597-606.

[15] SATTINGER D H. On Global Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1968，30(2)：148-172.

[16] PAYNE L E，SATTINGER D H. Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations [J]. Israel Journal of Mathematics，1975，22(3)：273-303.

[17] BRÄNDLE C，COLORADO E，DE PABLO A，et al. A Concave-Convex Elliptic Problem Involving the Fractional Laplacian [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh(Section A Mathematics)，2013，143(1)：39-71.

[18] TZIRAKIS K. Sharp Trace Hardy-Sobolev Inequalities and Fractional Hardy-Sobolev Inequalities[J]. Journal of Functional Analysis，2016，270(12)：4513-4539.

责任编辑　廖坤