第 47 卷　第 4 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2022 年 4 月
Vol. 47　No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.008

扭曲乘积形式的 2 维双曲 Yamabe 方程①

胡玉琪，　赖晋秋，　姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：本文通过扭曲乘积流形中一种特殊的度量形式，即旋转对称度量，研究了 2 维双曲空间在扭曲乘积$\mathbb{R}_+ \times_{\varphi} S^1$形式下的 Yamabe 方程，推导出了扭曲乘积形式的标准单位球面的 Yamabe 方程及其解，并在此基础上，通过类比找到了 2 维双曲 Yamabe 方程的一组特解.

关 键 词：双曲 Yamabe 方程；扭曲乘积流形；旋转对称度量

中图分类号：O186.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)04－0052－06

2-Dimensional Hyperbolic Yamabe Equation in Form of Warped Products

HU Yuqi，　LAI Jinqiu，　YAO Chunqing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the Yamabe Equation of 2-dimensional hyperbolic space in the form of $\mathbb{R}_+ \times_{\varphi} S^1$ is studied in a special form of warped products, that is, the metric of rotational symmetry. The Yamabe Equation and its solution of the standard unit sphere in the form of warped product are derived. On this basis, a set of special solutions of the 2-dimensional hyperbolic Yamabe Equation are found by analogy.

Key words: hyperbolic Yamabe Equation; warped products; rotationally symmetric metrics

紧致黎曼流形上的 Yamabe 问题最早由文献[1]提出并证明，但文献[1]的证明存在一定缺陷，后由文献[2-3]进一步完善，最后由文献[4]完全解决.

对于完备非紧致的流形，文献[5]通过偏微分方程研究了预定曲率问题；文献[6]研究了与双曲圆盘共形的完备度量的曲率；文献[7]研究了圆盘上具有非正曲率的完备度量；文献[8]研究了洛伦兹流形上的 Yamabe 问题；文献[9]通过刘维尔方程给出了 2 维双曲 Yamabe 问题的一般解，但解的形式比较复杂.

扭曲乘积度量是微分几何中研究黎曼流形和伪黎曼流形的一种重要的度量形式，文献[10]利用 Yamabe 方程给出了扭曲乘积流形 $M \times_f N$ 的数量曲率和两个因子流形 M,N 的数量曲率之间的关系；文献[11]证明了在某些非紧乘积流形的共形类中，无穷多个具有常数量曲率的完备度量的存在性；文献[12]运用分叉定理和谱定理研究了扭曲乘积流形上 Yamabe 方程解的多重性.

旋转对称度量 $g = \mathrm{d}t^2 + \varphi^2(t)\mathrm{d}S_{n-1}^2$ 是一类特殊的扭曲乘积度量，我们可以通过旋转对称度量来研究 2

---

① 收稿日期：2021－10－12

基金项目：国家自然科学基金项目(11971415).

作者简介：胡玉琪，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

维双曲空间的Yamabe问题. 首先，我们给出了扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_\varphi S^1$ 上的Yamabe方程；其次，将标准球面上一般的 Yamabe 方程的解转化为扭曲乘积形式下 Yamabe 方程的解；最后，通过类比，找到了扭曲乘积形式下 2 维双曲 Yamabe 方程的一组特解.

1　预备知识

设 $B=(B^m, g_B)$ 和 $F=(F^n, g_F)$ 是两个黎曼流形，考虑乘积流形 $B\times F$ 及自然射影 $\rho: B\times F\longrightarrow B$ 和 $\eta: B\times F\longrightarrow F$.

定义 1　如果乘积流形 $M=B\times F$ 上的度量 g 满足

$$g(X, Y)=g_B(\rho_*X, \rho_*Y)+\varphi^2(\rho(\cdot))g_F(\eta_*X, \eta_*Y)$$

其中 X,Y 是乘积流形上任意一对向量场，则称 g 为扭曲乘积度量，函数 φ 是B 上正的光滑函数，称为扭曲函数. 我们将此度量简记为 $g=g_B+\varphi^2 g_F$，将具有此度量的乘积流形称为扭曲乘积流形，记为 $B\times_\varphi F$.

特别地，当 B 是 $\mathbb{R}_+$ 上的开区间 I，F 是 $\mathbb{R}^n$ 中标准单位球面 S^{n-1} 时，扭曲乘积流形 $I\times_\varphi S^{n-1}$ 上的度量

$$g=\mathrm{d}t^2+\varphi^2(t)\mathrm{d}S_{n-1}^2$$

称为旋转对称度量.

设 $\varphi=sn_k(t)$ 是方程组

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0 & k\in\mathbb{R}\\ x(0)=0 & \\ \dot{x}(0)=1 & \end{cases}$$

的唯一解，以 $sn_k(t)$ 为扭曲函数，可得旋转对称度量的一组单参数族 $dt^2+sn_k^2(t)\mathrm{d}S_{n-1}^2$[13].

当 $k=0$ 时，$sn_k(t)=t$，流形 $\mathbb{R}_+\times_t S^{n-1}$ 与欧氏空间$(\mathbb{R}^n, \xi)$ 等距，其中 ξ 为标准欧氏度量.

当 $k=1$ 时，$sn_k(t)=\sin t$，考虑映射

$$G: \mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^{n-1}\longrightarrow(S^n, h)$$
$$(t, z)\longmapsto(\sin t\cdot z, \cos t)$$

可以验证G 是一个等距映射，因此流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^{n-1}$ 与标准单位球面(S^n, h) 等距，其中h 是球面S^n 上的标准度量[13].

当 $k=-1$ 时，$sn_k(t)=\sinh t$，可以证明流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sinh t}S^{n-1}$ 与双曲空间(H^n, h^1) 等距，其中 h^1 为双曲空间上的标准度量(引理 1).

流形(M^n, g) 上的拉普拉斯算子定义为

$$\Delta=\delta_g\circ\mathrm{d}=-\mathrm{tr}(\nabla\circ\mathrm{d})$$

对任意的函数 $f\in C^\infty(M)$，在局部坐标图下，有

$$\Delta_g f=-g^{ij}(\partial_{ij}f-\Gamma_{ij}^k\partial_k f)=-\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j f) \tag{1}$$

设 $S_g,S_{\tilde{g}}$ 分别表示在度量 g 和 $\tilde{g}$ 下的数量曲率，当 $n=2$ 时，设 $\tilde{g}=\mathrm{e}^u g$，$u\in C^\infty(M)$，则

$$\Delta_g u+S_g=S_{\tilde{g}}\mathrm{e}^u \tag{2}$$

当 $n\geqslant 3$ 时，设 $\tilde{g}=v^{\frac{4}{n-2}}g$，$v\in C^\infty(M)$，$v>0$，则

$$\Delta_g v+\frac{n-2}{4(n-1)}S_g v=\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\tilde{g}}v^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3}$$

取球面上的北极点 $N(0,\cdots,0,1)$ 为投影中心，通过球极投影

$$\pi: S^n-\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$
$$x\longmapsto N+\frac{1}{1-\langle N, x\rangle}(x-N)$$

球面上标准度量 h 表示为[14]

$$(\pi^{-1})^*h=\frac{4}{(1+|\pi(x)|^2)^2}\boldsymbol{\xi}\qquad x\in S^n-\{N\}$$

设 ϕ 是(S^n, h)到它自身的共形微分同胚，则 $\psi=\pi\circ\phi\circ\pi^{-1}$ 是$(\mathbb{R}^n, \xi)$上的共形微分同胚，从而可写为

$$\psi=A\circ B\circ C$$

其中 $A\in O(n)$，B 是平移变换，记 $B(x)=\pi(x)+a$，C 是伸缩变换，记 $C(x)=\lambda\pi(x)$，$\lambda\neq 0$. 通过计算可得

$$\phi^{*}h=\lambda^{2}\left(\frac{1+|\pi(x)|^{2}}{1+|\lambda\pi(x)+a|^{2}}\right)^{2}h$$

因此得球面上的共形变换[3]

$$\phi^{*}h=\frac{4\lambda^{2}}{[1+\lambda^{2}+|a|^{2}-(1-\lambda^{2}+|a|^{2})\langle N, x\rangle+2\lambda\langle a, x\rangle]^{2}}h \tag{4}$$

我们知道，标准双曲空间(H^n, can)有3个常用的模型，分别为双曲面模型(H^n, h^1)、庞加莱球模型(B^n, h^2)和庞加莱半空间模型(U^n, h^3). 取 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中双叶双曲面下半支的顶点 $S(0, \cdots, 0, -1)$ 为投影中心，通过双曲球极投影

$$\pi: H^n\longrightarrow B^n$$
$$x\longmapsto S+\frac{1}{1-\langle S, x\rangle}(x-S)$$

双曲空间 H^n 上的度量 h^1 表示为[14]

$$(\pi^{-1})^{*}h^{1}=h^{2}=\frac{4}{(1-|\pi(x)|^{2})^{2}}\xi \qquad x\in H^n$$

2 主要结果

取(H^n, h^1)作为我们所用的模型，它是在坐标$(\tau, \xi^1, \cdots, \xi^n)$中由方程 $\tau^2-|\xi|^2=1$ 定义的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的双叶双曲面的上半支，具有度量

$$h^{1}=\iota^{*}m$$

其中 $\iota: H^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ 是包含映射，$m=-(\mathrm{d}\tau)^2+(\mathrm{d}\xi^1)^2+\cdots+(\mathrm{d}\xi^n)^2$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 Minkowski 度量.

引理 1 映射

$$G: \mathbb{R}_{+}\times_{\sinh t}S^{n-1}\longrightarrow(H^n, h^1)$$
$$(t, z)\longmapsto(\sinh t\cdot z, \cosh t)$$

是一个等距映射.

证 设 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 为标准单位球面 S^{n-1} 上的任意一点，由 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=1$ 得

$$z_1\mathrm{d}z_1+z_2\mathrm{d}z_2+\cdots+z_n\mathrm{d}z_n=0$$

从而

$$\begin{aligned}G^{*}h^{1}=&-(\mathrm{d}\cosh t)^{2}+\sum(\mathrm{d}(\sinh t\cdot z_i))^{2}=\\&-\sinh^{2}t\,\mathrm{d}t^{2}+\sum(\cosh t\cdot z_i\mathrm{d}t+\sinh t\,\mathrm{d}z_i)^{2}=\\&-\sinh^{2}t\,\mathrm{d}t^{2}+\cosh^{2}t\,|z|^{2}\mathrm{d}t^{2}+\cosh t\sinh t\,\mathrm{d}t\cdot\sum z_i\mathrm{d}z_i\mathrm{d}t+\sinh^{2}t\sum\mathrm{d}z_i^{2}=\\&\mathrm{d}t^{2}+\sinh^{2}t\,\mathrm{d}S_{n-1}^{2}\end{aligned}$$

引理1得证.

下面我们要写出扭曲乘积流形上的 Yamabe 方程，为此，先给出扭曲乘积形式下的拉普拉斯算子.

引理 2 在扭曲乘积流形$(M^n, g)=(\mathbb{R}_{+}\times S^{n-1}, \mathrm{d}t^2+\varphi^2(t)\mathrm{d}S_{n-1}^2)$上，对任意的函数 $f\in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$，有

$$\Delta_g f=-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-(n-1)\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\varphi^2}\Delta_h f \tag{5}$$

证 首先，黎曼度量 g 在局部坐标图下可表示为

$$g_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1&0\\0&(g_t)_{ij}\end{bmatrix}$$

其中

$$(g_t)_{ij}=\varphi^2(t)h_{ij}\qquad i,j=2,\cdots,n$$

从而 $g^{ij}=g_t^{ij}=\frac{1}{\varphi^2}h^{ij}$. 由(1) 式可得

$$\begin{aligned}\Delta_g f=&-g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha\beta}f-\Gamma^k_{\alpha\beta}\partial_k f)=\\&-g^{11}(\partial_{11}f-\Gamma^k_{11}\partial_k f)-g^{ij}(\partial_{ij}f-\Gamma^k_{ij}\partial_k f)=\\&-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\Gamma^k_{11}\partial_k f+g^{ij}\Gamma^1_{ij}\frac{\partial f}{\partial t}+\Delta_{g_t}f\end{aligned}$$

再由

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})$$

可得

$$\Gamma^k_{11}=0\qquad \Gamma^1_{ij}=-\frac{1}{2}\partial_1 g_{ij}=-\frac{\partial g_{ij}}{2\partial t}=-\varphi\dot{\varphi}h_{ij}$$

因为 $\partial_i\varphi=0$，则

$$\begin{aligned}\Delta_{g_t}f=&-\frac{1}{\sqrt{|g_t|}}\partial_i(\sqrt{|g_t|}g_t^{ij}\partial_j f)=\\&\frac{1}{\varphi^2}\Delta_h f-\frac{n-3}{\varphi^3}h^{ij}\partial_i\varphi\partial_j f=\frac{1}{\varphi^2}\Delta_h f\end{aligned}$$

整理即得

$$\Delta_g f=-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-(n-1)\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\varphi^2}\Delta_h f$$

引理 2 得证.

特别地，当 $n=2$ 时，在标准单位圆周 S^1 的极坐标下，$\Delta_h f=-\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$，故扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_\varphi S^1$ 上的拉普拉斯算子为

$$\Delta_g f=-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\tag{6}$$

引理 3[13]　$(M^n,g)=(\mathbb{R}_+\times S^{n-1},\mathrm{d}t^2+\varphi^2(t)\mathrm{d}S^2_{n-1})$ 的数量曲率为

$$S_g=-2(n-1)\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}+(n-1)(n-2)\frac{1-\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}\tag{7}$$

根据(2),(6),(7) 式，扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_\varphi S^1$ 上的 Yamabe 方程可写为

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-2\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}=\mu\mathrm{e}^u\tag{8}$$

其中 μ 为常数.

下面讨论当 φ 取特殊的函数 $sn_k(t)$ 时，扭曲乘积流形$(\mathbb{R}_+\times S^1,\mathrm{d}t^2+sn_k^2(t)\mathrm{d}S_1^2)$ 上的 Yamabe 方程及其解.

当 $k=0$ 时，扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_t S^1$ 是与 $\mathbb{R}^2$ 等距的，而 $\mathbb{R}^2$ 的数量曲率为 0，设 $\widetilde{g}=\mathrm{e}^u g$ 是该扭曲乘积流形上的共形变换，那么 Yamabe 方程可写为

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

我们知道，$(\mathbb{R}^2,\xi)$ 上的共形变换即为相似变换，共形因子为常值函数，而常值函数恰好是我们所给方程的一组解.

当 $k=1$ 时，扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^1$ 是与标准单位球面 S^2 等距的.

定理 1　扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^1$ 上的 Yamabe 方程为

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\cos t}{\sin t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{\sin^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+2=\mu \mathrm{e}^u$$

该方程在 $\mu=2$ 时具有如下形式的解:

$$u=2\mathrm{Ln}\frac{2\lambda}{1+\lambda^2+|a|^2-(1-\lambda^2+|a|^2)\cos t+2\lambda\sin t\langle a, z\rangle}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}_+$, $a\in\mathbb{R}^2$, $z\in S^1$.

证 设 $\tilde{g}=\mathrm{e}^u g$ 是 $\mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^1$ 上的共形变换，将 $\varphi(t)=\sin t$ 代入方程(8) 可写出 $\tilde{g}$ 具有常数量曲率 2 的 Yamabe 方程

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\cos t}{\sin t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{\sin^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+2=2\mathrm{e}^u$$

考虑等距映射

$$\begin{aligned}G: \mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^1 &\longrightarrow (S^2, h)\\ (t, z) &\longmapsto (\sin t\cdot z, \cos t)\end{aligned}$$

令 $z=(\cos\theta, \sin\theta)$ 表示单位圆周 S^1 上的任意一点. 那么 $x=(\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, \cos t)$ 表示 S^2 上的任意一点，由(4) 式可得共形因子

$$\mathrm{e}^u=4\lambda^2[1+\lambda^2+|a|^2-(1-\lambda^2+|a|^2)\cos t+2\lambda\sin t(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)]^{-2}$$

即

$$u=2\mathrm{Ln}\frac{2\lambda}{1+\lambda^2+|a|^2-(1-\lambda^2+|a|^2)\cos t+2\lambda\sin t\langle a, z\rangle}$$

它是我们所给的 Yamabe 方程的解，定理 1 得证.

当 $k=-1$ 时，扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sinh t}S^1$ 是与双曲空间(H^2, h^1) 等距的. 在双曲球极投影 $\pi: H^2\longrightarrow B^2$ 下，$(\pi^{-1})^*h^1=\frac{4}{(1-|\pi(x)|^2)^2}\xi$，这样的度量形式与上述标准单位球面的度量形式是类似的，且双曲空间的扭曲乘积形式与一般形式之间的等距和球面的情形也是类似的，因此我们可以仿照扭曲乘积形式下标准单位球面的 Yamabe 方程及其解的形式写出扭曲乘积形式下 2 维双曲 Yamabe 方程及其特解.

定理 2 扭曲乘积流形 $\mathbb{R}_+\times_{\sinh t}S^1$ 上的 Yamabe 方程为

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\cosh t}{\sinh t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{\sinh^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-2=\mu \mathrm{e}^u$$

该方程在 $\mu=-2$ 时具有如下形式的解:

$$u=2\mathrm{Ln}\frac{2\lambda}{1+\lambda^2-|a|^2+(1-\lambda^2-|a|^2)\cosh t-2\lambda\sinh t\langle a, z\rangle}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}_+$, $a\in\mathbb{R}^2$, $\lambda^2+|a|^2<1$, $z\in S^1$.

证 设 $\tilde{g}=\mathrm{e}^u g$ 是 $\mathbb{R}_+\times_{\sinh t}S^1$ 上的共形变换，将 $\varphi(t)=\sinh t$ 代入方程(8) 可写出 $\tilde{g}$ 具有常数量曲率 -2 的 Yamabe 方程

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\cosh t}{\sinh t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{\sinh^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-2=-2\mathrm{e}^u$$

仿照标准单位球面上的共形变换(4)，我们构造双曲空间上的共形变换为

$$\begin{aligned}&\phi^* h^1=\\ &4\lambda^2[1+\lambda^2-|a|^2-(1-\lambda^2-|a|^2)\langle S, x\rangle-2\lambda\langle a, x\rangle]^{-2}h^1 \qquad \lambda^2+|a|^2<1\end{aligned} \tag{9}$$

考虑等距映射

$$\begin{aligned}G: \mathbb{R}_+\times_{\sin t}S^1 &\longrightarrow (H^2, h^1)\\ (t, z) &\longmapsto (\sinh t\cdot z, \cosh t)\end{aligned}$$

令 $z=(\cos\theta, \sin\theta)$ 表示单位圆周 S^1 上的任意一点. 那么 $x=(\sinh t\cos\theta, \sinh t\sin\theta, \cosh t)$ 表示 H^2 上的任意一点，由(9) 式可得共形因子

$$\mathrm{e}^u=4\lambda^2[1+\lambda^2-|a|^2+(1-\lambda^2-|a|^2)\cosh t-2\lambda\sinh t(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)]^{-2}$$

即

$$u = 2\mathrm{Ln}\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2-|a|^2+(1-\lambda^2-|a|^2)\cosh t-2\lambda\sinh t\langle a, z\rangle}$$

可以验证它是我们所给方程的一组解，定理 2 得证.

我们利用扭曲乘积流形研究了 2 维双曲 Yamabe 方程及其特解，但要推广到更高维的双曲空间，甚至更一般的扭曲乘积流形还需要进一步地开展研究.

参考文献：

[1] YAMABE H. On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds [J]. Osaka Mathematical Journal, 1960, 12(1): 21-37.

[2] TRUDINGER N S. Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1968, 22(2): 265-274.

[3] AUBIN T. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[4] SCHOEN R. Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature [J]. Journal of Differential Geometry, 1984, 20(2): 479-495.

[5] AVILES P, MCOWEN R. Conformal Deformations of Complete Manifolds with Negative Curvature [J]. Journal of Differential Geometry, 1985, 21(2): 269-281.

[6] BLAND J, KALKA M. Complete Metrics Conformal to the Hyperbolic Disc [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1986, 97(1): 128-132.

[7] DUC D M. Complete Metrics with Nonpositive Curvature on the Disk [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1991, 113(1): 171-176.

[8] GINOUX N. About the Lorentzian Yamabe Problem [J]. Geometriae Dedicata, 2015, 174(1): 287-309.

[9] KONG D X, LIU Q. Hyperbolic Yamabe Problem [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2017, 32(2): 147-163.

[10] DOBARRO F, LAMI DOZO E. Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1987, 303(1): 161-168.

[11] BETTIOL R G, PICCIONE P. Infinitely Many Solutions to the Yamabe Problem on Noncompact Manifolds [J]. Annales de l'Institut Fourier, 2018, 68(2): 589-609.

[12] RUIZ J M. Multiplicity of Solutions to the Yamabe Equation on Warped Products [J]. Journal of Geometry and Physics, 2019, 138: 44-54.

[13] PETERSEN P. Riemannian Geometry [M]. New York: Springer Verlag, 2006.

[14] LEE J M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

责任编辑　廖坤