DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.04.009

高维球冠上的 Yamabe 问题①

赖晋秋， 胡玉琪， 姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： Yamabe 问题是微分几何中很重要的一类问题. 本文研究了高维球冠 M^n($n\geqslant 4$)上的 Yamabe 问题. 首先利用球极投影，将球面上的度量诱导到球冠边界上，计算得到球冠边界的数量曲率；然后提出了球冠上的一类带边界条件的 Yamabe 方程，并且得到了该方程的一组解.

关 键 词： Yamabe 方程；球冠边界；数量曲率

中图分类号： O186.1 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2022)04-0058-05

Yamabe Problem on High Dimensional Spherical Cap

LAI Jinqiu， HU Yuqi， YAO Chunqing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Yamabe problem is an important kind of problem in differential geometry. In this paper, Yamabe problem has been studied on high dimensional spherical cap M^n ($n\geqslant 4$). Firstly, the measurement on the sphere is induced to the spherical cap boundary by using spherical pole projection, and the scalar curvature of the spherical cap boundary is calculated. Then, a class of Yamabe Equations with boundary conditions on the spherical cap is proposed, and a set of solutions of the equations are obtained.

Key words: Yamabe Equation; spherical cap boundary; scalar curvature

文献[1]提出了 Yamabe 问题：在每个 m($\geqslant 3$)维紧致无边黎曼流形(M, g)上，是否存在一个与 g 共形且具有常数量曲率的度量？ 经过文献[1-4]的研究，Yamabe 问题得到了彻底的解决，并由此带来几何分析中一系列新的进展[5].

长期以来，Yamabe 问题的研究主要围绕着不带边界的紧致黎曼流形进行[6-7]，得到了令人满意的结果. 对于带非空边界的紧黎曼流形，是否也有相应的 Yamabe 问题呢？ 文献[8]研究了紧致带边流形上的 Yamabe 问题. 文献[9]通过构造局部测试函数，给出了在带边流形上的 Yamabe 问题的一个存在定理. 文献[10-11]也讨论了具有正 Ricc 曲率和凸边界的紧黎曼流形的相关问题.

本文研究球冠上的 Yamabe 问题，利用局部嵌入以及两次球极投影[12]，将标准球面上的度量诱导到球冠边界上，得到球冠边界的度量[13]；提出了球冠上的一类带边界条件的 Yamabe 方程，并且得到了该方程的一组解.

---

① 收稿日期：2021-10-12
基金项目：国家自然科学基金项目(11971415).
作者简介：赖晋秋，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

1　预备知识

球极投影 $\sigma: S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 将 S^n 上(除北极点 N 外)任意一点 $P(\xi^1, \cdots, \xi^n, \tau)$ 通过北极点 $N(0, \cdots, 0, 1)$ 映照到欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一点 $U(u^1, \cdots, u^n)$. 我们知道，σ^{-1} 可写为

$$(\xi, \tau) = \left(\frac{2u}{|u|^2+1}, \frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\right) \tag{1}$$

其中 $|u|^2 = \sum_{i=1}^{n}(u^i)^2$.

在球极投影下，球面上的标准度量表示为

$$h = \frac{4}{(|u|^2+1)^2}\xi_E$$

其中 ξ_E 是欧氏空间上的标准度量. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的笛卡尔坐标系下，$\xi_E = \delta_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \otimes \mathrm{d}u^\beta$，从而

$$h_{\alpha\beta} = \frac{4}{(|u|^2+1)^2}\delta_{\alpha\beta} \tag{2}$$

我们知道，数量曲率在共形变换$\tilde{g} = \psi^{\frac{4}{n-3}}g$ 下的变换公式为

$$S_{\tilde{g}} = \left(\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g\psi + S_g\psi\right)\psi^{-\frac{n+2}{n-2}} \tag{3}$$

球面的标准度量 h 是一个 Einstein 度量，任何与 h 共形且具有常数量曲率的度量也是 Einstein 度量. 由于这个度量的 Weyl 曲率是 0，因此它具有常截面曲率. 所以这个度量与标准度量是等距的. 我们利用标准球面 S^n 上的球极投影，以及 $\mathbb{R}^n$ 上的伸缩、平移、旋转变换，构造出球面 S^n 上的共形变换，从而得到以下结果：

若(S^n, h)是维数 $n \geqslant 3$ 的标准单位球面，设 $g = \phi_0^{\frac{4}{n-2}}h \in [h]$. 标准单位球面上的 Yamabe 方程为

$$\Delta_h\phi_0 + \frac{n-2}{4(n-1)}S_h\phi_0 = \frac{n-2}{4(n-1)}\lambda\phi_0^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{4}$$

该方程在 $\lambda = n(n-1)$ 时具有标准解

$$\phi_0 = (\beta^2-1)^{\frac{n-2}{4}}(\beta - \cos \mathrm{d}_h(x_0, x))^{-\frac{n-2}{2}} \tag{5}$$

其中 $\beta > 1$，x_0 是球面上的一点[14].

2　主要定理及其证明

如图 1，令球冠 M 的半径为 $r(r \leqslant 1)$，其边界为 ∂M. 令 h 是球面上的标准度量在球冠上的限制，$g = \varphi^* h$ 是通过包含映射 $\varphi: \partial M \longrightarrow M$ 得到的球冠边界上的诱导度量.

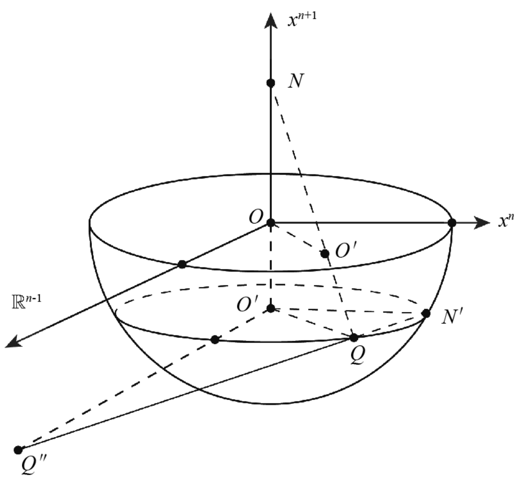

图 1　球冠及其边界上的球极投影

第一次球极投影 σ 以 $N(0, \cdots, 0, 1)$ 为投影中心，将点 $Q(x^1, \cdots, x^n, -\sqrt{1-r^2})$ 映到点 $Q'(u^1, \cdots, u^n, 0)$，计算得到

$$u^i = \frac{1}{1+\sqrt{1-r^2}} x^i \qquad i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

第二次球极投影 $\tilde{\sigma}$ 以 $N'(0, \cdots, r, -\sqrt{1-r^2})$ 为投影中心，将球冠边界上任意一点 $Q(x^1, \cdots, x^n, -\sqrt{1-r^2})$ 映到点 $Q''(v^1, \cdots, v^{n-1}, 0, -\sqrt{1-r^2})$，计算得到

$$\begin{cases} x^i = \dfrac{2r^2}{|v|^2 + r^2} v^i & i = 1, \cdots, n-1 \\ x^n = \dfrac{|v|^2 - r^2}{|v|^2 + r^2} r \end{cases} \tag{7}$$

引理 1 设 $h_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \cdots, n)$ 是球面 S^n 上标准度量 h 在球极投影 σ 下的分量，$g_{ij}(i, j = 1, \cdots, n-1)$ 是 h 球冠边界 ∂M 的诱导度量 g 在球极投影 $\tilde{\sigma}$ 下的分量，则

$$g_{ij}(x) = \frac{4r^4}{(1+\sqrt{1-r^2})^2 (|v|^2 + r^2)^2} h_{ij}(x) \qquad x \in \partial M - \{N'\}$$

证 将球极投影(6)，(7)式进行复合，得到包含映射 $\varphi: \partial M - \{N'\} \longrightarrow S^n - \{N\}$ 的表达式

$$\begin{cases} u^i = \dfrac{2r^2}{1+\sqrt{1-r^2}} \dfrac{v^i}{|v|^2 + r^2} & i = 1, \cdots, n-1 \\ u^n = \dfrac{r}{1+\sqrt{1-r^2}} \dfrac{|v|^2 - r^2}{|v|^2 + r^2} \end{cases} \tag{8}$$

则

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad \alpha = 1, \cdots, n;\ i = 1, \cdots, n-1$$

计算得到

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = \begin{cases} \dfrac{2r^2}{1+\sqrt{1-r^2}} \dfrac{\delta_{\alpha i}(|v|^2 + r^2) - 2v^\alpha v^i}{(|v|^2 + r^2)^2} & \alpha = 1, \cdots, n-1 \\ \dfrac{4r^3}{1+\sqrt{1-r^2}} \dfrac{v^i}{(|v|^2 + r^2)^2} & \alpha = n \end{cases} \tag{9}$$

由于 $g = \varphi^* h$，所以

$$g_{ij} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} h_{\alpha\beta} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} h_{kl} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^n}{\partial v^j} h_{kn} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial u^n}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^j} h_{nl} + \frac{\partial u^n}{\partial v^i} \frac{\partial u^n}{\partial v^j} h_{nn}$$

而 $h_{\alpha\beta} = \dfrac{4}{(|u|^2 + 1)^2} \delta_{\alpha\beta}$，其中 $|u|^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} (u^\alpha)^2$，故

$$g_{ij} = \frac{4r^4}{(1+\sqrt{1-r^2})^2 (|v|^2 + r^2)^2} h_{ij}$$

引理 1 得证.

我们接下来考虑球冠边界上 Yamabe 方程的解. 如果在球冠(M, h)上给出一个 h 的共形度量 $\tilde{h} = \phi^{\frac{4}{n-2}} h$，则在球冠$(M, h)$上的 Yamabe 方程为

$$\Delta_h \phi + \frac{n-2}{4(n-1)} S_h \phi = \frac{n-2}{4(n-1)} \lambda \phi^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{10}$$

这个方程在 h 是球面标准度量的情况下是有标准解的. 由引理 1 可知，在给出 h 的共形度量下，球冠边界也诱导出相应的共形度量

$$\tilde{g}=\phi^{\frac{4}{n-2}}g=(\phi^{\frac{n-3}{n-2}})^{\frac{4}{n-3}}g$$

由于球冠边界比球冠低一维，于是令 $\bar{\phi}(x)=\phi^{\frac{n-3}{n-2}}(x)$，$x\in\partial M$，那么

$$\tilde{g}=\bar{\phi}^{\frac{4}{n-3}}g$$

所以在边界$(\partial M, g)$上，Yamabe 方程为

$$\Delta_g\bar{\phi}+\frac{n-3}{4(n-2)}S_g\bar{\phi}=\frac{n-3}{4(n-2)}\bar{\lambda}\,\bar{\phi}^{\frac{n+1}{n-3}} \tag{11}$$

定理 1　对于球冠 $M(n=\dim M\geqslant 4)$，带边界条件的 Yamabe 方程

$$\begin{cases}\Delta_h\phi+\dfrac{n-2}{4(n-1)}S_h\phi=\dfrac{n-2}{4(n-1)}\lambda\phi^{\frac{n+2}{n-2}} & x\in M\\[2ex] \Delta_g\bar{\phi}+\dfrac{n-3}{4(n-2)}S_g\bar{\phi}=\dfrac{n-3}{4(n-2)}\bar{\lambda}\,\bar{\phi}^{\frac{n+1}{n-3}} & x\in\partial M\end{cases} \tag{12}$$

有解，其中 λ ,$\bar{\lambda}$ 是常数，$\bar{\phi}(x)=\phi^{\frac{n-3}{n-2}}(x)$，$x\in\partial M$.

证　由球冠边界的度量，我们很容易得到球冠边界$(\partial M, g)(n=\dim M\geqslant 4)$的数量曲率 S_g. 由(1)式与引理 1 可知

$$g_{ij}=\frac{16r^4}{(1+\sqrt{1-r^2})^2(|u|^2+1)^2(|v|^2+r^2)^2}\delta_{ij}$$

令

$$A=\frac{16r^4}{(1+\sqrt{1-r^2})^2(|u|^2+1)^2}$$

由(6)式可知，在球冠边界上 $|u|^2=\dfrac{r^2}{(1+\sqrt{1-r^2})^2}$，因此 A 是常数. 令

$$\psi^{\frac{4}{n-3}}=\frac{A}{(|v|^2+r^2)^2}$$

从而可得

$$\psi=(A)^{\frac{n-3}{4}}(|v|^2+r^2)^{-\frac{n-3}{2}} \tag{13}$$

考虑共形变换 $g_{ij}=\psi^{\frac{4}{n-3}}\delta_{ij}$. 我们知道，欧氏空间的数量曲率 $S_{\xi E}=0$，所以欧氏空间的拉普拉斯算子

$$\Delta_{\xi E}\psi=-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v^i}\right)^2=$$

$$-(A)^{\frac{n-3}{4}}(n-3)(n-1)[-(|v|^2+r^2)^{-\frac{n+1}{2}}|v|^2+(|v|^2+r^2)^{-\frac{n-1}{2}}]$$

由(3)式得到球冠边界的数量曲率

$$S_g=(n-1)(n-2)\frac{[r^2+(1+\sqrt{1-r^2})^2]^2}{4r^2(1+\sqrt{1-r^2})^2} \tag{14}$$

我们知道，标准球面 S^n 上的 Yamabe 方程具有标准解

$$\phi_0=(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{4}}(\beta-\cos\mathrm{d}_h(x_0, x))^{-\frac{n-2}{2}}$$

其中 $\beta>1$，x_0 是与球面上北极点相关的点，x 是球面上任意一点. 那么这个解同样适用于球冠(M^n, h)上，即满足

$$\Delta_h\phi+\frac{n-2}{4(n-1)}S_h\phi=\frac{n-2}{4(n-1)}\lambda\phi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

其中 $\lambda=n(n-1)$.

当这个共形变换只由伸缩、旋转生成时，易知 x_0 为北极点 N 或南极点 S，此时 ϕ_0 是旋转对称的. 当限制在球冠边界 ∂M 上时，ϕ_0 为常数，记为 Λ，从而

$$\bar{\phi}_0=\phi_0^{\frac{n-3}{n-2}}=\Lambda^{\frac{n-3}{n-2}} \tag{15}$$

因此 $\Delta_g \bar{\phi}_0 = 0$. 从而

$$\frac{n-3}{4(n-2)} S_g \Lambda^{\frac{n-3}{n-2}} = \frac{n-3}{4(n-2)} \bar{\lambda} \Lambda^{\frac{n+1}{n-2}}$$

由(14)式可知

$$\bar{\lambda} = S_g \Lambda^{-\frac{4}{n-2}} = (n-1)(n-2) \frac{[r^2 + (1+\sqrt{1-r^2})^2]^2}{4r^2(1+\sqrt{1-r^2})^2} \Lambda^{-\frac{4}{n-2}}$$

即在球冠边界 ∂M 上，满足

$$\Delta_g \Lambda^{\frac{n-3}{n-2}} + \frac{n-3}{4(n-2)} S_g \Lambda^{\frac{n-3}{n-2}} = \frac{n-3}{4(n-2)} \bar{\lambda} \Lambda^{\frac{n+1}{n-2}}$$

其中

$$\bar{\lambda} = (n-1)(n-2) \frac{[r^2 + (1+\sqrt{1-r^2})^2]^2}{4r^2(1+\sqrt{1-r^2})^2} \Lambda^{-\frac{4}{n-2}}$$

我们将流形内部的几何性质与边界的几何性质相联系，提出了球冠上的 Yamabe 方程的一类边界条件，利用球面 Yamabe 方程的解，构造出球冠上相应边值问题的解. 这样的结果能否推广到一般的带边界流形以及如何推广，还有待进一步研究.

参考文献：

[1] YAMABE H. On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds [J]. Osaka Mathematical Journal, 1960, 12(1): 21-37.

[2] TRUDINGER N S. Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds [J]. Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa Class di Scienze, 1968, 22: 265-274.

[3] AUBIN T. Problèmes Isopérimétriques et Espaces de Sobolev [J]. Journal of Differential Geometry, 1976, 11(4): 573-598.

[4] SCHOEN R. Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature [J]. Journal Differential Geometry, 1984, 20(2): 479-495.

[5] LEE J M, PARKER T H. The Yamabe Problem [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1987, 17(1): 37-91.

[6] 赵盼盼，姚纯青，王新敬. 拟常曲率流形中具有常平均曲率的子流形 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(4): 30-34.

[7] 童燕，姚纯青，张瑞连. 拟常曲率空间中极小子流形的 Pinching 条件 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(2): 106-109.

[8] ESCOBAR J F. The Yamabe Problem on Manifolds with Boundary [J]. Journal Differential Geometry, 1992, 35(1): 21-84.

[9] BRENDLE S, CHEN S Y S. An Existence Theorem for the Yamabe Problem on Manifolds with Boundary [J]. Journal of the European Mathematical Society, 2014, 16(5): 991-1016.

[10] WANG X D. On Compact Riemannian Manifolds with Convex Boundary and Ricci Curvature Bounded from Below [J]. The Journal of Geometric Analysis, 2021, 31(4): 3988-4003.

[11] WANG X D. Uniqueness Results on Surfaces with Boundary [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2017, 56(3): 87.

[12] LEE J M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature [M]. New York: Spring-Verlag, 1997.

[13] PETERSEN P. Riemannian Geometry [M]. New York: Springer Verlag, 2006.

[14] AUBIN T. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry [M]. Berlin, Heidelberg: Spring-Verlag, 1998.

责任编辑 廖坤