DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.05.001

对流环境下具有混合迁移模式的捕食者-食饵模型分析①

张柏枫，　张国洪

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论了一个对流环境下捕食者和食饵种群具有不同迁移模式的捕食者-食饵模型.首先得到了系统的耗散性，然后分析了系统种群平衡态的存在性和稳定性，最后得到了系统种群一致持续的条件.研究表明在一定条件下，系统存在一个临界的流速，使得当流速小于此临界值时，系统是一致持续的，反之若流速大于此临界值则食饵种群将灭绝.数值模拟进一步发现对流对种群的空间分布格局也有重要影响.

关　键　词：捕食者-食饵模型；混合迁移模式；对流环境；稳定性；一致持续性

中图分类号：**O175**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2022)05-0001-09

Dynamic Analysis on a Predator-Prey Model with Mixed Migration Strategy in Advection Environments

ZHANG Baifeng,　ZHANG Guohong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a predator-prey model with mixed migration strategy has been discussed. Firstly, the dissipative property of the system is obtained, and then the existence and stability of the stationary states of the system are analyzed. Finally, we give the conditions that the system is uniformly persistent. Studies show that under certain conditions, there is a critical advection speed, which makes the system be uniformly persistent when the advection speed is less than this critical value, and conversely, if the advection speed is greater than this critical value, the prey will be extinct. Numerical simulation shows that advection has an important impact on the spatial distribution pattern of the population.

Key words: predator-prey model; mixed migration strategy; advection environments; stability; uniform persistence

捕食者-食饵系统是自然界普遍存在的一种生态系统.各种不同的捕食者-食饵动力学模型已经被提出来研究两个种群之间的相互关系[1].特别地，受亚得里亚海各种鱼类种群统计研究的启发，文献[2]提出了如下捕食者-食饵模型

① 收稿日期：2021-06-01
基金项目：国家自然科学基金项目(11871403).
作者简介：张柏枫，硕士研究生，主要从事动力系统的研究.
通信作者：张国洪，副教授，硕士研究生导师.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(r_1-u-av)\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v(r_2-v+cu)\end{cases}\tag{1}$$

其中：u 和 v 分别表示食饵和捕食者的密度；r_1 为食饵的增长率；a 和 c 表示捕食行为导致的种间相互作用；r_2 为正数时，表示捕食者的增长率，捕食者除食饵外还有其他的食物来源，r_2 为负数时，表示捕食者的死亡率，捕食者只依赖于食饵存活. 文献[3] 给出了模型(1) 的全局动力学性态，发现当共存平衡解存在时，则必然全局稳定. 考虑到种群的空间异质分布，文献[4] 在上述模型的基础上研究了考虑种群随机扩散条件下的反应扩散捕食者-食饵模型，发现其动力学行为和对应的 ODE 模型(1) 类似. 然而除了随机扩散外，许多物种还可能向某个方向定向迁移，如捕食者主动向食饵方向运动以追击猎物等，该类行为被称为趋饵性[5]；同时，在某些环境中种群也可能被动地进行定向运动，例如在河流生态系统中被单向流动的水流推动. 近年来对流(如河流) 环境下的单种群模型，两种群相互竞争模型的研究已成热点，研究表明对流的引入对系统的动力学行为有重要影响[6-8]. 为了研究对流环境对捕食者-食饵系统动力学行为的影响，本文在模型(1) 的基础上考虑如下反应扩散对流模型

$$\begin{cases}u_t=d_1u_{xx}-qu_x+u(r_1-u-av) & 0<x<l,\ t>0\\ v_t=d_2v_{xx}+v(r_2-v+cu) & 0<x<l,\ t>0\\ v_x(0)=v_x(l)=0 & t>0\\ d_1\,u_x(0)-q\,u(0)=0 & t>0\\ d_1\,u_x(l)-q\,u(l)=-bqu(l) & t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\ \not\equiv 0,\ v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\ \not\equiv 0 & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}\tag{2}$$

其中：u 和 v 分别表示食饵和捕食者的密度；l 是栖息地的长度；参数 d_1,d_2 为相应的扩散速度，q 为对流速度，均为正常数；$u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 分别表示食饵和捕食者的初始分布. 我们只考虑 r_2 为捕食者的增长率的情况，其他参数的意义与模型(1) 中的相同. 假设捕食者只做随机扩散，而食饵除随机扩散外还会朝某一个方向迁移. 这种现象在生态学中是可能存在的，例如捕食者是杂食性陆地动物并且傍河而居，而食饵是河流生物，或者在河流生态系统中，捕食者常居于流速为零的区域(河底) 而食饵常居于流速不为零的区域(河面). 由于捕食者只做随机扩散，所以边界条件 $v_x(0)=v_x(l)=0$ 表示没有任何捕食者可以通过栖息地的边界. 对于食饵的边界条件，$d_1u_x(0)-qu(0)=0$ 表示对流环境上游不允许食饵通过，$d_1u_x(l)-qu(l)=-bqu(l)$ 表示对流环境下游食饵的损失与对流速度相关，其中 $b\geqslant 0$ 是衡量对流作用导致食饵在下游产生损失数量的测度，详细的推导和生物意义可以参考文献[9].

1 系统的耗散性

为了使用抛物型方程的比较原理，我们将系统(2) 中食饵的边界条件变为常用的Robin边界条件. 取变换 $u(x,t)=\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}(x,t)$，$v(x,t)=\tilde{v}(x,t)$，将系统(2) 转换成如下等价系统

$$\begin{cases}\tilde{u}_t=d_1\tilde{u}_{xx}+q\tilde{u}_x+\tilde{u}(r_1-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}-a\tilde{v}) & 0<x<l,\ t>0\\ \tilde{v}_t=d_2\tilde{v}_{xx}+\tilde{v}(r_2-\tilde{v}+c\,\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}) & 0<x<l,\ t>0\\ \tilde{u}_x(0)=\tilde{v}_x(0)=\tilde{v}_x(1)=0 & t>0\\ d_1\,\tilde{u}_x(1)+bq\tilde{u}(1)=0 & t>0\\ \tilde{u}(x,0)=\tilde{u}_0(x)\geqslant 0,\ \not\equiv 0,\ \tilde{v}(x,0)=\tilde{v}_0(x)\geqslant 0,\ \not\equiv 0 & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}\tag{3}$$

易知系统(2) 和系统(3) 的解结构相同. 不失一般性，我们假设 $l=1$.

首先考虑单物种系统

$$\begin{cases}u_t=du_{xx}-qu_x+u(r-u) & 0<x<1,\ t>0\\ du_x(0)-qu(0)=0 & t>0\\ du_x(1)-qu(1)=-bqu(1) & t>0\\ u_0(x)\geqslant 0,\ \not\equiv 0 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{4}$$

其中 $d,q,r>0$ 且 $b\geqslant 0$. 当 $b\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，令 $\hat{q}=\sqrt{\frac{dr}{b(1-b)}}$；当 $b\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，令 $\hat{q}=\sqrt{4dr}$. 对于系统(4)的全局动态，根据文献[6]的定理 2.1(b)和文献[10]，有如下结论成立.

引理 1　设 $d,q,r>0$ 且 $b\geqslant 0$. 关于系统(4)有如下结论：

(i) 若 $b>0$，则存在 $q^*=q^*(d,r,b)\in(0,\hat{q})$，当 $q\in(0,q^*)$ 时，系统(4)存在唯一的正稳态解，记作 $\theta(d,q,r,b)$，并且是全局稳定的；当 $q\in[q^*,+\infty)$ 时，$u=0$ 是全局稳定的；

(ii) 若 $b=0$，则系统(4)存在唯一的正稳态解 $\theta(d,q,r)$，并且是全局稳定的.

引理 2　设 $d,q,r>0$ 且 $b\geqslant 0$. 若系统(4)的正稳态解 $\theta(d,q,r,b)$ 存在，则 $\theta(d,q,r,b)\leqslant r$.

证　首先 $\theta(d,q,r,b)$ 满足如下方程

$$\begin{cases}d\theta_{xx}-q\theta_x+\theta(r-\theta)=0 & 0<x<1\\ d\theta_x(0)-q\theta(0)=0 & \\ d\theta_x(1)-q\theta(1)=-bq\theta(1) & \end{cases}\tag{5}$$

当 $b\geqslant 1$ 时，由强极大值原理可知 $\theta(d,q,r,b)<r$. 现证当 $0\leqslant b<1$ 时，$\theta(d,q,r,b)\leqslant r$. 令 $\hat{\theta}=\frac{\theta_x}{\theta}$，则

$$\begin{cases}d\hat{\theta}_{xx}+(2d\hat{\theta}-q)\hat{\theta}_x-\theta\hat{\theta}=0 & 0<x<1\\ \hat{\theta}(0)=\frac{q}{d} & \\ \hat{\theta}(1)=(1-b)\frac{q}{d} & \end{cases}$$

当 $0<b<1$ 时，由强极大值原理，易知 $(1-b)\frac{q}{d}<\hat{\theta}<\frac{q}{d}$，并且当 $b=0$ 时，有 $\hat{\theta}=\frac{q}{d}$. 因为 $\hat{\theta}\geqslant(1-b)\frac{q}{d}$，则 $\theta_x>0$，故 $\theta(d,q,r,b)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，并在 $x=1$ 处取得最大值 M. 用反证法证明 $\theta(d,q,r,b)\leqslant r$，假设 $M>r$，将(5)式的第一个式子在 $[0,1]$ 上积分，得

$$\int_0^1\theta(r-\theta)\mathrm{d}x=bq\theta(1)\geqslant 0$$

显然，总存在 $x_1\in[0,1]$，使得 $\theta(x_1)=r$，并且当 $x\in[x_1,1]$ 时，总有 $\theta(d,q,r,b)\geqslant r$. 将(5)式的第一个式子在 $[x_1,1]$ 上积分，得

$$-bq\theta(1)-d\theta_x(x_1)+q\theta(x_1)+\int_{x_1}^1\theta(r-\theta)\mathrm{d}x=0$$

因为 $\int_{x_1}^1\theta(r-\theta)\mathrm{d}x<0$，故 $-bq\theta(1)-d\theta_x(x_1)+q\theta(x_1)>0$，移项变换有

$$\hat{\theta}(x_1)=\frac{\theta_x(x_1)}{\theta(x_1)}<\frac{q}{d}\left(1-\frac{\theta(1)}{\theta(x_1)}b\right)<(1-b)\frac{q}{d}$$

这与 $(1-b)\frac{q}{d}\leqslant\hat{\theta}$ 矛盾，假设不成立. 因此当 $0\leqslant b<1$ 时，$\theta(d,q,r,b)\leqslant r$. 证毕.

定理 1　设 $d_1,d_2,r_1,r_2>0$ 且 $b\geqslant 0$. 系统(2)存在唯一的正解 (u,v)，并且正解最终有界.

证　首先，根据文献[11]，系统(3)的解局部存在且唯一，则系统(2)的解也局部存在且唯一. 其次，由最大值原理，易知 $u>0$，$v>0$. 故只需证明解的有界性. 结合解的正性和系统(3)的第一个方程可得

$$\tilde{u}_t\leqslant d_1\tilde{u}_{xx}+q\tilde{u}_x+\tilde{u}(r_1-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}),\ 0<x<1,\ t>0$$

根据抛物型方程的比较原理可知 $\tilde{u}(x,t)\leqslant\overline{U}(x,t)$，其中 $\overline{U}(x,t)$ 满足如下方程

$$\begin{cases}\overline{U}_t=d_1\overline{U}_{xx}+q\overline{U}_x+\overline{U}(r_1-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\overline{U}) & 0<x<1,\ t>0\\ \overline{U}_x(0)=0,\ d_1\overline{U}_x(1)+bq\overline{U}(1)=0 & t>0\\ \overline{U}(x,0)=\tilde{u}_0(x) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{6}$$

通过变换 $U(x,t)=\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\overline{U}(x,t)$，得

$$\begin{cases}U_t = d_1 U_{xx} - qU_x + U(r_1 - U) & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ d_1 U_x(0) - qU(0) = 0,\ d_1 U_x(1) - qU(1) = -bqU(1) & t > 0 \\ U(x,0) = \mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\,\overline{U}(x,0) & 0 \leqslant x \leqslant 1\end{cases} \tag{7}$$

由引理 1,2 易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} U(x,t) \leqslant r_1$，故

$$\limsup_{t\to+\infty} \tilde{u}(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x} r_1$$

因此，存在正常数 ρ，使得 $0 < \tilde{u}(x,t) \leqslant \rho$. 再根据系统(3) 的第二个方程，有

$$\tilde{v}_t \leqslant d_2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{v}(r_2 - \tilde{v} + c\,\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\rho),\ x \in (0,1),\ t > 0$$

类似地，令 $\overline{V}(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\overline{V}_t = d_2 \overline{V}_{xx} + \overline{V}(r_2 + c\,\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\rho - \overline{V}) & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ \overline{V}_x(0) = \overline{V}_x(1) = 0 & t > 0 \\ \overline{V}(x,0) = \tilde{v}_0(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$$

不难得到 $\lim\limits_{t\to+\infty} \overline{V}(x,t) = r_2 + c\,\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\rho$，由比较原理有

$$\limsup_{t\to+\infty} \tilde{v}(x,t) \leqslant r_2 + c\,\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\rho$$

因为系统(2) 和等价系统(3) 的解结构相同，所以系统(2) 的解 (u,v) 最终有界. 证毕.

2 平衡点的稳定性

易见系统(2) 可能存在 3 个边界平衡态解 $(0,0)$，$(\theta(d_1,q,r_1,b),0)$ 和 $(0,r_2)$. 为了研究这些平衡解的稳定性，我们首先证明如下结论.

定理 2 设 $d_1, d_2, r_1, r_2 > 0$ 且 $b \geqslant 0$. 若 (u,v) 是系统(2) 的解，则 $\liminf\limits_{t\to+\infty} v(x,t) \geqslant r_2$.

证 由系统(2) 的第二个方程有

$$v_t \geqslant d_2 v_{xx} + v(r_2 - v),\ 0 < x < 1,\ t > 0$$

由比较原理易得 $\liminf\limits_{t\to+\infty} v(x,t) \geqslant r_2$. 证毕.

定理 2 表明平衡点 $(0,0)$ 和 $(\theta(d_1,q,r_1,b),0)$ 一定是不稳定的，下面来讨论 $(0,r_2)$ 的稳定性. 考察特征值问题

$$\begin{cases}d\phi_{xx} - q\phi_x + r\phi = \lambda\phi & 0 < x < 1 \\ d\phi_x(0) - q\phi(0) = 0 \\ d\phi_x(1) - q\phi(1) = -bq\phi(1)\end{cases} \tag{8}$$

其中：$d, q > 0$，$b \geqslant 0$ 且 $r \in \mathbb{R}$. 根据 Krein-Rutman 定理[15] 知问题(8) 存在主特征值 $\lambda_1(d,q,r,b)$，且对应的有严格正的特征函数 $\phi_1(d,q,r,b)$. 结合系统(4) 中的设定，根据文献[6] 的引理 2.1,2.2 和文献[12] 的命题 3.1，有下列结论成立.

引理 3 设 $d, q > 0$，$b \geqslant 0$ 且 $r \in \mathbb{R}$. 特征值问题(8) 有如下性质：

(i) 若 $d, r, b > 0$，则存在 $q^* = q^*(d,r,b) \in (0,\hat{q})$，当 $q \in (0,q^*)$ 时，$\lambda_1(d,q,r,b) > 0$，当 $q = q^*$ 时，$\lambda_1(d,q,r,b) = 0$，当 $q \in (q^*,+\infty)$ 时，$\lambda_1(d,q,r,b) < 0$；

(ii) 若 $r \leqslant 0$，则 $\lambda_1(d,q,r,b) \leqslant 0$，并且 $b = 0$ 时，$\lambda_1(d,q,r,0) = r$.

定理 3 设 $d_1, d_2, r_1, r_2, q > 0$ 且 $b \geqslant 0$. 平衡解 $(0,r_2)$ 的局部稳定性情况如下：

(H_1) 当 $r_1 > ar_2$ 时，若 $b > 0$，则存在 $q^*(d_1, r_1 - ar_2, b)$，使得 $q \in (0, q^*(d_1, r_1 - ar_2, b))$，$(0,r_2)$ 是不稳定的，$q \in (q^*(d_1, r_1 - ar_2, b), +\infty)$，$(0,r_2)$ 是局部渐进稳定的；

(H_2) 当 $r_1 > ar_2$ 时，若 $b = 0$，则 $(0,r_2)$ 是不稳定的；

(H_3) 当 $r_1 < ar_2$ 时，$(0,r_2)$ 是局部渐进稳定的.

证 系统(2) 在 $(0,r_2)$ 处线性化后的特征值问题如下

$$\begin{cases} d_1\varphi_{xx} - q\varphi_x + (r_1 - ar_2)\varphi = \lambda\varphi & 0 < x < 1 \\ d_2\psi_{xx} + cr_2\varphi - r_2\psi = \lambda\psi & 0 < x < 1 \\ \psi_x(0) = \psi_x(1) = 0 \\ d_1\varphi_x(0) - q\varphi(0) = 0 \\ d_1\varphi_x(1) - q\varphi(1) = -bq\varphi(1) \end{cases} \tag{9}$$

定义 Λ 为特征值问题(9) 的谱，显然 $\Lambda = \Lambda\{\varphi = 0\} \cup \Lambda\{\varphi \neq 0\}$. 当 $\varphi = 0$ 时，考察特征值问题

$$\begin{cases} d_2\psi_{xx} - r_2\psi = \lambda\psi & 0 < x < 1 \\ \psi_x(0) = \psi_x(1) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

可取特征函数 $\psi_1(x) = 1$，故主特征值 $\lambda_1 = -r_2 < 0$. 因此，对属于特征值问题(10) 的特征值 λ，都有 $\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_1 < 0$，则 $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda, \lambda \in \Lambda\{\varphi = 0\}\} < 0$. 当 $\varphi \neq 0$ 时，考察特征值问题

$$\begin{cases} d_1\varphi_{xx} - q\varphi_x + (r_1 - ar_2)\varphi = \lambda\varphi & 0 < x < 1 \\ d_1\varphi_x(0) - q\varphi(0) = 0 \\ d_1\varphi_x(1) - q\varphi(1) = -bq\varphi(1) \end{cases}$$

定义 $\sigma\left[d_1\dfrac{d^2}{dx^2} - q\dfrac{d}{dx} + r_1 - ar_2\right]$为算子 $d_1\dfrac{d^2}{dx^2} - q\dfrac{d}{dx} + r_1 - ar_2$ 的谱，则

$$\Lambda\{\varphi \neq 0\} \subseteq \sigma\left[d_1\frac{d^2}{dx^2} - q\frac{d}{dx} + r_1 - ar_2\right]$$

根据引理 3，当 $r_1 > ar_2$ 时，若 $b > 0$，则存在 $q^*(d_1, r_1 - ar_2, b)$，使得 $q \in (0, q^*(d_1, r_1 - ar_2, b))$，$\lambda_1(d_1, q, r_1 - ar_2, b) > 0$，则

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda, \lambda \in \Lambda\{\varphi = 0\} \cup \Lambda\{\varphi \neq 0\}\} > 0$$

所以$(0, r_2)$ 是不稳定的，$q \in (q^*(d_1, r_1 - ar_2, b), +\infty)$，$\lambda_1(d_1, q, r_1 - ar_2, b) < 0$，则

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda, \lambda \in \Lambda\{\varphi = 0\} \cup \Lambda\{\varphi \neq 0\}\} < 0$$

所以$(0, r_2)$ 是局部渐进稳定的，(H_1) 成立. 类似地，当 $r_1 > ar_2$ 时，若 $b = 0$，由引理 3，可知 $\lambda_1(d_1, q, r_1 - ar_2, b) = r_1 - ar_2 > 0$，$(0, r_2)$ 是不稳定的，(H_2) 成立. 当 $r_1 < ar_2$ 时，由引理 3，可知 $\lambda_1(d_1, q, r_1 - ar_2, b) < 0$，同样可得$(0, r_2)$ 是局部渐进稳定的，(H_3) 成立. 证毕.

由定理 3 可知$(0, r_2)$ 的局部稳定性，下面证明若$(0, r_2)$ 是局部稳定的，则$(0, r_2)$ 是全局吸引的，从而$(0, r_2)$ 也是全局稳定的.

定理 4　设 $d_1, d_2, r_1, r_2, q > 0$ 且 $b \geqslant 0$. 若条件

(C_1) $r_1 < ar_2$.

(C_2) $r_1 > ar_2$，$b > 0$，$q \in (q^*(d_1, r_1 - ar_2, b), +\infty)$.

之一成立，则平衡解$(0, r_2)$ 是全局稳定的.

证　由定理 2 有

$$\liminf_{t \to +\infty} \tilde{v}(x, t) \geqslant r_2 \tag{11}$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得当 $t \geqslant T$ 时，有 $\tilde{v}(x, t) \geqslant r_2 - \varepsilon$. 结合系统(3) 的第一个方程，有

$$\tilde{u}_t \leqslant d_1\tilde{u}_{xx} + q\tilde{u}_x + \tilde{u}(r_1 + a\varepsilon - ar_2 - \mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}),\ 0 < x < 1,\ t \geqslant T$$

现考虑如下方程

$$\begin{cases} \overline{U}_t = d_1\overline{U}_{xx} + q\overline{U}_x + \overline{U}(r_1 + a\varepsilon - ar_2 - \mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\overline{U}) & 0 < x < 1,\ t \geqslant T \\ \overline{U}_x(0) = 0,\ d_1\overline{U}_x(1) + bq\overline{U}(1) = 0 & t > T \\ \overline{U}(x, T) = \tilde{u}(x, T) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

由比较原理，可知当 $t \geqslant T$ 时，$\tilde{u}(x, t) \leqslant \overline{U}(x, t)$. 通过变换 $U(x, t) = \mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\overline{U}(x, t)$，得

$$\begin{cases} U_t = d_1U_{xx} - qU_x + U(r_1 + a\varepsilon - ar_2 - U) & 0 < x < 1,\ t \geqslant T \\ d_1U_x(0) - qU(0) = 0,\ d_1U_x(1) - qU(1) = -bqU(1) & t > T \\ U(x, T) = \mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}(x, T) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{12}$$

当(C_1) 成立时，取 ε 足够小，使得 $r_1 + a\varepsilon - ar_2 < 0$，再由引理 3 得 $\lambda_1(d_1, q, r_1 + a\varepsilon - ar_2, b) < 0$. 根

据文献[10]，系统(12)的解 $U=0$ 是全局稳定的当且仅当 $\lambda_1(d_1, q, r_1+a\varepsilon-ar_2, b)<0$，则

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde{u}(x, t)\leqslant\lim_{t\to+\infty}\overline{U}(x, t)=0$$

当(C_2)成立时，有 $r_1+a\varepsilon-ar_2>r_1-ar_2>0$，由引理 1 可知存在 $q^*(d_1, r_1+a\varepsilon-ar_2, b)$，使得当 $q\in[q^*(d_1, r_1+a\varepsilon-ar_2, b), +\infty)$ 时，系统(12)的解 $U=0$ 是全局稳定. 又因为(C_2)成立时，有 $q\in(q^*(d_1, r_1-ar_2, b), +\infty)$，并且 ε 是任意小的正常数，所以必有 $q\in[q^*(d_1, r_1+a\varepsilon-ar_2, b), +\infty)$，故

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde{u}(x, t)\leqslant\lim_{t\to+\infty}\overline{U}(x, t)=0$$

综上所述，若(C_1)和(C_2)其中一个成立，则对 $\forall\varepsilon_1>0$，总存在 $T_1>0$，使得当 $t\geqslant T_1$ 时，有 $\tilde{u}(x, t)\leqslant\varepsilon_1$. 结合系统(3)的第二个方程，当 $t\geqslant T_1$ 时，有

$$\tilde{v}\leqslant d_2\tilde{v}_{xx}+\tilde{v}(r_2-\tilde{v}+c\varepsilon_1\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}})$$

由比较原理易得

$$\limsup_{t\to+\infty}\tilde{v}(x, t)\leqslant r_2+c\varepsilon_1\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}} \tag{13}$$

再结合(11)式和(13)式，有

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde{v}(x, t)=r_2$$

可知$(0, r_2)$是全局吸引的，又因$(0, r_2)$的局部稳定性已知，所以结论成立.

3 系统的一致持续性

在这一节中，我们使用一致持续性理论来研究系统(2)的一致持续性条件，相关理论的详细介绍可以参考文献[13].

定理 5 设 $d_1, d_2, r_1, r_2, b>0$ 且 $r_1>ar_2$. 若 $q\in(0, q^*(d_1, r_1-ar_2, b))$，则系统(2)是一致持续的，即存在一个正常数 η，使得

$$\liminf_{t\to+\infty}u(x, t)\geqslant\eta,\ \liminf_{t\to+\infty}v(x, t)\geqslant\eta$$

证 定义 $P=\{(\tilde{u}, \tilde{v})\in C[0, 1]\times C[0, 1]: \tilde{u}\geqslant 0, \tilde{v}\geqslant 0\}$，$P_0=\{(\tilde{u}, \tilde{v})\in P: \tilde{u}(x)\not\equiv 0, \tilde{v}(x)\not\equiv 0\}$，$\partial P_0=P-P_0$；定义 $\Theta(t)$ 为系统(3)在空间 P 中解的半流. 由强极大值原理可知当$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$ 时，系统(3)的解$(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t))$满足 $\tilde{u}(x, t)>0$，$\tilde{v}(x, t)>0$，故 P_0 是 P 中的开集并且还是正向不变集. 显然，∂P_0 包含$(0, 0)$，$(\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b), 0)$和$(0, r_2)$；定义 $M_\partial=\{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in\partial P_0: \Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in\partial P_0, \forall t\geqslant 0\}$，$\gamma((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))$是正向轨$\{\Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0): t\geqslant 0\}$的极限集. 具体证明过程分为如下 4 步：

1) 证明 $\bigcup_{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in M_\partial}\gamma((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))=\{(0, 0), (\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b), 0), (0, r_2)\}$.

如上所述，对 $\forall(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in M_\partial$，有 $\Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in\partial P_0$，即对 $\forall t\geqslant 0$，有 $\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))\equiv 0$ 或 $\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))\equiv 0$. 当 $\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))\equiv 0$ 时，考虑如下方程

$$\begin{cases}\tilde{v}_t=d_2\tilde{v}_{xx}+\tilde{v}(r_2-\tilde{v}) & 0<x<1, t>0\\ \tilde{v}_x(0)=\tilde{v}_x(1)=0 & t>0\\ \tilde{v}(x, 0)=\tilde{v}_0(x)\geqslant 0, \not\equiv 0 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

易知 $\lim_{t\to+\infty}\tilde{v}(x, t)=r_2$. 当 $\tilde{v}\equiv 0$ 时，考虑如下方程

$$\begin{cases}\tilde{u}_t=d_1\tilde{u}_{xx}+q\tilde{u}_x+\tilde{u}(r_1-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}x}\tilde{u}) & 0<x<1, t>0\\ \tilde{u}_x(0)=0, d_1\tilde{u}_x(1)+bq\tilde{u}(1)=0 & t>0\\ \tilde{u}(x, 0)=\tilde{u}_0(x)\geqslant 0, \not\equiv 0 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

由引理 1 得 $\lim_{t\to+\infty}\tilde{u}(x, t)=\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b)$ 或 $\lim_{t\to+\infty}\tilde{u}(x, t)=0$. 证毕.

2) 证明$(0, 0)$是一个一致弱的排斥子，即对 $\forall(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，存在常数 $\sigma_1>0$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))-(0, 0)\|\geqslant\sigma_1 \tag{14}$$

使用反证法，假设(14)式不成立，则对 $\forall\sigma>0$，存在一个$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，使得 $\limsup_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0,$

$\tilde{v}_0))-(0,0)\| < \sigma$，故存在 $t_1>0$，使得对 $\forall t \geqslant t_1$，有 $\|\tilde{u}(x,t,(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))\| < \sigma$，$\|\tilde{v}(x,t,(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))\| < \sigma$. 结合系统(3)的第二个方程，有

$$\tilde{v}_t \geqslant d_2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{v}(r_1-\sigma),\ x\in(0,1),\ t\geqslant t_1$$

因为$(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\in P_0$，由最大值原理，可知 $\tilde{v}(x,t_1)>0$. 令$\underline{v}(x,t)$是下列方程的解

$$\begin{cases}\underline{v}_t = d_1\underline{v}_{xx} + \underline{v}(r_1-\sigma) & x\in(0,1),\ t\geqslant t_1\\ \underline{v}_x(0)=\underline{v}_x(1)=0 & t\geqslant t_1\\ \underline{v}(x,t_1)=\alpha>0\end{cases}\tag{15}$$

这里的 $\alpha<\tilde{v}(x,t_1)$. 根据比较原理，当 $t\geqslant t_1$ 时，$\tilde{v}(x,t)\geqslant\underline{v}(x,t)$. 很明显$\underline{v}(x,t)=\alpha\mathrm{e}^{(r_1-\sigma)(t-t_1)}$是方程(15)的解. 使$\sigma$ 足够小以至于$r_1-\sigma>0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{v}(x,t,(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))=+\infty$，这与假设矛盾. 因此，假设不成立，$\{(0,0)\}$是 P 中孤立的不变集. 另外，通过类似的推导，可以证得$\{(\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1,q,r_1,b),0)\}$是 P 中孤立的不变集，这里不再赘述.

3）证明$(0,r_2)$是一致弱的排斥子，即对 $\forall(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\in P_0$，存在常数$\sigma_2>0$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))-(0,r_2)\|\geqslant\sigma_2\tag{16}$$

使用反证法，假设(16)式不成立，则对 $\forall\sigma>0$，存在一个$(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\in P_0$，使得$\limsup\limits_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))-(0,r_2)\|<\sigma$，故存在 $t_2>0$，使得对 $\forall t\geqslant t_2$，有 $\|\tilde{u}(x,t,(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))\|<\sigma$，$\|\tilde{v}(x,t,(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))-r_2\|<\sigma$. 易知对 $\forall t\geqslant t_2$，系统(2)的解$(u(x,t),v(x,t))$满足 $\|u(x,t,(u_0,v_0))\|<\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma$，$\|v(x,t,(u_0,v_0))-r_2\|<\sigma$. 结合系统(2)的第一个方程，有

$$\begin{cases}u_t\geqslant d_1u_{xx}-qu_x+u(r_1-ar_2-a\sigma-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma) & 0<x<1, t\geqslant t_2\\ d_1u_x(0)-qu(0)=0,\ d_1u_x(1)-qu(1)=-bqu(1) & t\geqslant t_2\end{cases}\tag{17}$$

使用合适的变量替换，再由比较原理可得对 $\forall t\geqslant t_2$，有 $u(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t)$. 其中，$\underline{u}(x,t)$满足如下方程

$$\underline{u}_t=d_1\underline{u}_{xx}-q\underline{u}_x+\underline{u}(r_1-ar_2-a\sigma-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma),\ 0<x<1,\ t\geqslant t_2$$

定义 $\mu_1^\sigma=\lambda_1(d_1,q,r_1-ar_2-a\sigma-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma,b)$，并且对应的特征函数为$\omega_1(x)>0$. 令$\underline{u}$ 满足如下方程

$$\begin{cases}\underline{u}_t=d_1\underline{u}_{xx}-q\underline{u}_x+\underline{u}(r_1-ar_2-a\sigma-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma) & 0<x<1, t\geqslant t_2\\ d_1\underline{u}_x(0)-q\underline{u}(0)=0,\ d_1\underline{u}_x(1)-q\underline{u}(1)=-bq\underline{u}(1) & t\geqslant t_2\\ \underline{u}(x,t_2)=\alpha_1\omega_1(x) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{18}$$

易知$\underline{u}(x,t)=\alpha_1\mathrm{e}^{\mu_1^\sigma(t-t_2)}\omega_1(x)$是方程(18)的解. 其中，$\alpha_1>0$ 并且满足 $u(x,t_2)\geqslant\alpha_1\omega_1(x)$，故对 $\forall t\geqslant t_2$，有

$$u(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t)=\alpha_1\mathrm{e}^{\mu_1^\sigma(t-t_2)}\omega_1(x)$$

因为 $q\in(0,q^*(d_1,r_1-ar_2,b))$，$\lambda_1(d_1,q,r_1-ar_2,b)>0$. 让$\sigma$ 足够小，使得 $\mu_1^\sigma=\lambda_1(d_1,q,r_1-ar_2-a\sigma-\mathrm{e}^{\frac{q}{d_1}}\sigma,b)>0$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=+\infty$，这与假设矛盾. 因此，假设不成立，$\{(0,r_2)\}$是 P 中孤立的不变集.

4）定义连续函数 D：$P\longrightarrow[0,+\infty)$，对 $\forall(\tilde{u},\tilde{v})\in P$

$$D((\tilde{u},\tilde{v}))=\min\{\min_{x\in[0,1]}\tilde{u}(x),\ \min_{x\in[0,1]}\tilde{v}(x)\}$$

由比较原理可知 $D^{-1}(0,+\infty)\subseteq P_0$. 当 $D((\tilde{u},\tilde{v}))>0$ 或者$(\tilde{u},\tilde{v})\in P_0$ 且 $D((\tilde{u},\tilde{v}))=0$ 时，有$D(\Theta(t)(\tilde{u},\tilde{v}))>0$. 根据文献[13]，称 D 是半流$\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 的一个距离函数.

由定理 1，可知$\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 是点耗散的，又由于扩散算子的光滑性，易知半流$\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 是紧的. 根据文献[14]的定理 2.6，$\Theta(t)$存在一个全局的吸引子，吸引 P 中任意一个有界集. 因为$(0,0)$，$(\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1,q,r_1,b),0)$和$(0,r_2)$是一致弱的排斥子，并且它们在 P 中是孤立的，即

$$W^S((\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1,q,r_1,b),0))\cap D^{-1}(0,+\infty)=\varnothing$$
$$W^S((0,0))\cap D^{-1}(0,+\infty)=\varnothing,\ W^S((0,r_2))\cap D^{-1}(0,+\infty)=\varnothing$$

$W^S((\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b), 0))$，$W^S((0, 0))$ 和 $W^S((0, r_2))$ 是对应于 $(\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b), 0)$，$(0, 0)$ 和 $(0, r_2)$ 的稳定集. 因此，$\{(0, 0) \cup (\mathrm{e}^{-\frac{q}{d_1}x}\theta(d_1, q, r_1, b), 0) \cup (0, r_2)\}$ 的子集不能在 ∂P_0 中形成环. 根据文献[13] 的定理 3，总存在正常数 η，使得对 $\forall (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$，有

$$\min_{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \gamma((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))} D((\tilde{u}, \tilde{v})) > \eta$$

因此对 $\forall (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$，存在一个正常数 η 使得 $\liminf\limits_{t \to +\infty} u(x, t) \geqslant \eta$，$\liminf\limits_{t \to +\infty} v(x, t) \geqslant \eta$，结论成立. 证毕.

类似地，可以使用一致持续性理论得到系统(2) 在 $b = 0$ 时的一致持续性，证明省略.

定理 6 设 $d_1, d_2, r_1, r_2, q > 0$ 且 $r_1 > ar_2$. 若 $b = 0$，则系统(2) 是一致持续的，即存在正常数 η，使得

$$\liminf_{t \to +\infty} u(x, t) \geqslant \eta, \quad \liminf_{t \to +\infty} v(x, t) \geqslant \eta$$

4 数值模拟

本节首先通过数值模拟验证我们的理论研究结果. 取定参数

(I) $d_1 = 0.15$，$d_2 = 0.1$，$r_1 = 4$，$r_2 = 3$，$a = 0.5$，$c = 0.2$，$l = 10$.

此时 $r_1 > ar_2$，当 $b = 0$ 时，由图 1(a) 可知，系统对任意的 $q > 0$ 都是一致持续的，该结果与定理 6 相符；当 $b = 1$ 时，由图 1(b) 可知，存在一个临界的流速，使得当流速小于此临界值时，系统是一致持续的，当流速大于此临界值时，捕食者种群平均密度是 3，食饵种群将会灭绝，该结果与定理 4 和定理 5 相符.

(II) $d_1 = 0.15$，$d_2 = 0.1$，$r_1 = 1$，$r_2 = 3$，$a = 0.5$，$c = 0.2$，$l = 10$.

此时 $r_1 > ar_2$，由图 1(c) 可知，对任意的 $q > 0$ 和 $b = 0.1$，捕食者种群平均密度总是 3，食饵种群总会灭绝，该结果与定理 4 相符.

其次，我们通过数值模拟研究了不同流速对种群空间分布的影响. 选择参数组(I)，当 $b = 0$ 时，种群是一致持续的. 但由图 2 可知，随着流速变大，种群的空间分布会发生变化，且随着流速增加食饵种群会聚集在河流的下游，由于可用资源减少，使得种群总的数量降低，因此对流的增加不利于种群的繁衍.

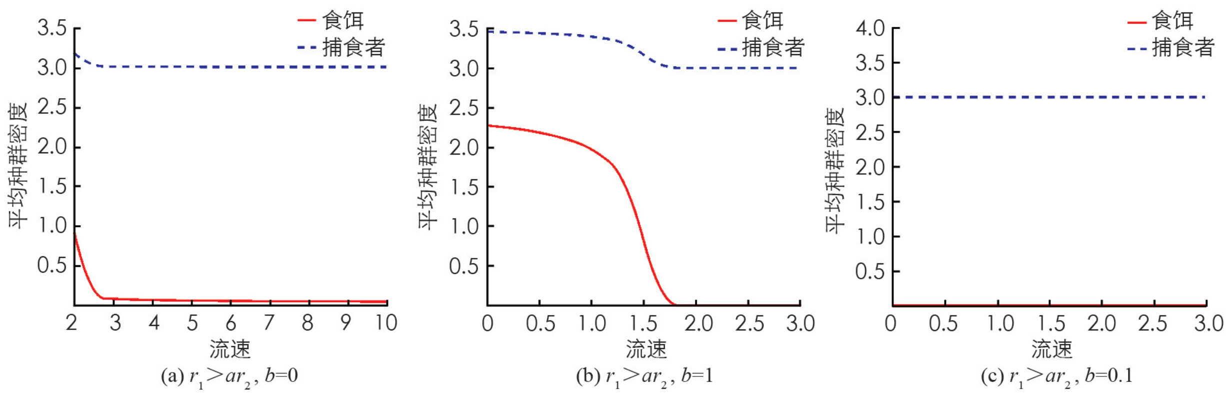

图 1 系统(2)关于流速 q 的分支图

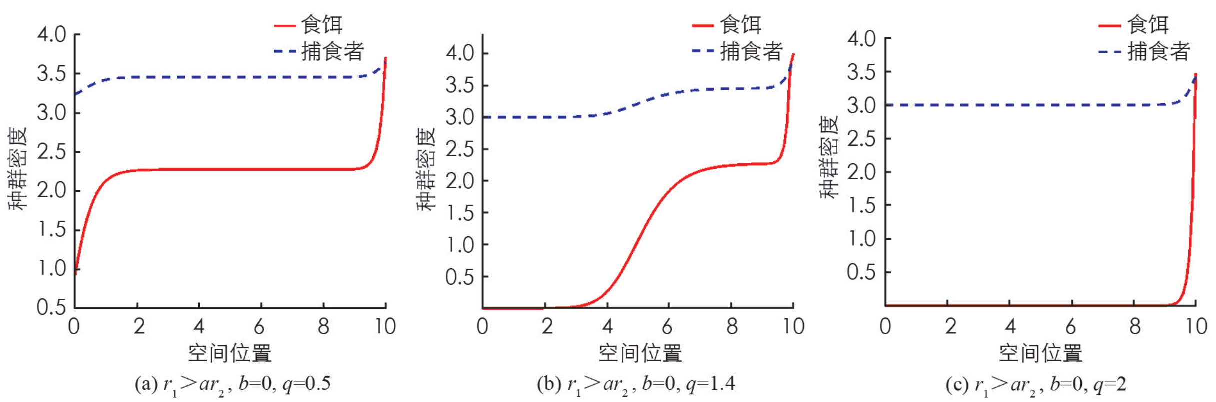

图 2 b=0 时不同流速下的种群密度分布图

参考文献：

[1] DU Y，SHI J P. Some Recent Results on Diffusive Predator-Prey Models in Spatially Heterogeneous Environment [M]// BRUNNER H，ZHAO X Q，ZOU X F. Nonlinear Dynamics and Evolution Equations. New York：Springer，2006.

[2] VOLTERRA V. Fluctuations in the Abundance of a Species Considered Mathematically1 [J]. Nature，1926，118(2972)：558-560.

[3] BRAUER F，CASTILLO-CHAVEZ C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology [M]. New York：Springer，2012.

[4] LEUNG A. Limiting Behaviour for a Prey-Predator Model with Diffusion and Crowding Effects [J]. Journal of Mathematical Biology，1978，6(1)：87-93.

[5] FLAXMAN S M，LOU Y. Tracking Prey or Tracking the Prey's Resource? Mechanisms of Movement and Optimal Habitat Selection by Predators [J]. Journal of Theoretical Biology，2009，256(2)：187-200.

[6] LOU Y，ZHOU P. Evolution of Dispersal in Advective Homogeneous Environment：The Effect of Boundary Conditions [J]. Journal of Differential Equations，2015，259(1)：141-171.

[7] LAM K Y，LOU Y，LUTSCHER F. Evolution of Dispersal in Closed Advective Environments [J]. Journal of Biological Dynamics，2015，9(sup1)：188-212.

[8] LOU Y，LUTSCHER F. Evolution of Dispersal in Open Advective Environments [J]. Journal of Mathematical Biology，2014，69(6-7)：1319-1342.

[9] LUTSCHER F，LEWIS M A，MCCAULEY E. Effects of Heterogeneity on Spread and Persistence in Rivers [J]. Bulletin of Mathematical Biology，2006，68(8)：2129-2160.

[10] CANTRELL R S，COSNER C. Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations [M]. Chichester：Wiley，2004.

[11] SMOLLER J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations [M]. New York：Springer，1994.

[12] WANG Y，SHI J P，WANG J F. Persistence and Extinction of Population in Reaction-Diffusion-Advection Model with Strong Allee Effect Growth [J]. Journal of Mathematical Biology，2019，78(7)：2093-2140.

[13] SMITH H L，ZHAO X Q. Robust Persistence for Semidynamical Systems [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2001，47(9)：6169-6179.

[14] MAGAL P，ZHAO X Q. Global Attractors and Steady States for Uniformly Persistent Dynamical Systems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，2005，37(1)：251-275.

[15] KREIN M G，RUTMAN M A. Linear Operators Leaving Invariant a Cone in Banach Space [J]. Uspekhi Mat Nauk，1962，10(1)：3-95.

责任编辑　张构