第 47 卷 第 5 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 5 月
Vol. 47 No. 5 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) May 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.05.003

一个种群与环境资源相互作用模型的有限差分逼近[①]

王文静， 靳欢欢， 黄启华

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：本文建立并研究了一个种群与资源相互作用的数学模型. 该模型由一个一阶双曲偏微分方程和一个微分－积分方程耦合而成，其中双曲方程描述了受资源影响的大小结构、种群的生长和死亡过程；微分－积分方程描述了资源的输入、衰减以及种群对资源的消耗过程. 通过对模型进行离散化，建立了模型的隐式有限差分逼近格式，证明了有限差分逼近的收敛性及模型弱解的存在唯一性.

关 键 词：种群；资源；有限差分；存在唯一性

中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：1000－5471(2022)05－0022－09

Finite Difference Approximation for a Model of Interaction Between Population and Environmental Resources

WANG Wenjing， JIN Huanhuan， HUANG Qihua

Department of Computer, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a mathematical model for the interaction between a population and a resource has been established and studied. The model is composed of a first order hyperbolic partial differential equation coupled with an integral differential equation. The hyperbolic equation describes the growth and death processes of the size-structured population under the influence of the resources. By discretizing the model, an implicit finite-difference approximation scheme of the model has been established, the convergence of the finite-difference approximation and the existence and uniqueness of the weak solution of the model been proved.

Key words: population; resource; finite difference approximation; existence and uniqueness

从环境和自然发展的角度来看，研究种群和自然资源之间相互依赖的关系是很有意义的. 许多科研工作者建立并研究了一系列描述种群与资源相互作用的数学模型，例如：文献[1-2]研究了微生物在培养皿中

① 收稿日期：2021－05－21

基金项目：国家自然科学基金项目(No. 11871060).

作者简介：王文静，硕士研究生，主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者：黄启华，教授，博士研究生导师.

对单一营养物质竞争的数学理论；文献[3-7]建立并研究了恒化器中两个物种竞争同一种资源的竞争模型. 值得注意的是，上述模型都是由常微分方程组给出，其中包含的种群的所有个体被假定是相同的. 然而，现实中同一种群的不同个体由于年龄、大小等方面的差异会导致不同个体之间存在不同的出生率、增长率、死亡率[8-12]，而且不同个体消耗资源的能力以及受资源影响的程度也可能是不同的. 因此在本文中，我们建立并研究一个大小结构的种群和资源相互作用的数学模型.

考虑一个大小结构的种群和资源的相互作用. 用 $u(x,t)$ 表示大小为 x 的个体在 t 时刻的密度，其中 $x\in[x_{\min},x_{\max}]$，$\int_{x_1}^{x_2}u(x,t)\mathrm{d}t$ 代表在 t 时刻大小在 x_1 和 x_2 之间的个体数量. 用 $R(t)$ 表示在 t 时刻的资源密度. 一个描述种群和资源之间相互作用的数学模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\dfrac{\partial}{\partial x}[g(x,R(t))u(x,t)]=-d(x,R(t))u(x,t)\\
\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=h-qR-\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}f(x,R)u(x,t)\mathrm{d}x\\
g(x_{\min},R(t))u(x_{\min},t)=\displaystyle\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\beta(x,R(t))u(x,t)\mathrm{d}x\\
u(x,0)=u^0(x)\\
R(0)=R_0
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中：第一个方程描述了种群在资源影响下增长和死亡的过程，函数 $g(x,R)$ 表示环境资源为 R 时，大小为 x 的个体的增长率，$d(x,R)$ 表示环境资源为 R 时，大小为 x 的个体的死亡率；第二个方程描述了资源的输入、衰减以及种群对资源的消耗，参数 h 表示资源的输入率，q 表示资源的衰减系数，积分项 $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}f(x,R)u(x,t)\mathrm{d}x$ 表示所有个体对资源的总消耗率，$f(x,R)$ 表示依赖于大小的功能反应函数，即假设不同大小的个体有不同的摄取资源的能力. 假设函数 $f(x,R)$ 满足以下条件：$f(x,0)=0$，它是关于 R 的增函数且有上界. 一个典型的功能函数的例子为如下的 Holling-II 形式：

$$f(x,R)=\frac{c(x)R}{H+R}$$

其中 $c(x)$ 是摄取率，H 是半饱和常数. 模型的第三个方程为对应于第一个方程的边界条件，描述了种群在资源影响下的出生过程，其中函数 β 是资源为 R 时，大小为 x 的个体的繁殖率. 在模型的最后两个等式中，$u^0(x)$ 是初始种群密度，R_0 是资源的初始值.

1　弱解和有限差分

定义 1　若一个区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，其上的一个映射 $u:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$，并且我们在区间 I 上作 $N+1$ 个分点 x_i，有 $x_0<x_1<\cdots<x_N$. 定义 u 的全变差(total variation)为 Tot. Var. $\{u\}\doteq\sup\left\{\sum_{i=1}^{N}|u(x_i)-u(x_{i-1})|\right\}$，如果 u 是有界的，则称 u 有有界变差(bounded variation)，根据英文首字母缩写，简记为 $u\in I_{BV}$.

设 $D=[x_{\min},x_{\max}]\times[0,\infty)$，并且 c 是足够大的正常数. 假设模型(1)中的参数满足下面条件：

(A1) $g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ 是关于 x 和 R 的带有 Lipschitz 常数 L 的 Lipschitz 函数，满足 $\sup\limits_{(x,R(t))\in D}g(x,R(t))\leqslant c$. 并且，当 $x\in[x_{\min},x_{\max})$ 时，$g(x,R(t))>0$，$g(x_{\max},R(t))=0$. $g_x(x,R(t))$ 是关于 x 和 R 的 Lipschitz 常数为 L 的 Lipschitz 函数.

(A2) $d:D\longrightarrow\mathbb{R}$ 是关于 x 和 R 的 Lipschitz 常数为 L 的 Lipschitz 函数，并且 $\sup\limits_{(x,R(t))\in D}d(x,R(t))\leqslant c$.

(A3) $\beta:D\longrightarrow\mathbb{R}$ 是关于 x 和 R 的 Lipschitz 常数为 L 的 Lipschitz 函数，并且 $\sup\limits_{(x,R(t))\in D}\beta(x,R(t))\leqslant c$.

(A4) $R:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ 上界为 c 的非负连续函数.

(A5) $u^0\in BV[x_{\min},x_{\max}]$ 且 $u^0(x)\geqslant0$.

(A6) $R_0 \in BV[x_{\min}, x_{\max}]$ 且 $R_0(x) \geqslant 0$.

仿照文献[13],将模型(1)中的第一个方程乘 $\varphi(x, t)$,再通过分部积分并利用初始条件和边界条件,定义模型(1)的弱解如下:

定义 2 一个函数 $u \in I_{BV}([x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T])$,如果满足以下条件就称为模型(1)的弱解:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u(x, t)\varphi(x, t)\mathrm{d}x - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u^0(x)\varphi(x, 0)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^t \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u(\varphi_\tau + g\varphi_x - \mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t \varphi(x_{\min}, \tau)\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \beta u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$R(t) = ht - \int_0^t R(\tau)q\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, R)u(x, \tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

其中 $\varphi \in C^1((x_{\min}, x_{\max}) \times (0, T))$.

我们将区间$[x_{\min}, x_{\max}]$和$[0, T]$分别分成 n 和 l 个子区间. 本文令 $\Delta x = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{n}$ 和 $\Delta t = \frac{T}{l}$ 分别表示大小和时间的区间长度. 区间点由:$x_j = x_{\min} + j\,\Delta x$, $j = 0, 1, \cdots, n$;$t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \cdots, l$ 给出. 用 u_j^k 表示 $u(x_j, t_k)$ 的有限差分逼近,设

$$g_j^k = g(x_j, R(t_k)),\ d_j^k = d(x_j, R(t_k)),\ \beta_j^k = \beta(x_j, R(t_k)),\ R^k = R(t_k),\ f_j^k = f(x_j, R(t_k))$$

定义差分算子

$$D_{\Delta x}^{-}(u_j^k) = \frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{\Delta x},\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

及 u_j^k 的 ℓ^1 范数和 ℓ^∞ 范数为

$$\| u^k \|_1 = \sum_{j=1}^{n} | u_j^k | \Delta x,\ \| u^k \|_\infty = \max_j | u_j^k |$$

使用隐式有限差分格式,对系统进行如下的离散化:

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{g_j^k u_j^{k+1} - g_{j-1}^k u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} + d_j^k u_j^{k+1} = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ &\frac{R^{k+1} - R^k}{\Delta t} = h - q^k R^k - \sum_{j=1}^{n} f(x_j, R^k)u_j^{k+1}\Delta x \\ &g_0{}^k u_0^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^k u_j^k \Delta x \end{aligned} \tag{2}$$

初始条件为

$$u_0^0 = u^0(0),\ u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} u^0(x)\mathrm{d}x,\ j = 1, 2, \cdots, n$$

$$v_j^k = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} g_j^k + \Delta t d_j^k,\ j = 1, 2, \cdots, n$$

令$\vec{\boldsymbol{u}}^{k+1} = [u_0^{k+1}, u_1^{k+1}, \cdots, u_n^{k+1}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$,则差分格式(2)可表示成如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}^k \vec{\boldsymbol{u}}^{k+1} = \vec{\boldsymbol{f}}^k \tag{3}$$

这里$\vec{\boldsymbol{f}}^k = \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j^k u_j^k \Delta x, u_1^k, \cdots, u_n^k\right]^{\mathrm{T}}$,并且 $\boldsymbol{A}^k$ 是如下三角矩阵:

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} g_0^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} g_0^k & v_1^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta t}{\Delta x} g_1^k & v_2^k & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\Delta t}{\Delta x} g_{n-1}^k & v_n^k \end{pmatrix}$$

$$R^{k+1}=\Delta th-\Delta tR^{k+1}q-\Delta t\sum_{j=1}^{n}f(x_j,R^{k+1})u_j^{k+1}\Delta x+R^k$$

$$g_0^k u_0^{k+1}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\ \Delta x \tag{4}$$

引理 1　假设 Δt 选择得足够小，使得 $2c\Delta t\leqslant 1$. 那么线性系统(3),(4)有唯一的非负解.

证　由于 Δt 选择得足够小，使得 $2c\Delta t\leqslant 1$，很明显 $\mathbf{A}_1^k$ 的对角元素是正的，而次对角元素是非正的. 事实上，$v_1^k\geqslant\dfrac{1}{2}$. 剩下部分的证明过程类似文献[14]中的定理 7.2，此处省略.

2　有限差分逼近的估计

首先证明差分逼近在 l^1 空间的范数是有界的.

引理 2　假设引理 1 成立，则存在一个正常数 B_1，使得 $\|u^k\|_1+|R^k|\leqslant B_1$.

证　将(2)式的第一个等式左右两边乘 Δx，并将 $j=1,\cdots,n$ 对应的各式相加，有

$$\|u^{k+1}\|_1(1+c\Delta t)+\left(g_n^k u_n^{k+1}-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x\right)\Delta t\leqslant\|u^k\|_1 \tag{5}$$

用类似的方式处理(2)式的第二个等式，有

$$R^{k+1}(1+c\Delta t)\leqslant R^k+h\Delta t \tag{6}$$

现在令 $S^k=\|u^k\|_1+|R^k|$ 并且将(5)式和(6)式相加，有

$$\begin{aligned}S^{k+1}(1+c\Delta t)&\leqslant S^k+h\Delta t+(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x-g_n{}^k\,u_n{}^{k+1})\Delta t\leqslant\\&S^k+h\Delta t+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x\ \ \Delta t+|R^k|\leqslant\\&S^k(1+\max_j\{\beta_j^k\}\Delta t)+h\Delta t\leqslant S^k(1+c\Delta t)+h\Delta t\end{aligned}$$

再证明差分逼近在 l^∞ 空间的范数是有界的.

引理 3　假设引理 1 成立，则存在一个正常数 B_2，使得 $\|u^k\|_\infty\leqslant B_2$.

证　设 $u_{j_0}^{k+1}=\max\limits_j u_j^{k+1}$. 如果 $j_0=0$，则利用(2)式的第三个等式，可得

$$u_{j_0}^{k+1}\leqslant\frac{\max\limits_j\beta_j^k\sum\limits_{j=1}^{n}u_j^k\Delta x}{g_0^k}\leqslant\frac{cB_1}{\min\limits_{R\in[0,B_1]}g(x_{\min},R)} \tag{7}$$

如果 $1\leqslant j_0\leqslant n$，则利用(2)式的第一个等式，可得

$$\frac{u_{j_0}^{k+1}-u_{j_0}^k}{\Delta t}+d_{j_0}^k u_{j_0}^{k+1}\leqslant\frac{u_{j_0}^{k+1}-u_{j_0}^k}{\Delta t}+\frac{g_{j_0}^k u_{j_0}^{k+1}-g_{j_0-1}^k u_{j_0-1}^{k+1}}{\Delta x}+d_{j_0}^k u_{j_0}^{k+1}=0 \tag{8}$$

因此有 $(1+c\Delta t)u_{j_0}^{k+1}\leqslant u_{j_0}^k$，这意味着

$$\|u^{k+1}\|_\infty\leqslant\left(\frac{1}{1+c\ \Delta t}\right)^{k+1}\|u^0\|_\infty \tag{9}$$

根据(7)—(9)式，我们有

$$\|u^{k+1}\|_\infty\leqslant\max\left\{\left(\frac{1}{1+c\Delta t}\right)^{k+1}\|u^0\|_\infty,\ \frac{cB_1}{\min\limits_{R\in[0,B_1]}g(x_{\min},R)}\right\}$$

因此存在正常数 B_2，使得 $\|u^{k+1}\|_\infty\leqslant B_2$.

下一个引理证明了近似 u_j^k 具有有界的全变差. 在建立模型(1)的弱解的差分逼近收敛的过程中，这个界起着重要作用.

引理 4　假设引理 1 成立，则存在一个正常数 B_3，使得 $\|D_{\Delta x}^-(u^k)\|_1\leqslant B_3$.

证 设 $\eta_j^k = D_{\Delta x}^{-}(u_j^k)$ 并且将算子 $D_{\Delta x}^{-}$ 运用到(2)式的第一个等式得到

$$\frac{\eta_j^{k+1}-\eta_j^k}{\Delta t}+D_{\Delta x}^{-}\left(\frac{g_j^k u_j^{k+1}-g_{j-1}^k u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}\right)+D_{\Delta \mu}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})=0,\ 2\leqslant j\leqslant n \tag{10}$$

另一方面,如果 $j=1$,那么

$$\frac{\eta_1^{k+1}-\eta_1^k}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{u_1^{k+1}-u_0^{k+1}}{\Delta x}-\frac{u_1^k-u_0^k}{\Delta x}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u_1^{k+1}-u_1^k}{\Delta t}-\frac{u_0^{k+1}-u_0^k}{\Delta t}\right)$$

因此,由(2)式的第一个等式有

$$\frac{\eta_1^{k+1}-\eta_1^k}{\Delta t}=-\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u_0^{k+1}-u_0^k}{\Delta t}+D_{\Delta x}^{-}(g_1^k u_1^{k+1})+d_1^k u_1^{k+1}\right) \tag{11}$$

将(10)式乘 $\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x$,再将 $j=2,\cdots,n$ 对应的各式相加,并且注意到 $-\eta_j^k\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\geqslant-|\eta_j^k|$,则有

$$\frac{|\eta_j^{k+1}|-|\eta_j^k|}{\Delta t}\Delta x+\left[D_{\Delta x}^{-}\left(\frac{g_j^k u_j^{k+1}-g_{j-1}^k u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}\right)+D_{\Delta x}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})\right]\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\ \Delta x\leqslant 0$$

其中 $2\leqslant j\leqslant n$. 为了记号的方便,令 $d_0^k=0$ 和 $D_{\Delta x}^{-}(g_0^k u_0^{k+1})=-\dfrac{u_0^{k+1}-u_0^k}{\Delta t}$,将(11)式乘 $\mathrm{sgn}(\eta_1^{k+1})\Delta x$ 并与(10)式相加,得到

$$\frac{|\eta_1^{k+1}|-|\eta_1^k|}{\Delta t}\Delta x+\left[D_{\Delta x}^{-}\left(\frac{g_1^k u_1^{k+1}-g_0^k u_0^{k+1}}{\Delta x}\right)+D_{\Delta x}^{-}(d_1^k u_1^{k+1})\right]\mathrm{sgn}(\eta_1^{k+1})\Delta x\leqslant 0$$

将 $j=1,2,\cdots,n$ 对应的各式相加,得到

$$\frac{\|\eta^{k+1}\|_1-\|\eta^k\|_1}{\Delta t}+\sum_{j=1}^{n}[D_{\Delta x}^{-}(D_{\Delta x}^{-}(g_j^k u_j^{k+1}))+D_{\Delta x}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})]\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x\leqslant 0 \tag{12}$$

容易得到

$$\sum_{j=1}^{n}D_{\Delta x}^{-}(D_{\Delta x}^{-}(g_j^k u_j^{k+1}))\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\ \Delta x\geqslant|g_n^k\eta_n^{k+1}|+\frac{u_0^{k+1}-u_0^k}{\Delta t}\mathrm{sgn}(\eta_1^{k+1}) \tag{13}$$

由不等式(12)和(13),得到

$$\begin{aligned}\frac{\|\eta^{k+1}\|_1-\|\eta^k\|_1}{\Delta t}&\leqslant-\sum_{j=1}^{n}D_{\Delta x}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x-|g_n^k\eta_n^{k+1}|-\frac{u_0^{k+1}-u_0^k}{\Delta t}\mathrm{sgn}(\eta_1^{k+1})\leqslant\\&-\sum_{j=1}^{n}D_{\Delta x}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})\mathrm{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x-|g_n^k\eta_n^{k+1}|+\left|\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x}{g_0^k}-\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{k-1}u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|\end{aligned}$$

另外,注意到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x}{g_0^k}-\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{k-1}u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|\leqslant\left|\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^k\Delta x}{g_0^k}-\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|+\\&\left|\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^k u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}-\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{k-1}u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|\leqslant\\&\beta_j^k\left|\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}u_j^k\ \Delta x}{g_0^k}-\dfrac{\sum_{j=1}^{n}u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|+\frac{\sum_{j=1}^{n}u_j^{k-1}\Delta x}{g_0^{k-1}}\left|\frac{\beta_j^k-\beta_j^{k-1}}{\Delta t}\right|\leqslant\\&\beta_j^k\left|\frac{\dfrac{\|u^k\|_1}{g_0^k}-\dfrac{\|u^{k-1}\|_1}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|+\frac{\|u^{k-1}\|_1}{g_0^{k-1}}\left|\frac{\beta_j^k-\beta_j^{k-1}}{\Delta t}\right|\leqslant\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&B_1\beta_j^k\left|\frac{\dfrac{1}{g_0^k}-\dfrac{1}{g_0^{k-1}}}{\Delta t}\right|+\frac{\|u^{k-1}\|_1}{g_0^{k-1}}\cdot L\leqslant\\
&B_1c\,\frac{|g_0'(\alpha)|}{g_0^2(\alpha)}\left|\frac{R(t^k)-R(t^{k-1})}{\Delta t}\right|+\frac{B_1}{g_0^{k-1}}\cdot L\leqslant\\
&B_4+\frac{B_1}{g_0^{k-1}}\cdot L
\end{aligned}\tag{14}
$$

其中 α 在 $R(t^k)$ 和 $R(t^{k-1})$ 之间，而且

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}D_{\Delta x}^{-}(d_j^k u_j^{k+1})\operatorname{sgn}(\eta_j^{k+1})\,\Delta x=\\
&\sum_{j=1}^{n}D_{\Delta x}^{-}(d_j^k)u_{j-1}^{k+1}\operatorname{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x+\sum_{j=1}^{n}d_j^kD_{\Delta x}^{-}(u_j^{k+1})\operatorname{sgn}(\eta_j^{k+1})\Delta x\leqslant\\
&B_2\sum_{j=1}^{n}|D_{\Delta x}^{-}(d_j^k)|\Delta x+c\|\eta^{k+1}\|_1\leqslant c\|\eta^{k+1}\|_1+B_2c
\end{aligned}\tag{15}
$$

由(14),(15) 式有

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\eta^{k+1}\|_1-\|\eta^k\|_1}{\Delta t}&\leqslant c\|\eta^{k+1}\|_1+B_2c+\frac{B_1}{g_0^{k-1}}\cdot L+B_4\leqslant\\
&c\|\eta^{k+1}\|_1+\frac{B_1}{|g_0^k-g_0^{k-1}|}\cdot L+B_5=\\
&c\|\eta^{k+1}\|_1+\frac{LB_1\Delta t}{g_0'(\xi)\,|R(t_k)-R(t_{k-1})|}+B_5
\end{aligned}\tag{16}
$$

其中 ξ 在 $R(t^k)$ 和 $R(t^{k-1})$ 之间，且存在正常数 B_4 和 B_5，使该不等式成立，则该定理得证.

下一个结果表明，差分逼近满足关于 t 的李普希茨条件.

引理 5　假设引理 1 成立. 则存在一个正常数 $A>0$，使得对任何 $r>q$ 有

$$
\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{u_j^r-u_j^q}{\Delta t}\right|\Delta x\leqslant A(r-q),\quad\left|\frac{R^r-R^q}{\Delta t}\right|\leqslant A(r-q)\tag{17}
$$

证　将(2) 式的第一式的所有 j 相加并乘 Δx，得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\Delta t}\right|\Delta x&=\sum_{j=1}^{n}\left|-\frac{g_j^ku_j^{k+1}-g_{j-1}^ku_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}-d_j^ku_j^{k+1}\right|\Delta x\leqslant\\
&\sum_{j=1}^{n}\left|-\frac{g_j^ku_j^{k+1}-g_j^ku_{j-1}^{k+1}+g_j^ku_{j-1}^{k+1}-g_{j-1}^ku_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}\right|\Delta x+\sum_{j=1}^{n}|d_j^ku_j^{k+1}|\Delta x\leqslant\\
&\sum_{j=1}^{n}g_j^k\left|\frac{u_j^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}\right|\Delta x+\sum_{j=1}^{n}u_{j-1}^{k+1}\left|\frac{g_j^k-g_{j-1}^k}{\Delta x}\right|\Delta x+\sum_{j=1}^{n}|d_j^ku_j^{k+1}|\Delta x\leqslant\\
&L\|g^k\|_1+L\|u^{k+1}\|_1+c\,\|u^{k+1}\|_1\leqslant A
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{u_j^r-u_j^q}{\Delta t}\right|\Delta x\leqslant\sum_{k=q}^{r-1}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\Delta t}\right|\Delta x\leqslant A(r-q)
$$

可类似证明引理 5 的第二个不等式.

3　有限差分的收敛性和弱解的存在唯一性

定义如下的函数族$\{\mathbb{U}_{\Delta x,\Delta t}\}$，$\{\mathbb{R}_{\Delta t}\}$

$$
\mathbb{U}_{\Delta x,\Delta t}(x,t)=u_j^k,\ \mathbb{R}_{\Delta t}(t)=R^{k-1}+\frac{R^k-R^{k-1}}{\Delta t}(t-t_{k-1})
$$

其中 $x \in [x_{j-1}, x_j)$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $j=1,\cdots,n$, $k=1,\cdots,l$. 且由引理 2-5,函数集合 $\{\mathbb{U}_{\Delta x,\Delta t}\}$, $\{\mathbb{R}_{\Delta t}\}$ 在拓扑空间 $L^1(x_{\min}, x_{\max}) \times (0, T)$ 和 $C(0, T)$ 中是紧的,并且由文献[15]中的引理 16.7 的证明. 以下结果成立.

定理 1 存在序列 $\{\mathbb{U}_{\Delta x_i}\} \subset \{\mathbb{U}_{\Delta x,\Delta t}\}$ 和 $\{\mathbb{R}_{\Delta t_i}\} \subset \{\mathbb{R}_{\Delta t}\}$ 收敛到函数空间 $I_{BV}([x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T])$ 和 $C(0, T)$ 内的 $U(x, t)$ 和 $R(t)$,即当 $T > 0$ 且 $i \to \infty$ 时有

$$
\begin{gathered}
\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |\mathbb{U}_{\Delta x_i,\Delta t_i}(x, t) - u(x, t)| \,\mathrm{d}x \to 0 \\
\int_0^T \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |\mathbb{U}_{\Delta x_i,\Delta t_i}(x, t) - u(x, t)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to 0
\end{gathered} \tag{18}
$$

以及

$$
\max_{t \in [0, T]} |\mathbb{R}_{\Delta t_i}(t) - R(t)| \to 0
$$

并且存在一个常数 Γ 使得极限函数满足

$$
\| U \|_{I_{BV}([x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T])} \leqslant \Gamma, \quad \| R \|_{C[0, T]} \leqslant \Gamma
$$

接下来证明通过上述差分格式构造的极限函数 $u(x, t)$ 与 $R(t)$ 实际上是模型(1)的弱解.

定理 2 定理 1 定义的极限函数 $u(x, t)$ 与 $R(t)$ 是模型(1)的弱解并且满足

$$
\| u(\cdot, t) \|_1 + | R(t) | \leqslant B_1
$$

以及

$$
\| u \|_{L^\infty([x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T])} + \| R \|_{C[0, T]} \leqslant B_1 + B_2
$$

证 使用类似于文献[15]的引理 16.7 中的证明方法可得结论成立.

下述定理给出了(2)式的解集合$\{u_j^k, R^k\}$关于初始条件$\{u_j^0, R^0\}$的连续依赖性.

定理 3 设$\{u_j^k, R^k\}$和$\{\hat{u}_j^k, \hat{R}^k\}$是(2)式的解,并且对应初始条件$\{u_j^0, R^0\}$和$\{\hat{u}_j^0, \hat{R}^0\}$,则存在正常数 c_1, c_2 和 c_5 使得

$$
(1 - c_1 \Delta t) \hat{S}^{k+1} \leqslant (1 + c_5) \hat{S}^k + c_2 B_1
$$

这里

$$
\hat{S}^k = \| u^k - \hat{u}^k \|_1 + | R^k - \hat{R}^k |
$$

证 设 $p_j^k = u_j^k - \hat{u}_j^k$, $w^k = R^k - \hat{R}^k$. 则有

$$
\begin{gathered}
\frac{p_j^{k+1} - p_j^k}{\Delta t} + D_{\Delta x}^-(g_j^k u_j^{k+1} - \hat{g}_j^k \hat{p}_j^{k+1}) + d_j^k p_j^{k+1} + (d_j^k - \hat{d}_j^k) \hat{p}_j^k = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \\
\frac{w^{k+1} - w^k}{\Delta t} = h - w^{k+1} q - f(w^{k+1}) \sum_{j=1}^n c_j p_j^{k+1} \Delta x
\end{gathered} \tag{19}
$$

将(19)式的第一个式子乘 $\operatorname{sgn}(p_j^{k+1})\Delta x$,并将 $j=1,\cdots,n$ 对应的各式相加,使用

$$
\sum_{j=1}^n D_{\Delta x}^-(g_j^k u_j^{k+1} - \hat{g}_j^k \hat{u}_j^{k+1}) \operatorname{sgn}(p_j^{k+1}) \Delta x \geqslant g_n^k | p_n^{k+1} | - g_0^k | p_0^{k+1} | + \sum_{j=1}^n D_{\Delta x}^-([g_j^k - \hat{g}_j^k] \hat{u}_j^{k+1}) \operatorname{sgn}(p_j^{k+1}) \Delta x
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\| p^{k+1} \|_1 - \| p^k \|_1}{\Delta t} \leqslant & - g_n^k | p_n^{k+1} | + g_0^k | p_0^{k+1} | - | g_j^k - \hat{g}_j^k | \sum_{j=1}^n | D_{\Delta x}^- \hat{u}_j^{k+1} | \Delta x - \sum_{j=1}^n d_j^k | p_j^{k+1} | \Delta x - \\
& \sum_{j=1}^n | d_j^k - \hat{d}_j^k | | \hat{p}_j^{k+1} | \Delta x \leqslant c \| p^k \|_1 + c_1 \| p^{k+1} \|_1 + c_2 B_1
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$\frac{|w^{k+1}|-|w^k|}{\Delta t}\leqslant h+c_3|w^{k+1}|+c_4\|p^{k+1}\|_1 \tag{21}$$

将(20)式和(21)式同时乘 Δt，并将所得的不等式相加，得到

$$(1-c_5\Delta t)\hat{S}^{k+1}\leqslant(1+c\Delta t)\hat{S}^k+c_2B_1\Delta t+h\Delta t$$

其中 $c_5=\max\{c_1+c_4,c_3\}$，结论得证.

接下来证明定理 1 和定理 2 中定义的解是唯一的.

定理 4　假设(u,R)和$(\hat{u},\hat{R})$是模型(1)的两个弱解，并且对应初始条件$(u_0(x),R_0)$和$(\hat{u}_0(x),\hat{R}_0)$，若有不等式

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_1+|R(t)-\hat{R}(t)|\leqslant\\&\exp(c_5T)\exp[c\exp(c_5T)\ t](\|u_0-\hat{u}_0\|_1+|R_0-\hat{R}_0|)\end{aligned} \tag{22}$$

成立，则表明模型(1)的弱解是唯一的.

证　令 $U(t)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}u(x,t)\mathrm{d}x$. 则初始值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=h-qR-f(R)\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}c(x)u(x,t)\mathrm{d}x,\ 0<t<T\\&R(0)=R_0\end{aligned} \tag{23}$$

有唯一解. 再用这个解考虑下面的初边值问题：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}[g(x,R(t))u(x,t)]=-d(x,R(t))u(x,t)\\&g(x_{\min},R(t))u(x_{\min},t)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\beta(x,R(t))u(x,t)\mathrm{d}x\\&u(x,0)=u_0(x)\end{aligned} \tag{24}$$

则(24)式有唯一的弱解 $u(x,t)$. 若(u_j^k,R^k)和$(\hat{u}_j^k,\hat{R}^k)$以及得出的函数$U(t)$和$\hat{U}(t)$为(23)式和(24)式的唯一解，且由定理 3 有

$$\hat{S}^{k+1}\leqslant\frac{1}{1-c_5\Delta t}\hat{S}^k+c\ \frac{1}{1-c_5\Delta t}(|R^k-\hat{R}^k|+|U^k-\hat{U}^k|)\Delta t$$

其中 $\hat{S}^k$ 同定理 3 中的$\hat{S}^{k+1}$，则有

$$\hat{S}^k\leqslant\left(\frac{1}{1-c_5\Delta t}\right)^k\hat{S}^0+c\left(\frac{1}{1-c_5\Delta t}\right)^k\sum_{z=0}^{k-1}(|R^z-\hat{R}^z|+|U^z-\hat{U}^z|)\Delta t \tag{25}$$

由定理 1 可以求不等式(25)右侧式子的极限

$$\hat{S}(t)\leqslant\exp(c_5t)S(0)+c\exp(c_5\ t)\int_0^t(|R(\tau)-\hat{R}(\tau)|+|U(\tau)-\hat{U}(\tau)|)\mathrm{d}\tau \tag{26}$$

这里(u,R)，$(\hat{u},\hat{R})$是(23)式和(24)式在给定函数U^k 和$\hat{U}^k$ 下的唯一解，并且有 $\hat{S}(t)=\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_1+|R(t)-\hat{R}(t)|$. 再将(26)式中给出的估计应用于(23),(24)式中的解，其中

$$\begin{aligned}&U(t)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}u(x,t)\mathrm{d}x\\&\hat{U}(t)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\hat{u}(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{27}$$

在定理 1 中有定义. 由 Gronwall 不等式，得到(22)式.

参考文献:

[1] HSU S B, HUBBELL S, WALTMAN P. A Mathematical Theory for Single-Nutrient Competition in Continuous Cultures of Micro-Organisms [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1977, 32(2): 366-383.

[2] HAEGEMAN B, LOBRY C, HARMAND J. Modeling Bacteria Flocculation as Density-Dependent Growth [J]. AIChE Journal, 2007, 53(2): 535-539.

[3] FEKIH-SALEM R, LOBRY C, SARI T. A Density-Dependent Model of Competition for one Resource in the Chemostat [J]. Mathematical Biosciences, 2017, 286(4): 104-122.

[4] ABDELLATIF N, FEKIH-SALEM R, SARI T. Competition for a Single Resource and Coexistence of Several Species in the Chemostat [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2016, 13(4): 631-652.

[5] HAEGEMAN B, RAPAPORT A. How Flocculation Can Explain Coexistence in the Chemostat [J]. Journal of Biological Dynamics, 2008, 2(1): 1-13.

[6] WOLKOWICZ G S. Successful Invasion of a Food Web in a Chemostat [J]. Mathematical Biosciences, 1989, 93(2): 249-268.

[7] GAILS K W, LU Z Q. Direct Interference on Competition in a Chemostat [J]. 生物数学学报, 1998, 13(3): 282-291.

[8] HUANG Q H, WANG H. A Toxin-Mediated Size-Structured Population Model: Finite Difference Approximation and Well-Posedness [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2016, 13(4): 697-722.

[9] 李状, 王明龙. 一个具有幼年-成年两个阶段的种群模型的解的存在唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(5): 19-24.

[10] ACKLEH A S, MA B L. A Second-Order High-Resolution Scheme for a Juvenile-Adult Model of Amphibians [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2013, 34(4): 365-403.

[11] ACKLEH A S, ITO K. An Implicit Finite Difference Scheme for the Nonlinear Size-Structured Population Model [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1997, 18(9-10): 865-884.

[12] METZ J A J, DIEKMANN O. The Dynamics of Physiologically Structured Populations [M]. Berlin: Springer, 1986.

[13] ACKLEH A S, BANKS H T, DENG K. A Finite Difference Approximation for a Coupled System of Nonlinear Size-Structured Populations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2002, 50(6): 727-748.

[14] YOUNG D M. Iterative Solutions of Large Linear Systems [M]. New York: Academic Press, 1971.

[15] SMOLLER J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations [M]. New York: Springer New York, 1994.

责任编辑 张枸