DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.05.004

带有终端约束的线性二次最优控制问题①

常绍敏, 丁翊珊, 邱洁, 王燕青

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 主要研究了带有终端约束的线性二次最优控制问题的可解性. 首先,借助 Riccati 方程给出了最优控制的状态反馈形式;其次,基于状态反馈表示提出了最优状态和最优控制的计算方法;最后,通过数值算例验证了数值算法的有效性,并且展示了该算法的一阶收敛速度.

关 键 词: 线性二次最优控制问题;终端约束;可解性;数值算法

中图分类号: O232 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2022)05-0031-07

Linear Quadratic Optimal Control Problems with Terminal Constraint

CHANG Shaomin, DING Yishan, QIU Jie, WANG Yanqing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this work, solvability of linear quadratic optimal control problems with terminal constraint have been studied, and optimal control's open-loop representation and closed-loop representation been presented. Based on Riccati equation, it is proposed that an algorithm should compute the optimal state and the optimal control. Finally, an example has been carried out to show the first order convergence.

Key words: linear quadratic optimal control problem; terminal constraint; solvability; algorithm

经过半个多世纪的发展,线性二次最优控制问题(LQ 问题)被广泛研究[1-2]. 但是,已有的结果大多是系统的状态和控制都不带有任何约束,同时现有的算法的收敛速度也鲜有涉及. 近期,文献[3]考虑了带终端约束的随机系统的 LQ 问题,研究了该问题的可解性问题. 本文是在文献[3-4]的基础上研究一类带有终端约束的确定系统的 LQ 问题,并给出了数值计算方法,最后通过具体例子验证了数值方法的有效性.

1 预备知识

本文考虑以下状态方程:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{1}$$

① 收稿日期:2021-09-27

基金项目:国家自然科学基金项目(11801467).

作者简介:常绍敏,硕士研究生,主要从事控制理论及应用研究.

通信作者:王燕青,硕士生导师,副教授.

性能指标为

$$J(\boldsymbol{u}(\cdot))=\int_0^T(\langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t)\rangle+\langle \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t$$

其中：$T>0$，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{m\times m}$.

经典的 LQ 问题为：对于受控系统(1)，在平方可积的控制函数空间中，寻找最优控制，极小化二次性能指标 $J(\cdot)$. 但在实际问题中，控制函数通常带有一定的约束. 本文中考虑使得系统状态达到特定目标的控制集，即状态带有终端约束的 LQ 问题. 对于状态的预期目标 $\boldsymbol{x}_T\in\mathbb{R}^n$，定义控制函数类

$$\mathscr{U}:=\{\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)\mid \boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T\}$$

带终端约束的 LQ 问题(简记为 CLQ 问题)描述如下：

对于给定的 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_T\in\mathbb{R}^n$，寻找控制 $\boldsymbol{u}^*(\cdot)\in U$，使得

$$J(\boldsymbol{u}^*(\cdot))=\inf_{\boldsymbol{u}(\cdot)\in\mathscr{U}}J(\boldsymbol{u}(\cdot))\tag{2}$$

如果满足(2)式的 $\boldsymbol{u}^*(\cdot)$ 存在，则其被称为 CLQ 问题的最优控制，相应的状态 $\boldsymbol{x}^*(\cdot):=\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*(\cdot))$ 被称为最优状态，$(\boldsymbol{x}^*(\cdot),\boldsymbol{u}^*(\cdot))$ 被称为最优对. 上述问题称为带有终端约束的线性二次最优控制问题(简称为 CLQ 问题).

为了保证控制集 U 的非空性和 CLQ 问题的可解性，我们在本工作中作如下假设：

(A) 系统(1) 在区间$[0,T]$上精确能控，即 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})=n$；$\boldsymbol{Q}$ 为半正定矩阵，$\boldsymbol{R}$ 为正定矩阵.

引理 1 系统(1) 在$[0,T]$上精确能控的充要条件为系统(1) 的 Gram 矩阵 $\boldsymbol{\Psi}(0,T)$ 可逆，其中

$$\boldsymbol{\Psi}(0,T)=\int_0^T\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$

$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)=-\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{A},\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}_n\end{cases}$$

2 主要定理

采用拉格朗日乘子法，我们首先将 CLQ 问题转化为无约束的 LQ 问题. 引入拉格朗日泛函：

$$J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{u}(\cdot))=J(\boldsymbol{u}(\cdot))+2\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}(T)\rangle$$

其中 $\boldsymbol{x}(T):=\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))$ 为系统(1) 的状态在 $t=T$ 处的值. 对于给定的 $\boldsymbol{\lambda}$，无约束的 LQ 问题即 $(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}}$ 问题为：

对于给定的 $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，寻找 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ 使得

$$J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))=\inf_{\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{u}(\cdot))$$

如果对于某些参数 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n$，$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}}$ 问题的最优控制 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 对应的系统(1) 的状态满足条件

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(T):=\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T$$

那么我们可以证明 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 也是 CLQ 问题的最优控制.

引理 2 若$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot),\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))$为$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}}$ 问题的最优对，且满足 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(T)=\boldsymbol{x}_T$，则$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot),\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))$也是 CLQ 问题的最优对.

证 因为 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 为$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}}$ 问题的最优控制，所以对任意的 $\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$，满足 $\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T$，有

$$J(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))+2\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(T)\rangle=J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))\leqslant J_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{u}(\cdot))=J(\boldsymbol{u}(\cdot))+2\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}(T)\rangle$$

由此可得 $J(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot))\leqslant J(\boldsymbol{u}(\cdot))$，即 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 为 CLQ 问题的最优控制. 证毕.

利用引理 2，求解 CLQ 问题的最优控制，就可以转化为求解如下两个子问题：

(1) $(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}}$ 问题的最优控制问题；

(2) 选择特定的参数$\boldsymbol{\lambda}^*\in\mathbb{R}^n$，使得$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}^*}$ 问题的最优状态满足 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(T):=\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T$.

对于$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的可解性，有如下定理.

定理 1　基于假设(A)，对任意的 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n$，$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题唯一可解，并且 $\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)$ 是$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的最优控制当且仅当$(\boldsymbol{x}_\lambda^*(\cdot),\boldsymbol{y}_\lambda^*(\cdot))$ 满足如下耦合的正倒向方程：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_\lambda^*(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t), & t\in[0,T]\\ \dot{\boldsymbol{y}}_\lambda^*(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t)+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t), & t\in[0,T]\\ \boldsymbol{x}_\lambda^*(0)=\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{y}_\lambda^*(T)=-\boldsymbol{\lambda} & \\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t), & t\in[0,T]\end{cases}\tag{4}$$

证　$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题唯一可解性可以用文献[1]第七章定理 2.1 的方法得到. 现在证明定理的剩余部分.

(必要性) 若 $\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)$ 是$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的最优控制，那么对任意的 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，性能指标满足：

$$J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{u}(\cdot))-J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot))\geqslant 0,\ \forall\,\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$$

我们记

$$\boldsymbol{x}_\varepsilon(\cdot):=\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{u}(\cdot)),\ \boldsymbol{x}^0(\cdot):=\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}(\cdot))$$

由系统(1) 的线性特征，可得 $\boldsymbol{x}_\varepsilon(\cdot)=\boldsymbol{x}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{x}^0(\cdot)$. 这样

$$\begin{aligned}&0\leqslant J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{u}(\cdot))-J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot))=\\&2\varepsilon\int_0^T(\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t+2\varepsilon\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}^0(T)\rangle+\\&\varepsilon^2\int_0^T(\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^0(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，可得

$$\int_0^T(\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t+\langle\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}^0(T)\rangle=0\tag{5}$$

另一方面，由方程组(4) 容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{y}_\lambda^*(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle=\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle$$

两边积分，从而

$$\langle-\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x}^0(T)\rangle=\int_0^T(\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\lambda^*(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t\tag{6}$$

由(5) 式和(6) 式可得

$$\int_0^T\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t)-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle\mathrm{d}t=0$$

又由 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 的任意性，得到

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t)$$

(充分性) 若$(\boldsymbol{x}_\lambda^*(\cdot),\boldsymbol{y}_\lambda^*(\cdot))$ 满足方程组(4)，那么对任意的 $\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$，

$$\int_0^T\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_\lambda^*(t)-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda^*(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle\mathrm{d}t=0$$

结合(6) 式，可知(5) 式成立. 展开 $J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{u}(\cdot))$ 并利用(5) 式，可推出

$$J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{u}(\cdot))=J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot))+\varepsilon^2\int_0^T(\langle\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^0(t),\boldsymbol{x}^0(t)\rangle+\langle\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)\rangle)\mathrm{d}t\geqslant J_\lambda(\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot))$$

因此，$\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)$ 是$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的最优控制. 证毕.

定理 1 给出了最优控制的开环表示，而在应用中，人们更希望给出闭环表示，即状态反馈形式. 接下来，我们就研究 CLQ 问题的闭环表示. 我们引入 Riccati 方程：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{O}_n\end{cases}\tag{7}$$

和两个常微分方程(简称 ODE)：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varphi}(t),\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}_\lambda(t)=(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{QP}(t))\boldsymbol{y}_\lambda(t)+\boldsymbol{Q\varphi}(t),\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{y}_\lambda(T)=-\boldsymbol{\lambda}\end{cases}\tag{9}$$

关于方程(7),(8),(9)的适定性，读者可以参考文献[1,5].

引理 3 方程(7)存在唯一的解 $\boldsymbol{P}(\cdot)\in C([0,T];S_+^n)$；方程(8),(9)分别存在唯一的解 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$，$\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$，其中 S_+^n 表示 n 阶的半正定矩阵集.

定理 2 对任意的 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n$，$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的唯一最优对$(\boldsymbol{x}_\lambda^*(\cdot),\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot))$有如下表示

$$\boldsymbol{x}_\lambda^*(\cdot)=\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)+\boldsymbol{\varphi}(\cdot),\ \boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$,$\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)$ 分别是方程(8),(9)的解.

证 设 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 是如下 ODE 的解

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}_\lambda^*(t),\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)$. 由定理 1 知，只需要方程(9)的解也满足方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{Qx}(t),\ t\in[0,T]\\ \boldsymbol{y}(T)=-\boldsymbol{\lambda}\end{cases}\tag{11}$$

即可得 $\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)$ 是$(\mathrm{LQ})_\lambda$ 问题的最优控制. 为证方程(9)的解也满足方程(11)，构造

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)=\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)+\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$$

利用方程(7)—(9)，我们可以得到

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(\cdot)=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)+\boldsymbol{\varphi}(\cdot)]+\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)=\boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_\lambda^*(\cdot)$$

且$\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{y}_\lambda(0)+\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{O}_n\boldsymbol{y}_\lambda(0)+\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0$. 所以$\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$为方程(10)的解，由方程(10)解的唯一性知 $\boldsymbol{x}(\cdot)=\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)=\boldsymbol{P}(\cdot)\ \boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)+\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$. 再次由方程解的唯一性得$\boldsymbol{y}_\lambda(\cdot)=\boldsymbol{y}(\cdot)$，因此结论成立. 证毕.

下面引入辅助系统

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\hat{\boldsymbol{A}}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\hat{\boldsymbol{B}}(t)\hat{\boldsymbol{u}}(t),\ t\in[0,T]\\ \hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{12}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{A}}(\cdot)=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{Q}$，$\hat{\boldsymbol{B}}(\cdot)=(\boldsymbol{BR}^{-\frac{1}{2}},\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}})$.

引理 4 系统(12)在$[0,T]$上精确能控的充要条件是系统(1)在$[0,T]$上精确能控.

证 设 $\boldsymbol{x}(T;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T$，令$\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}(\cdot)\\ \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}(\cdot)\end{pmatrix}$，则系统(12)表示为：

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)-\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)),\ t\in[0,T]\\ \hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

易知 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 满足该方程，再由该方程解的唯一性，知$\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)=\boldsymbol{x}(\cdot)$，从而$\hat{\boldsymbol{x}}(T;\boldsymbol{x}_0,\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot))=\boldsymbol{x}_T$，即得系统(12)精确能控等价于系统(1)精确能控. 证毕.

通过引入

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}}(t)=-\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)\,\hat{\boldsymbol{A}}(t),\ t\in[0,T]\\ \hat{\boldsymbol{\Phi}}(0)=\boldsymbol{I}_n\end{cases}$$

则系统(12) 的 Gram 矩阵为$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)=\int_0^T\hat{\boldsymbol{\Phi}}(s)\hat{\boldsymbol{B}}(s)\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(s)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$. 由系统(1) 能控性的假设和引理 4，可知$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)$ 可逆. 现在通过$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)$ 的可逆性来研究 $\boldsymbol{P}(T)$ 的可逆性.

引理 5　$\boldsymbol{P}(T)$ 是正定矩阵.

证　由 $\boldsymbol{P}(\cdot)$，$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot)$ 满足的方程，直接计算知，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{P}(t)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t))=\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t))\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t)$$

进一步对两边在$[0,T]$上积分，有

$$\int_0^T\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t))\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t=\hat{\boldsymbol{\Phi}}(T)\boldsymbol{P}(T)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(T)-\hat{\boldsymbol{\Phi}}(0)\boldsymbol{P}(0)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(0)=\hat{\boldsymbol{\Phi}}(T)\boldsymbol{P}(T)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(T)$$

从而

$$\boldsymbol{P}(T)=\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(T)\int_0^T\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t))\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\,\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-\mathrm{T}}(T)=$$

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(T)\int_0^T\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t)\hat{\boldsymbol{B}}(t)\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(t)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\,\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-\mathrm{T}}(T)=\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(T)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-\mathrm{T}}(T)$$

由$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)=\int_0^T\hat{\boldsymbol{\Phi}}(s)\hat{\boldsymbol{B}}(s)\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(s)\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$ 可知其半正定，且$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)$ 可逆，故$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)$ 正定. 最后，由$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(0,T)$ 正定以及$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(T)$ 可逆可得 $\boldsymbol{P}(T)$ 是正定矩阵. 证毕.

现在我们可以综合前面的结果，得到 CLQ 问题的可解性.

定理 3　$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}^*}$ 问题的最优控制$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 是 CLQ 问题的最优控制，其中$\boldsymbol{\lambda}^*=\boldsymbol{P}^{-1}(T)(\boldsymbol{\varphi}(T)-\boldsymbol{x}_T)$.

证　由引理 5 知 $\boldsymbol{P}(T)$ 可逆，从而$\boldsymbol{\lambda}^*$ 存在. 由定理 2 知，对$(\mathrm{LQ})_{\boldsymbol{\lambda}^*}$ 问题的最优状态 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(\cdot)$，有

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(T)=\boldsymbol{P}(T)\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\lambda}^*}(T)+\boldsymbol{\varphi}(T)=-\boldsymbol{P}(T)\boldsymbol{\lambda}^*+\boldsymbol{\varphi}(T)=\boldsymbol{x}_T$$

最后由引理 2 知，$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}}^*(\cdot)$ 是 CLQ 问题的最优控制，即得结论. 证毕.

3　最优控制的计算方法

根据定理 3，可以得到 CLQ 问题的基于状态反馈的最优对的计算方法. 具体计算步骤如下：

1) 选取最优参数$\boldsymbol{\lambda}^*$.

① 解得 Riccati 方程(7) 和 ODE(8) 的解 $\boldsymbol{P}(\cdot)$，$\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$.

② 求解最优参数$\boldsymbol{\lambda}^*=\boldsymbol{P}^{-1}(T)(\boldsymbol{\varphi}(T)-\boldsymbol{x}_T)$.

2) 解得最优参数$\boldsymbol{\lambda}^*$ 所对应 ODE(9) 的解 $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\lambda}^*}(\cdot)$.

3) 求解最优对$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(\cdot),\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(\cdot))$：

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(\cdot)=\boldsymbol{P}(\cdot)\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\lambda}^*}(\cdot)+\boldsymbol{\varphi}(\cdot),\quad \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\lambda}^*}^*(\cdot)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\lambda}^*}(\cdot)$$

现在，我们通过一个具体的例子，利用上述计算方法，得到 CLQ 问题的最优对.

例 1　考虑 CLQ 问题，其中 $T=1$，$x_0=0$，$A=1$，$B=1$，$x_T=1$，$Q=1$，$R=\frac{1}{3}$.

解：将条件数据代入 Riccati 方程(7) 得其精确解为

$$P(t)=\frac{3\exp(4t)-3}{3+\exp(4t)}$$

由 ODE(8) 解得

$$\varphi(t)=0$$

进而可以计算最优参数：

$$\lambda^*=P^{-1}(1)(\varphi(1)-1)=-\frac{3+\exp(4)}{3\exp(4)-3}$$

再由 ODE(9) 解得

$$y_{\lambda^*}(t)=\frac{\exp(2)(\exp(4t)+3)}{3\exp(2t)(\exp(4)-1)}$$

最后可以计算最优对为

$$x_{\lambda^*}^*(t)=\frac{\exp(2)(\exp(8t)+2\exp(4t)-3)}{\exp(2t)(\exp(4t+4)+3\exp(4)-\exp(4t)-3)},\ u_{\lambda^*}^*(t)=\frac{\exp(2)(\exp(4t)+3)}{\exp(2t)(\exp(4)-1)}$$

由例 1 可知，即便对于 1 维系统，要求解 CLQ 问题仍然十分复杂，这就促使我们研究上述计算方法的数值算法. 接下来我们上述的计算方法给出数值计算的版本，首先将时间区间$[0,T]$均分为 N 份，即有

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$$

其中$t_i=i\dfrac{T}{N}=:i\tau$，$i=0,1,\cdots,N$. 下面列出的是基于状态反馈的 CLQ 问题的数值算法.

CLQ 问题数值算法：

1) 分解半正定矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}_0$，其中 $\boldsymbol{Q}_0$ 为 n 阶正交矩阵，

$$\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_{m_0},\ 0,\ \cdots,\ 0\},\ \mu_i>0,\ i=1,2,\cdots,m_0$$

定义

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m_0}\\ \boldsymbol{O}_{(n-m_0)\times m_0}\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{R}}=\operatorname{diag}\{\mu_1^{-1},\ \mu_2^{-1},\ \cdots,\ \mu_{m_0}^{-1}\}$$

2) 选取最优参数$\boldsymbol{\lambda}^*$ 的近似值 $\boldsymbol{\lambda}$.

① 求解 Riccati 方程(7) 如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{A}_0+\tau\bar{\boldsymbol{Q}}-\tau\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i^{-1}\boldsymbol{H}_i,\ i=1,2,\cdots,N\\ \boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{I}_n+\tau\bar{\boldsymbol{A}}\\ \boldsymbol{H}_i=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{A}_0\\ \boldsymbol{G}_i=\bar{\boldsymbol{R}}+\tau\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}\bar{\boldsymbol{B}}\end{cases}$$

采用 Euler 方法求解 ODE(8)，得到其数值解 $\boldsymbol{\varphi}_i$，$i=0,1,\cdots,N$.

② 求解近似最优参数 $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{P}_N^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_N-\boldsymbol{x}_T)$$

3) 利用 Euler 方法求解近似最优参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 所对应 ODE(9)，得到其数值解 $\boldsymbol{y}_i$，$i=0,1,\cdots,N$.

4) 求解近似最优对$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)$，$i=0,1,\cdots,N$：

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{y}_i+\boldsymbol{\varphi}_i,\ \boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i$$

取 $N=2^5$，用数值算法得到例 1 的数值解，和精确解的比较见图 1.

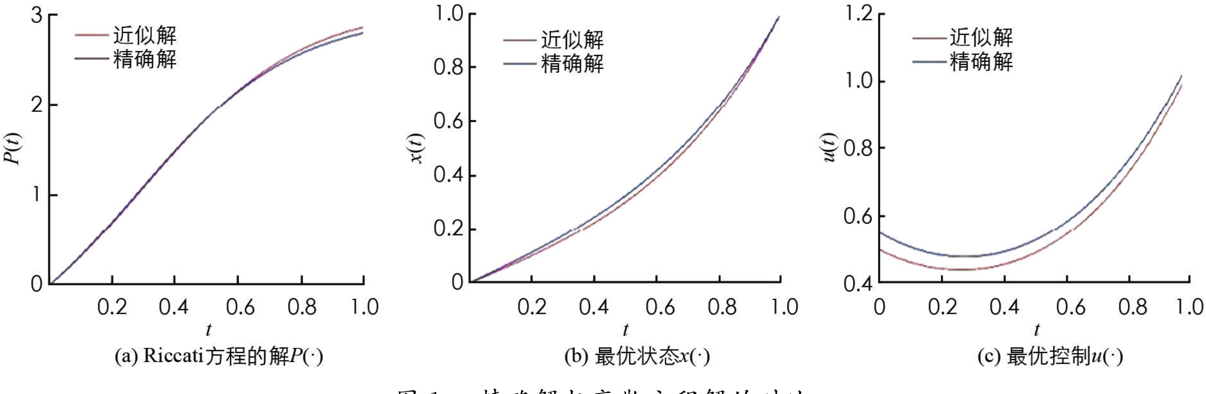
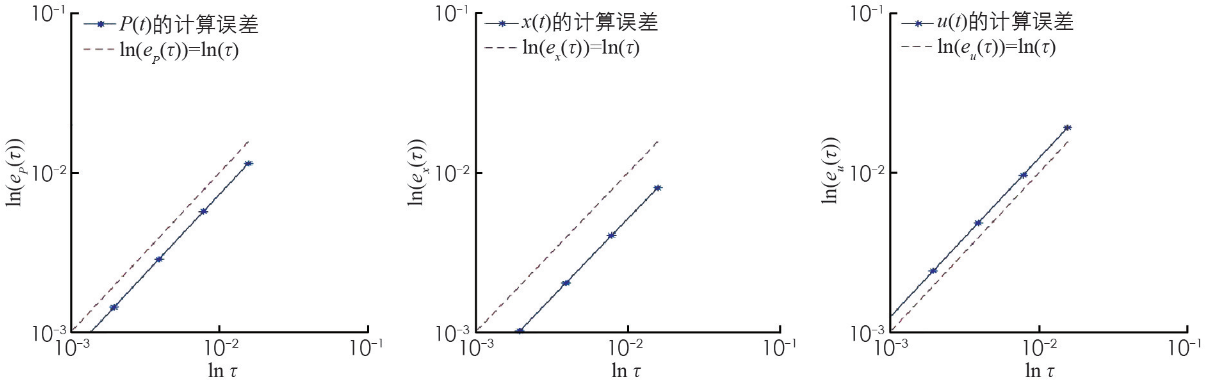


图 1 精确解与离散方程解的对比

为验证算法的收敛性，对于 Riccati 方程，定义其误差和步长的关系为：$e_{\boldsymbol{P}}(\tau)=\dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}(t_i)|$，

其中 $\boldsymbol{P}(\cdot)$ 为 Riccati 方程的精确解，$\boldsymbol{P}_\cdot$ 为近似解. 类似地定义 $e_x(\tau)$，$e_u(\tau)$. 图 2 展示了算法的收敛性，从图 2 中可看出算法的收敛速度能够达到一阶.



(a) Riccati方程解P(·)的收敛性　　(b) 最优状态x(·)的收敛性　　(c) 最优控制u(·)的收敛性

图 2　Riccati 方程与最优对离散化计算方法的收敛性

4　结论

本文利用参数选择的方法对带有终端约束的 LQ 问题给出了可解性的理论结果，同时基于最优控制的闭环表示给出了计算最优对的数值算法. 与基于开环表示的确定/随机系统的 LQ 问题算法相比，本文算法的优势在于：避免了条件数学期望的计算，避免使用梯度下降法等算法[6-10]，从而大大减少了计算量.

参考文献：

[1] 雍炯敏，楼红卫. 最优控制理论简明教程 [M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[2] 李训经，雍炯敏，周渊. 控制理论基础 [M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[3] BI X C，SUN J R，XIONG J. Optimal Control for Controllable Stochastic Linear Systems [J]. ESAIM：Control，Optimisation and Calculus of Variations，2020，26：98.

[4] RAMI M A，CHEN X，ZHOU X Y. Discrete-Time Indefinite LQ Control with State and Control Dependent Noises [J]. Journal of Global Optimization，2002，23：245-265.

[5] 王高雄，周之铭，朱思铭. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2006.

[6] 王燕青，周中成. 循序渐进谈条件数学期望 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(4)：230-232.

[7] PROHL A，WANG Y Q. Strong Rates of Convergence for a Space-Time Discretization of the Backward Stochastic Heat Equation，and of a Linear-Quadratic Control Problem for the Stochastic Heat Equation [J]. ESAIM：Control，Optimisation and Calculus of Variations，2021，27：54.

[8] WANG Y Q. A Semidiscrete Galerkin Scheme for Backward Stochastic Parabolic Differential Equations [J]. Mathematical Control and Related Fields，2016，6(3)：489-515.

[9] 李春念，袁功林. 求解无约束问题的修正 PRP 共轭梯度算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(9)：67-75.

[10] 林穗华. 改进共轭梯度法的收敛性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(7)：81-88.

责任编辑　张枸