DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.05.008

Darcy-Cahn-Hilliard 系统的全局吸引子[①]

肖翔宇， 蒲志林

四川师范大学 数学科学学院，成都 610066

摘要： Darcy-Cahn-Hilliard 系统是经典的流体扩散界面模型. 本文主要对 Darcy-Cahn-Hilliard 系统全局吸引子的存在性进行研究，首先得到了弱解的适定性，给出了一些解的能量估计以及渐近估计，其次利用半群理论、空间嵌入定理以及紧性引理分别得到 $L^2(\Omega)$ 与 $H^1(\Omega)$ 空间全局吸引子的存在性.

关 键 词： 渐近估计；半群理论；全局吸引子；存在性

中图分类号： O175.2 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2022)05-0061-08

On Global Attractors of Darcy-Cahn-Hilliard System

XIAO Xiangyu， PU Zhilin

School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China

Abstract: Darcy-Cahn-Hilliard system is a classical flfluid diffusion interface model. In this paper, the existence of global attractor for the Darcy-Cahn-Hilliard system has been studied, with the well-posedness of weak solution got, some energy estimates and asymptotical estimates given for the Darcy-Cahn-Hilliard system. Then the existence of global attractors in $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ is obtained respectively by using semigroup theory, space embedding theorem and compactness lemma.

Key words: asymptotical estimates; semigroup theory; global attractor; existence

Darcy-Cahn-Hilliard 系统是对于多孔介质或 Hele-Shaw 细胞中的两相不可压缩流体的一个经典的扩散界面模型[1-3]，形如

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{u}=-\frac{1}{12\eta}(\nabla p-\rho \boldsymbol{g}),\ (x,t)\in \Omega_T\backslash\partial\Omega_T \\
\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ (x,t)\in \Omega_T\backslash\partial\Omega_T \\
[p]=\gamma\kappa,\ (x,t)\in\partial\Omega_T \\
[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]=0,\ (x,t)\in\partial\Omega_T
\end{gathered}
$$

而在本文中所考虑的 Darcy-Cahn-Hilliard 系统是

① 收稿日期：2021-09-25
基金项目：四川省科技厅科学研究项目(22CXTD 0029).
作者简介：肖翔宇，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究.
通信作者：蒲志林，教授，博士.

$$\boldsymbol{u} = -\nabla p - \gamma\varphi\nabla\mu,\ (x,t) \in \Omega_T \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ (x,t) \in \Omega_T \tag{2}$$

$$\varphi_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi - \varepsilon\Delta\mu = 0,\ (x,t) \in \Omega_T \tag{3}$$

$$\mu = -\varepsilon\Delta\varphi + \frac{1}{\varepsilon}f(\varphi),\ (x,t) \in \Omega_T \tag{4}$$

其中:$\Omega_T = \Omega \times (0, T)$;$\partial\Omega_T = \partial\Omega \times (0, T)$;$\partial\Omega$ 代表 Ω 的边界,$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域,具有光滑边界;$f(s)$ 代表非线性项;$\varepsilon, \gamma > 0$,本文为了简化,令 $\varepsilon = \gamma = 1$. 方程(1)-(4) 具有下列初边值条件:

$$\frac{\partial\mu}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{n}} = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega_T \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega_T \tag{6}$$

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot),\ x \in \Omega \tag{7}$$

其中:向量 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 代表流体速度,标量 $p(x,t)$ 代表压力项,标量 $\mu(x,t)$ 代表相场函数,$\varphi(x,t)$ 代表化学势. 在方程(1)中令 $\gamma = 0$ 可得到 Darcy 方程[4-5],当方程(3),(4) 中少了 $\boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi$ 时可得到 Cahn-Hilliard 方程[6-8].

方程(1)-(7) 是由 Lee,Lowengrub 和 Goodman 所提出的,其模型是 Boussinesq-Hele-Shaw-Cahn-Hilliard 模型[1] 的特例,将方程(1)-(7) 称为 DCH(Darcy-Cahn-Hilliard) 系统.

定义如下能量方程:

$$J(\varphi) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + F(\varphi)\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$

其中 $F(s) = \int f(s)\mathrm{d}s$. DCH 系统是个耗散系统,它满足下列的耗散规律[9]

$$\frac{\partial J(\varphi)}{\partial t} + \|\nabla\mu\|_2^2 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 0 \tag{9}$$

系统解的长时间动力学行为和正则性一直备受关注. 文献[2] 研究了一类非自治 Cahn-Hilliard-Darcy 系统解的适定性和长期动力学行为,在 $H^2(\Omega)$ 中,他们建立了拉回吸引子的存在性,证明了在时间趋于无穷时,任意全局弱解或强解收敛于单个稳态,并得到了其收敛速度. 众所周知,耗散演化方程解的渐近行为可以用它的全局吸引子来恰当地描述. 在许多问题中,初始状态的影响因子在一段时间以后就消失了,因此永久状态是极其重要的.

总的来说,在某种意义上,全局吸引子是相空间中一个较小的子集,它捕获了所涉及的无限维动力学系统的所有重要信息,其中包括所有的稳态、周期轨道和不稳定流形. 文献[10] 对 Cahn-Hilliard-Brinkman 系统在 $H^s(\Omega)(s = 1,2,3,4)$ 中全局吸引子的存在性以及分数维空间全局吸引子的存在性进行了证明. 本文对 Darcy-Cahn-Hilliard 系统在 $L^2(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ 中全局吸引子的存在性进行研究.

在本文中,取非线性项条件为 $f(s) = s^3 - s$,所有的 L^p 范数都用 $\|\cdot\|_p$ 表示,H^s 范数用 $\|\cdot\|_{H^s}$ 表示,用$(\cdot, \cdot)$ 表示 L^2 内积.

本文将得到弱解的一些能量估计以及渐近估计;定义半群 $S(t)$,通过一些渐近的能量估计以及结合半群理论、空间嵌入定理以及紧性引理来证明 $L^2(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ 全局吸引子的存在性.

1 弱解的适定性

通过分部积分将方程组变形,得到方程弱解[11] 的形式

$$(\boldsymbol{u}, \nabla q) = 0,\ \forall q \in H^1(\Omega) \tag{10}$$

$$\langle\varphi_t, v\rangle + (\nabla\mu, \nabla v) - (\varphi \cdot \boldsymbol{u}, \nabla v) = 0,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{11}$$

$$(\mu, \psi) - (\nabla\varphi, \nabla\psi) - (\varphi^3 - \varphi, \psi) = 0,\ \forall \psi \in H^1(\Omega) \tag{12}$$

该形式方程组也满足方程(5),(6),(7)的初边值条件

$$\frac{\partial\mu}{\partial\boldsymbol{n}}=\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{n}}=0,\ (x,t)\in\partial\Omega_T \tag{13}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}=0,\ (x,t)\in\partial\Omega_T \tag{14}$$

$$\varphi(\cdot,0)=\varphi_0(\cdot),\ x\in\Omega \tag{15}$$

定理 1　假设 $\varphi_0\in H^1(\Omega)$ 和 $J(\varphi_0)\leqslant C_0$，方程组(10)－(15)存在以下形式的弱解

$$(\nabla p+\varphi\nabla\mu,\nabla v)=0,\ \forall v\in H^1(\Omega)$$

$$(\varphi_t,q)+(\nabla\mu,\nabla q)+(\varphi(\nabla p+\varphi\nabla\mu),\nabla q)=0,\ \forall q\in H^1(\Omega)$$

$$(\mu,\phi)-(\nabla\varphi,\nabla\phi)-(f(\varphi),\phi)=0,\ \forall\phi\in H^1(\Omega)$$

$$\varphi\in L^\infty((0,T);H^1(\Omega))\cap L^2((0,T);H^3(\Omega))$$

$$\mu\in L^2((0,T);H^1(\Omega))$$

$$-\nabla p-\varphi\nabla\mu\in L^2((0,T);L^2(\Omega))$$

$$\varphi_t\in L^{\frac{8}{5}}((0,T);H^1(\Omega)^*)$$

当任意的 $t\in(0,T)$，方程组(10)－(15)满足以下估计：

$$\|\varphi\|_{H^1}^2\leqslant C_1$$

$$\int_0^t\|\mu(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s\leqslant C_2$$

$$\int_0^t\|\boldsymbol{u}(s)\|_2^2\leqslant C_3$$

$$\int_0^t\|\nabla\Delta\varphi(s)\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant C_4$$

$$\int_0^t\|\Delta\varphi(s)\|_2^4\mathrm{d}s\leqslant C_5$$

证　利用伽辽金近似方法，即用有限维逼近无限维，对 φ,p,μ 构造出近似解. 我们将使用 $H^1(\Omega)$ 的一组有限维的正交基向量 $\{\boldsymbol{\omega}_i\}_{i=1,\cdots,m}$，这些基向量所张成的空间我们记为 W_m，其中我们找到

$$p_m,\varphi_m,\mu_m:[0,T]\longrightarrow W_m$$

$$p_m=\sum_{i=1}^m p_{i,m}\omega_i$$

$$\varphi_m=\sum_{i=1}^m\varphi_{i,m}\omega_i$$

$$\mu_m=\sum_{i=1}^m\mu_{i,m}\omega_i$$

代入方程(10)－(12)可得

$$(\nabla p_m+\gamma\varphi_m\nabla\mu_m,\nabla q)=0\qquad\forall q\in H^1(\Omega) \tag{16}$$

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\varphi_m,v\right\rangle+\varepsilon(\nabla\mu_m,\nabla v)+(\varphi_m[\nabla p_m+\gamma\varphi_m\nabla\mu_m],\nabla v)=0\qquad\forall v\in H^1(\Omega) \tag{17}$$

$$(\mu_m,\psi)-\varepsilon(\nabla\varphi_m,\nabla\psi)-\frac{1}{\varepsilon}(f(\varphi_m),\psi)=0\qquad\forall\psi\in H^1(\Omega) \tag{18}$$

在方程(16)中令 $q=\omega_i$，$i=1,2,\cdots,m$，并同时乘$\frac{p_{i,m}}{\gamma}$，然后求和；在方程(17)中令 $v=\omega_i$，$i=1,2,\cdots,m$，并同时乘 $\mu_{i,m}$，再求和；在方程(18)中令 $\psi=\omega_i$，$i=1,2,\cdots,m$，同时乘$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_{i,m}$，再求和，最后将 3 个式子合并得到

$$\frac{\partial}{\partial t}[\|\nabla\varphi_m\|_{L^2}^2+(F(\varphi_m),1)]+\|\nabla\mu_m\|_{L^2}^2+\|\nabla p_m+\varphi_m\nabla\mu_m\|_{L^2}^2=0 \tag{19}$$

对方程(19)两边同时对时间变量 t 求积分，得

$$[\|\nabla\varphi_m\|_{L^2}^2+(F(\varphi_m),1)]+\int_0^t\|\nabla\mu_m\|_{L^2}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|\nabla p_m+\varphi_m\nabla\mu_m\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant C$$

因此

$$\varphi_m\in L^\infty((0,T);H^1(\Omega))$$
$$\boldsymbol{u}_m\in L^2((0,T);L^2(\Omega))$$
$$\mu_m\in L^2((0,T);H^1(\Omega))$$

利用方程(4)，

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta\varphi_m\|_2&\leqslant\|\nabla\mu_m\|_2+c\|\varphi_m\|_4^2\|\nabla\varphi_m\|_2^2+\|\nabla\varphi_m\|_2^2\leqslant\\&\|\nabla\mu_m\|_2+c\end{aligned}$$

故 $\varphi_m\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

在方程(3)中内乘 $\forall v\in H^1(\Omega)$，令 Φ 表示将标准的 L^2 空间映射到 H^1 空间的投射算子，

$$\begin{aligned}\langle(\varphi_m)_t,v\rangle=&\langle(\varphi_m)_t,\Phi v\rangle=\\&-(\nabla\mu_m,\nabla\Phi v)+(\varphi_m\cdot\boldsymbol{u}_m,\nabla\Phi v)\leqslant\\&\|\nabla\mu_m\|_2\|\nabla\Phi v\|_2+\|\boldsymbol{u}_m\|_2\|\varphi_m\|_\infty\|\nabla\Phi v\|_2\leqslant\\&C(\|\nabla\mu_m\|_2+\|\boldsymbol{u}_m\|_2\|\varphi_m\|_\infty)\|\nabla v\|_2\end{aligned}$$

对于 $\|\varphi_m\|_\infty$，利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式[12]

$$\|\varphi_m\|_\infty\leqslant C\|\Delta\varphi_m\|_2^{\frac{1}{4}}\|\varphi_m\|_6^{\frac{3}{4}}+C\|\varphi_m\|_6$$

$$\begin{aligned}\|\Delta\varphi_m\|_2^2=&-(\mu_m,\Delta\varphi_m)+((\varphi_m^3-\varphi_m),\Delta\varphi_m)\leqslant\\&\|\nabla\mu_m\|_2\|\nabla\varphi_m\|_2+\|\varphi_m\|_6^3\|\Delta\varphi_m\|_2+\|\nabla\varphi_m\|_2^2\leqslant\\&\frac{1}{2}\|\nabla\mu_m\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta\varphi_m\|_2^2+C\end{aligned}$$

得 $\|\varphi_m\|_\infty^8\leqslant c$. 结合先验估计，可以得到

$$\varphi_t\in L^{\frac{8}{5}}((0,T);H^1(\Omega)^*)$$

最后再结合 Aubin-Lions 引理以及勒贝格控制收敛定理[13]得证.

下面进行一些能量估计.

在方程(10)中取 $q=p$，在方程(11)中取 $v=\mu$，在方程(11)中取 $\psi=-\varphi_t$，并将3式相加得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}[\|\nabla\varphi\|_2^2+(F(\varphi),1)]+\|\nabla\mu\|_2^2+\|\nabla p+\varphi\nabla\mu\|_2^2=0\tag{20}$$

对任意的 $T>0$，同时对方程(20)取积分$(0,t)$，$t\in(0,T)$，则有：

$$J(\varphi)+\int_0^t[\|\nabla\mu\|_2^2+\|\boldsymbol{u}(s)\|_2^2]\mathrm{d}s=J(\varphi_0)\tag{21}$$

并利用 $F(s)\geqslant-c_0$，$(F(\varphi),1)\geqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2-\frac{3}{4}|\Omega|$，可得到

$$\|\varphi\|_{H^1}^2\leqslant C_1\tag{22}$$

再利用方程(21)，得到

$$\int_0^t\|\mu(s)\|_{H^1}^2\mathrm{d}s\leqslant C_2\tag{23}$$

$$\int_0^t\|\boldsymbol{u}(s)\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant C_3\tag{24}$$

对方程(4)的空间变量进行求导，得到

$$\nabla\mu=-\nabla\Delta\varphi+3\varphi^2\nabla\varphi-\nabla\varphi$$

利用范数估计以及 Ladyzhenskaya 不等式

$$\|\varphi\|_4 \leqslant c\|\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta\varphi\|_2 \leqslant \|\nabla\mu\|_2 + 3\|\varphi\|_4^2\|\nabla\varphi\|_2 + \|\varphi\|_2 \leqslant \\ \|\nabla\mu\|_2 + c\|\varphi\|_{H^1}\|\nabla\varphi\|_2\|\varphi\|_2 + \|\varphi\|_2 \leqslant \\ \|\nabla\mu\|_2 + C\end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^t \|\nabla\Delta\varphi(s)\|_2^2 \mathrm{d}s \leqslant C_4 \tag{25}$$

利用嵌入不等式

$$\int_0^t \|\Delta\varphi(s)\|_2^4 \mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|\nabla\varphi(s)\|_2^2 \|\varphi(s)\|_{H^3}^2 \mathrm{d}s$$

则有

$$\int_0^t \|\Delta\varphi(s)\|_2^4 \mathrm{d}s \leqslant c\int_0^t \|\varphi(s)\|_{H^3}^2 \mathrm{d}s \leqslant C_5 \tag{26}$$

接下来证明弱解的唯一性.

定理 2　假设 $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ 和 $J(\varphi_0) \leqslant C_0$，若函数空间 Γ 满足额外的光滑性条件：

$$\boldsymbol{u} \in L^3((0, T); L^2(\Omega))$$
$$\mu \in L^3((0, T); H^1(\Omega))$$

则在函数空间 Γ 中，方程组(10)－(15)存在唯一弱解.

证　假设(φ_1, p_1, μ_1)和(φ_2, p_2, μ_2)是方程组(10)－(15)的两组弱解，令 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$，$p=p_1-p_2$，$\mu=\mu_1-\mu_2$. 我们将两组弱解分别代入方程(10)－(12)，再合并得到

$$\boldsymbol{u} = -\nabla p - \varphi_1\nabla\mu - \varphi\nabla\mu_2 \tag{27}$$

$$\varphi_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1 + \boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi = \Delta\mu \tag{28}$$

$$\mu = -\Delta\varphi + \varphi_1^3 - \varphi_2^3 - \varphi \tag{29}$$

在方程(28)两边同时乘 φ，在方程(29)两边同时乘 μ，再对空间变量求积分，将两个方程相加，并利用 Ladyzhenskaya 不等式以及 Agmon 不等式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\|_2^2 + \|\mu\|_2^2 = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1, \varphi) + ((\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2-1)\varphi, \mu) \leqslant \\ &\|\boldsymbol{u}\|_2\|\nabla\varphi_1\|_2\|\varphi\|_\infty + \|(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2-1)\varphi\|_2\|\mu\|_2 \leqslant \\ &\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + c\|\nabla\varphi_1\|_2^2\|\Delta\varphi\|_2\|\varphi\|_2 + (\|\varphi_1\|_4^2 + \|\varphi_1\|_4\|\varphi_2\|_4 + \|\varphi_2\|_4^2)\|\varphi\|_\infty\|\mu\|_2 \leqslant \\ &\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \frac{1}{8}\|\Delta\varphi\|_2^2 + c\|\varphi\|_2^2 + (\|\varphi_1\|_4^2 + \|\varphi_1\|_4\|\varphi_2\|_4 + \|\varphi_2\|_4^2)\|\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\Delta\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\mu\|_2 \leqslant \\ &\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \frac{1}{8}\|\Delta\varphi\|_2^2 + c\|\varphi\|_2^2 + C\|\varphi\|_2\|\Delta\varphi\|_2 + \frac{1}{2}\|\mu\|_2^2 \leqslant \\ &\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\Delta\varphi\|_2^2 + c\|\varphi\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mu\|_2^2\end{aligned} \tag{30}$$

在方程(29)中乘 $\Delta\varphi$，对空间变量积分，得

$$\begin{aligned}\|\Delta\varphi\|_2^2 = -(\mu, \Delta\varphi) + ((\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2-1)\varphi, \Delta\varphi) \leqslant \\ \frac{1}{4}\|\Delta\varphi\|_2^2 + \|\mu\|_2^2 + c\|\varphi\|_\infty\|\Delta\varphi\|_2 \leqslant \\ \frac{1}{4}\|\Delta\varphi\|_2^2 + \|\mu\|_2^2 + c\|\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\Delta\varphi\|_2^{\frac{3}{2}} \leqslant \\ \frac{1}{2}\|\Delta\varphi\|_2^2 + \|\mu\|_2^2 + c\|\varphi\|_2^2\end{aligned}$$

在方程(27)中乘 $\boldsymbol{u}$，在方程(28)中乘 μ，在方程(29)中乘 $-\varphi_t$，分别同时积分并相加

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}\|_2^2+\|\nabla\mu\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\varphi\|_2^2+(\varphi_t,f(\varphi_1)-f(\varphi_2))=\\
&(\varphi\boldsymbol{u}_2,\nabla\mu)-(\varphi\boldsymbol{u},\nabla\mu_2)=\\
&-(\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi,\mu)+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi,\mu_2)\leqslant\\
&\|\boldsymbol{u}_2\|_2\|\nabla\varphi\|_3\|\mu\|_6+\|\boldsymbol{u}\|_2\|\nabla\varphi\|_3\|\mu_2\|_6\leqslant\\
&c(\|\boldsymbol{u}_2\|_2\|\mu\|_{H^1}+\|\boldsymbol{u}\|_2\|\mu_2\|_{H^1})(\|\Delta\varphi\|_2^{\frac{1}{3}}\|\nabla\varphi\|_2^{\frac{3}{2}}+\|\nabla\varphi\|_2)\leqslant\\
&\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\|\mu\|_{H^1}^2+\frac{1}{16}\|\Delta\varphi\|_2^2+C(\|\boldsymbol{u}_2\|_2^3+\|\mu_2\|_{H^1}^3)\|\nabla\varphi\|_2^2
\end{aligned}\tag{31}$$

结合 $\dot{f}(s)\geqslant-1$，利用拉格朗日中值定理

$$(\varphi_t,f(\varphi_1)-f(\varphi_2))=(\varphi_t,\dot{f}(\varepsilon_1)\varphi)\geqslant-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\|_2^2$$

因此方程(31)可变形为

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\|\boldsymbol{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla\mu\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\varphi\|_2^2-\frac{\partial}{\partial t}\|\varphi\|_2^2\leqslant\\
&\frac{1}{2}\|\mu\|_2^2+\frac{1}{16}\|\Delta\varphi\|_2^2+C(\|\boldsymbol{u}_2\|_2^3+\|\mu_2\|_2^3)\|\nabla\varphi\|_2^2
\end{aligned}\tag{32}$$

由方程(30),(31),(32)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|\varphi\|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^2)\leqslant c\|\varphi\|_2^2+C(\|\boldsymbol{u}_2\|_2^3+\|\mu_2\|_{H^1}^3)\|\nabla\varphi\|_2^2$$

结合定理假设条件以及 Gronwall 不等式[14]，知

$$\|\varphi\|_{H^1}^2\leqslant \mathrm{e}^{ct}\|\varphi_0\|_{H^1}^2$$

即 $\varphi_1=\varphi_2$.

2 渐近能量估计与全局吸引子

在方程(11)中令 $v=1$，得到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\Omega\varphi\,\mathrm{d}x=0$，即令 $\langle\varphi\rangle=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega\varphi\,\mathrm{d}x$，$I_0=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega\varphi\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega\varphi_0\,\mathrm{d}x$.

在方程(1),(3),(4)中分别乘 $\boldsymbol{u},\mu,\varphi$，并同时对空间变量求积分，3 个方程相加，由分部积分得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+F(\varphi)\mathrm{d}x\right)+\|\nabla\mu\|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^2+\|\boldsymbol{u}\|_2^2+\int_\Omega f(\varphi)\varphi\,\mathrm{d}x=\\
&-\int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi\mu\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\boldsymbol{u}\varphi\cdot\nabla\mu\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi\mu\,\mathrm{d}x=\\
&\int_\Omega\boldsymbol{u}\varphi\cdot\nabla\mu\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\boldsymbol{u}\varphi\cdot\nabla\mu\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi\mu\,\mathrm{d}x=\\
&\int_\Omega\varphi\mu\,\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{33}$$

对于等号右边的项，我们利用庞加莱不等式以及不等式估计有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\varphi\mu\,\mathrm{d}x=&\int_\Omega(\mu-\langle\mu\rangle+\langle\mu\rangle)\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\\
&\|\mu-\langle\mu\rangle\|_2\|\varphi\|_2+I_0|\Omega|\langle\mu\rangle\leqslant\\
&C\|\nabla\mu\|_2\|\varphi\|_2+I_0\int_\Omega\varphi^3\,\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|\nabla\mu\|_2\left(\int_\Omega\boldsymbol{F}(\varphi)+1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}+C|\boldsymbol{I}_0|\left(\int_\Omega F(\varphi)+1\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}\tag{34}$$

利用 $2F(s)\leqslant f(s)s$，Young 不等式以及方程(33),(34)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Omega}|\nabla\varphi|^2+2F(\varphi)\mathrm{d}x\right)+\|\nabla\mu\|_2^2+2\|\nabla\varphi\|_2^2+2\|\boldsymbol{u}\|_2^2+2\int_{\Omega}F(\varphi)\mathrm{d}x\leqslant C$$

通过 Gronwall 不等式得

$$\int_{\Omega}|\nabla\varphi|^2+2F(\varphi)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\Omega}|\nabla\varphi_0|^2+2F(\varphi_0)\right)\mathrm{e}^{-t}+C=J(\varphi_0)\mathrm{e}^{-t}+C$$

最后通过$(F(\varphi),1)\geqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2-\frac{3}{4}|\Omega|$可知，存在时间 T，当时间 t 满足 $t\geqslant T$ 时，有

$$\|\varphi\|_{H^1}\leqslant C_5 \tag{35}$$

$$\int_t^{t+1}\|\nabla\mu\|_2^2+2\|\boldsymbol{u}\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant C_6 \tag{36}$$

在方程(11) 中令 $v=\Delta^2\varphi$，则有

$$\langle\varphi_t,\Delta^2\varphi\rangle+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi,\Delta^2\varphi)=(\Delta\mu,\Delta^2\varphi)$$

利用 Young 不等式与 Ladyzhenskaya's 不等式得

$$\|\varphi\|_4\leqslant c\|\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1}^{\frac{1}{2}},\ n=2$$

以及 Agmon 不等式

$$\|\varphi\|_{\infty}\leqslant c\|\varphi\|_2^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^2}^{\frac{1}{2}},\ n=2$$

接着

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\Delta\varphi\|_2^2+\|\Delta^2\varphi\|_2^2=\\
&-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi,\Delta^2\varphi)+(6\varphi(\nabla\varphi)^2+3\varphi^2\Delta\varphi-\Delta\varphi,\Delta^2\varphi)\leqslant\\
&\|\boldsymbol{u}\|_2\|\Delta\varphi\|_4\|\nabla\Delta\varphi\|_4+6\|\varphi\|_6\|\nabla\varphi\|_6^2\|\Delta^2\varphi\|_2+3\|\varphi\|_{\infty}^2\|\Delta\varphi\|_2\|\Delta^2\varphi\|_2+\\
&\|\Delta\varphi\|_2\|\Delta^2\varphi\|_2\leqslant\\
&\|\boldsymbol{u}\|_2^2+c(\|\Delta\varphi\|_2+\|\nabla\Delta\varphi\|_2)(\|\nabla\Delta\varphi\|_2+\|\Delta^2\varphi\|_2)+\\
&C\|\Delta\varphi\|_2^2\|\Delta^2\varphi\|_2+c\|\Delta\varphi\|_2^2\|\Delta^2\varphi\|_2\leqslant\\
&\|\boldsymbol{u}\|_2^2+c\|\Delta\varphi\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta^2\varphi\|_2^2+c_1\|\nabla\Delta\varphi\|_2^2+C_1\|\Delta\varphi\|_2^4
\end{aligned}$$

利用(22),(24),(25),(26) 式以及 Gronwall 引理，当 $t\geqslant T+1$，得

$$\|\varphi\|_{H^2}\leqslant C_7 \tag{37}$$

为了得到全局吸引子，先介绍引理 1. 首先定义半群 $S(t)$，即一簇作用在 H^1 上的非线性算子

$$S(t):H^1\longrightarrow H^1:\varphi_0\longrightarrow\varphi(x,t)$$

并且满足：

$$S(0)=I$$

$$S(t+\tau)=S(t)S(\tau)$$

引理 1[15]　若 $S(t)$ 有一个有界的吸收集 B_1，并且这个吸收集 B_1 在 $H^1(\Omega)$ 是相对紧的，则 $S(t)$ 存在全局吸引子 Λ.

定理 3　假设 $u_0\in H^1(\Omega)$，在 $L^2(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ 中，方程组(10)－(15) 存在全局吸引子 Λ_0,Λ_1.

证　令

$$B_0=\{\varphi\in H^1:\|\varphi\|_{H^1}^2\leqslant c\}$$

$$B_1=\{\varphi\in H^2:\|\varphi\|_{H^2}^2\leqslant c\}$$

由方程(35) 以及方程(37) 知，对 $S(t)$ 来说，在 $L^2(\Omega)$ 中，B_0 是一个有界的吸收集，在 $H^1(\Omega)$ 中 B_1 是一个有界的(H^1,H^1)吸收集. 再由引理1 和紧性嵌入定理知 $H^1\hookrightarrow L^2$,$H^2\hookrightarrow H^1$，得到在 $L^2(\Omega)$,$H^1(\Omega)$ 中，方程组(10)－(15) 分别存在全局吸引子 Λ_0,Λ_1.

参考文献:

[1] LEE H G, LOWENGRUB J S, GOODMAN J. Modeling Pinchoff and Reconnection in a Hele-Shaw Cell. I. the Models and Their Calibration [J]. Physics of Fluids, 2002, 14(2): 492-513.

[2] JIANG J, WU H, ZHENG S M. Well-Posedness and Long-Time Behavior of a Non-Autonomous Cahn-Hilliard--Darcy System with Mass Source Modeling Tumor Growth [J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(7): 3032-3077.

[3] WISE S M. Unconditionally Stable Finite Difference, Nonlinear Multigrid Simulation of the Cahn-Hilliard-Hele-Shaw System of Equations [J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 44(1): 38-68.

[4] CAFFARELLI L, GUALDANI M, ZAMPONI N. Existence of Weak Solutions to a Continuity Equation with Space Time Nonlocal Darcy Law [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2020, 45(12): 1799-1819.

[5] DIB S, GIRAULT V, HECHT F, et al. A Posteriori Error Estimates for Darcy's Problem Coupled with the Heat Equation [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2019, 53(6): 2121-2159.

[6] ZHAO X P, LIU F N, MENG H C. Global Well-Posedness of Solutions for the Sixth Order Convective Cahn-Hilliard Equation[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2021, 41(2): 150-160.

[7] MARTINI M, SODINI G E. Numerical Methods for a System of Coupled Cahn-Hilliard Equations [J]. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2021, 12(1): 1-12.

[8] 刘彩凤. 三维 Cahn-Hilliard 方程的整体适定性 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2020, 50(6): 943-949.

[9] ANDERSON D M, MCFADDEN G B, WHEELER A A. Diffuse-Interface Methods in Fluid Mechanics [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1998, 30: 139-165.

[10] LI F, ZHONG C K, YOU B. Finite-Dimensional Global Attractor of the Cahn-Hilliard-Brinkman System [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(1): 599-616.

[11] FENG X B, WISE S. Analysis of a Darcy-Cahn-Hilliard Diffuse Interface Model for the Hele-Shaw Flow and Its Fully Discrete Finite Element Approximation [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2012, 50(3): 1320-1343.

[12] MIRANVILLE A. The Cahn-Hilliard Equation: Recent Advances and Applications [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.

[13] 周性伟, 孙文昌. 实变函数 [M]. 3版. 北京: 科学出版社, 2014.

[14] YE H P, GAO J M, DING Y S. A Generalized Gronwall Inequality and Its Application to a Fractional Differential Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1075-1081.

[15] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer, 1988.

责任编辑 张枸