DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.05.009

无界域上具有乘积噪声的随机反应-扩散方程一致随机吸引子的存在性①

李博文，　李晓军

河海大学理学院，南京 210098

摘要：本文旨在研究无界区域上带有乘性噪声的随机反应-扩散方程一致吸引子的存在性. 首先利用 Ornstein-Uhlenbeck 过程，将原方程转化为一个非自治随机动力系统. 之后，通过对解的一致估计，得到对应随机动力系统一致拉回随机吸收集的存在性. 最后，通过渐近尾部估计，来得到解的一致拉回渐近紧性，从而得到一致随机吸引子的存在性.

关　键　词：随机反应-扩散方程；一致随机吸引子；渐近紧性；O-U 过程；无界区域

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)05-0069-11

Existence of Uniform Random Attractors for Stochastic Reaction Diffusion Equations with Multiplicative Noise on Unbounded Domain

LI Bowen，　LI Xiaojun

School of Science, Hohai University, Nanjing 210098, China

Abstract: In this paper, the existence of uniform random attractor has been investigated for stochastic reaction-diffusion equation with multiplicative noise on unbounded domain. Firstly, the original equation has been transformed into a nonautonomous stochastic dynamical system by using the Ornstein-Uhlenbeck process. Then, by uniformly estimating the solutions, the existence of uniform pullback random absorption set for the corresponding stochastic dynamical system has been obtained. Finally, the asymptotic tail estimation is used to obtain the uniformly pullback asymptotic compactness of the solution, and the existence of uniformly random attractors been obtained.

Key words: stochastic reaction-diffusion equation; uniform random attractor; asymptotically compact; O-U process; unbounded region

本文考虑如下无界域上带有乘性噪声的随机反应-扩散方程生成的随机动力系统一致随机吸引子的存在性：

---

① 收稿日期：2021-06-14
基金项目：国家自然科学基金项目(11571092).
作者简介：李博文，硕士研究生，主要从事无穷维动力系统研究.

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = (\upsilon \Delta u - \lambda u - f_1(u) - a(x) f_2(u) + g(x, t)) \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} b_j u \circ \mathrm{d}\omega_j, \ t > \tau \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \tau \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

其中:υ,λ 是正常数;$g(x, t) \in \Sigma$ 是满足一定条件的外力项;b_j 是常数,$f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 是满足一定增长条件和耗散条件的光滑非线性函数;ω_j 是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$上的双边实值 Wiener 过程;$\mathscr{F}$ 是 Borel σ-代数;$\mathbb{P}$ 是相应的 Wiener 测度;“$\circ$”表示随机项是在 Stratonovich 积分意义下的.

本文假设 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 满足以下条件:对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,$u \in \mathbb{R}$,

$$f_1(u)u \geqslant \alpha_1 |u|^p - \beta_1 |u|^2, \ f_1(u)u \geqslant 0, \ f'_1(u) \geqslant -c, \ p \geqslant 2 \tag{2}$$

$$f_2(u)u \geqslant \alpha_2 |u|^p - \beta_2, \ f'_2(u) \geqslant -c, \ p \geqslant 2 \tag{3}$$

$$|f_1(u)| \leqslant \alpha_3 |u|^{p-1} + c_1, \ |f_2(u)| \leqslant \alpha_4 |u|^{p-1} + c_2 \tag{4}$$

$$a(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \ a(x) > 0 \tag{5}$$

其中:$\alpha_i > 0 (i = 1,2,3,4)$;$\beta_i, c_i > 0 (i = 1,2)$,$c > 0$. 当 $p > 2$ 时,有 $\alpha_1 > \beta_1$ 成立.

令 $F_2 = \int_0^u f_2(s) \mathrm{d}s$,满足如下条件:

$$\nabla a(x) \cdot \nabla F_2(u) \geqslant 0 \tag{6}$$

系统(1)是一非自治随机系统,含有确定的非自治项和随机项. 由于随机项的存在,在研究随机偏微分方程时,传统吸引子的理论[1-3]已无法应用. 文献[4-6]将传统吸引子的概念加以推广,提出了随机吸引子的概念,并建立了随机吸引子的相关理论. 之后,文献[7]利用该理论研究了非自治随机动力系统,并建立了随机吸引子存在的充分必要条件. 文献[8]研究了含有确定非自治项的随机偏微分方程一致随机吸引子的存在性,并给出相应的判定定理. 关于随机偏微分方程吸引子的其他结果可见文献[12-15].

本文用文献[8-10]中的方法研究系统(1)一致随机吸引子的存在性. 与以往的工作(如文献[7,9])相比,我们放宽了对系统(1)的非线性项 $f(x, u)$ 的一些假设,即它不一定满足条件:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) \right| \leqslant \psi_3(x) \tag{7}$$

为了表示方便,设有以下记号:$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的范数,$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的内积.

1 预备知识

本节将引入非自治随机动力系统的一些概念和理论[7-10].

令(X, d)为可分的 Banach 空间,X 上的非空集间的 Hausdorff 半距离定义为

$$\mathrm{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \ A, B \in 2^X \backslash \varphi$$

对于任意度量空间 M,我们用 $\mathscr{B}(M)$ 表示其上的 σ-代数. 令(Σ, d_Σ)为紧的 Polish 度量空间,且在如下意义下是不变的:

$$\vartheta_t \Sigma = \Sigma, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

其中 ϑ 为光滑的平移算子,若满足:

1) ϑ_0 是 Σ 上的恒等算子;

2) $\vartheta_s \circ \vartheta_t = \vartheta_{t+s}$,$\forall t, s \in \mathbb{R}$;

3) $(t, g) \mapsto \vartheta_t g$ 是连续的.

同时,我们定义$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$为概率空间,定义在其上的动力系统 $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 满足:

1) θ_0 是 Ω 上的恒等算子;

2) $\theta_t \Omega = \Omega$,$\forall t \in \mathbb{R}$;

3) $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{t+s}$,$\forall t, s \in \mathbb{R}$;

4) $(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$ 是$(\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}, \mathscr{F})$-可测;

5) $\mathbb{R}$-保测:$\mathbb{R}(\theta_t F) = \mathbb{R}(F)$,$\forall t \leqslant 0$,$F \in \mathscr{F}$.

分别作用在 Σ 和 Ω 上的两个群 $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 和 $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 称为基流.

定义 1　对于 $\varphi(t,\omega,g,x):\mathbb{R}^{+}\times\Omega\times\Sigma\times X\mapsto X$，若满足：

1) φ 是 $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^{+})\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\Sigma)\times\mathscr{B}(X),\mathscr{B}(X))$-可测的；

2) $\varphi(0,\omega,g,\cdot)$ 是 X 上的恒等映射，$\forall g\in\Sigma,\omega\in\Omega$；

3) 对每个固定的 $g\in\Sigma$，$x\in X$，$\omega\in\Omega$，有如下余圈性质成立：

$$\varphi(t+s,\omega,g,x)=\varphi(t,\theta_s\omega,\vartheta_s g)\circ\varphi(s,\omega,g,x),\ \forall t,s\in\mathbb{R}^{+}$$

则称 $\varphi(t,\omega,g,x)$ 为定义在 X，$(\Sigma,\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 和 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P},\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 上的非自治随机动力系统.

令 D 是 X 中的随机集族组成的集合.

定义 2　称 $K=K\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 为 φ 的 $\mathscr{D}$ 一致吸收集，若对任意的 $\omega\in\Omega$ 和 $B\in\mathscr{D}$，都存在 $T=T(\omega,B)$，使得

$$\varphi(t,\theta_{-t}\omega,\Sigma,B(\theta_{-t}\omega))\subset K(\omega),\ \forall t\geqslant T$$

其中

$$\varphi(t,\omega,\Sigma,B)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\ \bigcup_{X\in B}\varphi(t,\omega,\sigma,x)$$

称 $K=\{K(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 为 φ 的 $\mathscr{D}$ 一致吸引集，若对任意的 $\omega\in\Omega$，有

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega,\Sigma,B(\theta_{-t}\omega)),K(\omega))=0$$

定义 3　假设 φ 是定义在 Banach 空间 X 上的非自治随机动力系统，并且关于符号空间 Σ 和 X 连续. 若对任意的 $B\in\mathscr{D}$，$\omega\in\Omega$ 与序列 $\{t_n\}$，满足 $0<t_n\to\infty$ 和 $x_k\in B(\theta_{-tn}\omega)$，序列 $\{\varphi(t_n,\theta_{-tn}\omega,\Sigma,x_k)\}$ 于 X 中有收敛子序列，则称连续随机动力系统 φ 是 $\mathscr{D}$ 一致渐近紧的.

定义 4　若 $\mathscr{A}$ 属于 $\mathscr{D}$，且是最小的紧 $\mathscr{D}$ 一致吸引集，则称随机集 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 为 φ 的 $\mathscr{D}$ 一致吸引子.

定义 5　若对所有的 $\beta>0$，$\omega\in\Omega$，满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}B(\theta_t\omega)=0$$

则称随机有界集 $\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 关于 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是缓增的，其中 $\mathrm{d}(B)=\sup_{x\in B}\|\cdot\|_X$.

定理 1[8]　假设 φ 是定义在 Banach 空间 X 上的非自治随机动力系统，并且关于符号空间 Σ 和 X 连续. 若 φ 有闭的 $\mathscr{D}$ 一致吸收集 $B\in\mathscr{D}$，且 φ 在 X 上是 $\mathscr{D}$ 一致(拉回)渐近紧的，那么 φ 有唯一的 $\mathscr{D}$ 一致随机吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathscr{D}$，其中

$$\mathscr{A}(\omega)=W(\omega,\Sigma,B)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}\varphi(t,\theta_{-t}\omega,\vartheta_{-t}\Sigma,B(\theta_{-t}\omega))},\ \forall\omega\in\Omega$$

令 H 为一 Banach 空间，定义 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 上的平移算子群 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为

$$\vartheta_t g(\cdot)=g(\cdot+t),\ \forall t\in\mathbb{R},\ g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$$

若 g 的壳 $\mathscr{H}(g):=\overline{\{\vartheta_t g(\cdot):t\in\mathbb{R}\}}$ 是 $L^{2,\omega}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 中的紧集，则称 $g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 且是平移紧的.

命题 1[11]　假设 $g_0\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 于 $L^{2,\omega}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 中就平移紧的，那么

1) 平移算子 ϑ_t 在 $\mathscr{H}(g_0)$ 上按照 $L^{2,\omega}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 的拓扑是连续的；

2) g 的壳是平移不变的，即 $\mathscr{H}(g_0)=\vartheta_t\mathscr{H}(g_0)$，$\forall t\in\mathbb{R}$；

3) 任意函数 $g\in\mathscr{H}(g_0)$ 在 $L^{2,\omega}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 中是平移紧的，且 $\mathscr{H}(g)\subseteq\mathscr{H}(g_0)$；

4) 等价地，g_0 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 中是平移有界的，即

$$G(g_0):=\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_{\tau-1}^{\tau}\|g_0(s)\|^2\mathrm{d}s<\infty$$

5) 对任意的 $g\in\mathscr{H}(g_0)$，都有 $G(g)\leqslant G(g_0)$.

命题 2[8]　令 $g_0\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 且是平移有界的，有

$$\sup_{g\in\mathscr{H}(g_0)}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\lambda s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{G(g_0)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}},\ \forall\lambda>0$$

2　方程所对应的随机动力系统

本节中，我们建立方程(1)所对应的连续随机动力系统. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的群 $(\theta_{1,t})_{t\in\mathbb{R}}$：

$$\theta_{1,t}(h)=h+t,\ t,h\in\mathbb{R}$$

则$(\mathbb{R},(\theta_{1,t})_{t\in\mathbb{R}})$是一个参数动力系统.考虑概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$,其中$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k):\omega(0)=0\}$,$\mathscr{F}$是 Borel σ-代数,$\mathbb{P}$是相应的 Wiener 测度.定义$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$上的群$(\theta_{2,t})_{t\in\mathbb{R}}$:

$$\theta_{2,t}\omega(s)=\omega(s+t)-\omega(t),\ \omega\in\Omega,\ t,s\in\mathbb{R}$$

则$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P},(\theta_{2,t})_{t\in\mathbb{R}})$是一个遍历度量动力系统.

为了定义(1)所生成的连续随机动力系统,我们需要将(1)式转换成一个带随机变量的非自治动力系统.

给定布朗运动驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的稳态解:

$$t\mapsto z_j^*(\theta_{2,t}\omega_j):=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\sigma s}(\theta_{2,t}\omega_j)(s)\mathrm{d}s,\ t\in\mathbb{R},\ \sigma>0 \tag{8}$$

由文献[12]可知,$z_j^*(\theta_{2,t}\omega_j)$满足一维 $It\hat{o}$ 微分方程:

$$\mathrm{d}z_j^*(\theta_{2,t}w_j)+\sigma z_j^*(\theta_{2,t}w_j)\mathrm{d}t=\mathrm{d}\omega_j(t) \tag{9}$$

同时,随机变量$z_j^*(\theta_{2,t}\omega_j)$是缓增且连续的,并且满足条件:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z_j^*(\theta_{2,t}\omega)|}{|t|}=0,\ r(\omega) \tag{10}$$

又令

$$\delta(\theta_{2,t}\omega)=\sum_{j=1}^{k}b_jz_j^*(\omega),\ v(t)=\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}u(t) \tag{11}$$

其中u是方程(1)的解.则v满足方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v(t)}{\partial t}-\upsilon\Delta v(t)+(\lambda-\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega))v(t)=\\&-\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}(f_1(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v(t))+a(x)f_2(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v(t)))+\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}g(x,t)\end{aligned} \tag{12}$$

初值为

$$v(x,\tau)=v_\tau(x)=\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}u_\tau(x),\ x\in\mathbb{R}^n \tag{13}$$

通过 Galerkin 方法可知,对于任意的$t>\tau$,$\tau\in\mathbb{R}$,$v_\tau\in L^2(\mathbb{R}^n)$,在假设(2)-(5)下,方程(12)存在唯一的解$v=v(t,\tau,\omega,g,v_\tau)$,且$v(t,\tau,\omega,g,v_\tau)$关于初值$v_\tau(x)$连续(见引理 4).

定义映射$\varphi:\mathbb{R}^+\times\Omega\times\Sigma\times L^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$,有

$$\varphi(t,\tau,\omega,g,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,u_\tau)=\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,\tau}\omega)}v(t+\tau,\tau,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_\tau) \tag{14}$$

其中$u_\tau\in L^2(\mathbb{R}^n)$,$t\in\mathbb{R}^+$,$\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,从而$\varphi$是系统(1)所对应的非自治随机动力系统.

令B是$L^2(\mathbb{R}^n)$上一有界非空随机子集,记$\|B\|=\sup\limits_{\chi\in B}\|\chi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.假设$D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}$是$L^2(\mathbb{R}^n)$中的一个非空有界子集族,且对于任意的$\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$满足:

$$\lim_{s\to-\infty}\mathrm{e}^{\lambda_1 s}\|D(\tau+s,\theta_{2,s}\omega,\vartheta_{2,s}g)\|^2=0,\ 0<\lambda_1<\lambda \tag{15}$$

令$\mathscr{D}$为

$$\mathscr{D}=\{D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}:D\text{ 满足(15)式}\}. \tag{16}$$

3 解的一致估计

为了证明φ于$L^2(\mathbb{R}^n)$中$\mathscr{D}$一致吸引子的存在性,我们将给出系统(1)的一致估计,并且说明当时间足够大时,方程解的尾部估计是一致小的.首先,我们证明φ于$L^2(\mathbb{R}^n)$中存在$\mathscr{D}$一致吸收集.

引理 1 假设$g\in\mathscr{H}(g_0)$,$g_0\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$且平移有界,(2)-(5)式成立.则对任意的$v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\omega)$,$D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$,$\mathbb{P}$-a.e.的$\omega\in\Omega$,存在$T_D(\tau,\omega)>0$以及缓增随机变量$r_1(\omega)$,使得当$t\geqslant T_D(\tau,\omega)$时,满足:

$$\|v(\tau,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t}(\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g))\|^2\leqslant C(1+r_1(\omega)) \tag{17}$$

证 将(12)式与v在$L^2(\mathbb{R}^n)$中做内积,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|^2=-\upsilon\|\nabla v\|^2+(\sigma\delta(\theta_t\omega)-\lambda)\|v\|^2-\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}f_1(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v)v\mathrm{d}x-$$

$$e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n} a(x) f_2(e^{\delta(\theta_2,{}_t\omega)}v)v\mathrm{d}x + (e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}g(x,t),v) \tag{18}$$

现在对(18)式进行逐项估计，结合条件(2)－(5)，可得：

$$e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(e^{\delta(\theta_2,{}_t\omega)}v)v\mathrm{d}x = e^{-2\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(u)u\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{19}$$

$$e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\int_{\mathbb{R}^n} a(x) f_2(e^{\delta(\theta_2,{}_t\omega)}v)v\mathrm{d}x \geqslant e^{-2\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\alpha_2\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u|^p\mathrm{d}x - e^{-2\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\beta_2\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\mathrm{d}x \tag{20}$$

对于(18)式中最后一项，利用 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$(e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}g(x,t),v) \leqslant \frac{1}{2\lambda}e^{-\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\ \|g\|^2 + \frac{\lambda}{2}\ \|v\|^2 \tag{21}$$

由于 $a(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，结合(18)－(21)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|v\|^2 \leqslant -2\upsilon\ \|\nabla v\|^2 + (2\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega)-\lambda)\ \|v\|^2 + Ce^{-2\delta(\theta_2,{}_t\omega)} + \frac{1}{\lambda}e^{-2\delta(\theta_2,{}_t\omega)}\ \|g\|^2 \tag{22}$$

舍去(22)式中的不等式右边第一项，在$(\tau-t,\tau)$上应用 Gronwall 引理，得到

$$\begin{aligned}\|v(\tau,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2 \leqslant{}& e^{2\sigma\int_{\tau-t}^{\tau}\delta(\theta_2,{}_s\omega)\mathrm{d}s-\lambda t}\ \|v_{\tau-t}\|^2 + C\int_{\tau-t}^{\tau} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+\int_s^\tau(2\sigma\delta(\theta_2,{}_l\omega)-\lambda)\mathrm{d}l}\mathrm{d}s + \\ & \frac{1}{\lambda}\int_{\tau-t}^{\tau} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+\int_s^\tau(2\sigma\delta(\theta_2,{}_l\omega)-\lambda)\mathrm{d}l}\ \|g\|^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{23}$$

在(23)式中，用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，得到

$$\begin{aligned}\|v(\tau,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^2 \leqslant{}& e^{2\sigma\int_{-t}^{0}\delta(\theta_2,{}_s\omega)\mathrm{d}s-\lambda t}\ \|v_{\tau-t}\|^2 + C\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+\int_s^0(2\sigma\delta(\theta_2,{}_l\omega)-\lambda)\mathrm{d}l+\lambda s}\mathrm{d}s + \\ & \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_2,{}_l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\ \|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{24}$$

由(10)式可知

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{\delta(\omega)}{s}=0 \tag{25}$$

这意味着存在 $\kappa>0$，使得对任意的 $s<-\kappa$，满足

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{\delta(\omega)}{s}<\frac{\lambda}{4} \tag{26}$$

结合(25)－(26)式，可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_2,{}_l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\ \|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \\ &\frac{1}{\lambda}(\max_{-\kappa\leqslant s\leqslant 0}\{e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)}\}+1)\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{1}{2}\lambda(1-\sigma)s}\ \|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{27}$$

在(27)式中，令$\frac{1}{2}\lambda(1-\sigma)=\eta$. 则由命题 2 可知，

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\eta s}\ \|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{G(g_0)}{1-e^{\eta}} \tag{28}$$

因此，将(28)式代入(27)式中，可得

$$\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_2,{}_l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\ \|g(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\lambda}(\max_{-\kappa\leqslant s\leqslant 0}\{e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)}\}+1)\frac{G(g_0)}{1-e^{\eta}} < +\infty \tag{29}$$

注意到$\{D(\tau-t,\theta_{2,-t}\omega)\}\in\mathcal{D}$是缓增的，对任意的 $v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\theta_{2,-t}\omega)$，有

$$\lim_{t\to+\infty} e^{2\sigma\int_{-t}^{0}\delta(\theta_2,{}_s\omega)\mathrm{d}s-\lambda t}\ \|v_{\tau-t}\|^2=0 \tag{30}$$

令

$$r_1(\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_2,{}_l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\mathrm{d}s + \frac{1}{\lambda}(\max_{-\kappa\leqslant s\leqslant 0}\{e^{-2\delta(\theta_2,{}_s\omega)}\}+1)\frac{G(g_0)}{1-e^{\eta}} \tag{31}$$

由此，引理得证.

给定 $\omega \in \Omega$，令

$$K(\tau, \omega)=\{u \in L^2(\mathbb{R}^n): \| u \|^2 \leqslant C(1+r_1(\omega))\} \tag{32}$$

可知 $\{K(\tau, \omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in D$ 是一个 φ 的 D 一致吸收集.

引理 2 假设 $g \in \mathscr{H}(g_0)$，$g_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ 且平移有界，(2)－(5)式成立. 对任意的 $v_{\tau-t} \in D(\tau-t, \omega)$，$D=\{D(\tau, \omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$，$\mathbb{P}$－a.e.的 $\omega \in \Omega$，则存在 $T_D(\tau, \omega) \geqslant 1$，对所有的 $t \geqslant T_D(\tau, \omega)$，方程(12)－(13)的解 v 满足：

$$\int_{\tau-1}^{\tau} \| \nabla v(s, \tau-t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t}) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant r_2(\omega) \tag{33}$$

证 用 T 替代 τ，并用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，代入(23)式中，则对每个 $T \geqslant \tau-t$，$t \geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}&\| v(T, \tau-t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t}) \|^2 \leqslant \\ &\mathrm{e}^{2\sigma\int_{\tau-t}^{T}\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)\mathrm{d}s-\lambda t} \| v_{\tau-t} \|^2 + C\int_{\tau-t}^{T} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)+\int_s^T(2\sigma\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)-\lambda)\mathrm{d}l}\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{\lambda}\int_{\tau-t}^{T} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)+\int_s^T(2\sigma\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)-\lambda)\mathrm{d}l} \| g \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{34}$$

在(34)式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{2\sigma\int_T^{\tau}\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)\mathrm{d}s-\lambda(\tau-T)}$，并令 $\tau-t<T \leqslant \tau$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{2\sigma\int_T^{\tau}\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)\mathrm{d}s-\lambda(\tau-T)} \| v(T, \tau-t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t}) \|^2 \leqslant \\ &\mathrm{e}^{2\sigma\int_{\tau-t}^{\tau}\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)\mathrm{d}s-\lambda t} \| v_{\tau-t} \|^2 + C\int_{\tau-t}^{T} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)+\int_s^{\tau}(2\sigma\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)-\lambda)\mathrm{d}l}\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{\lambda}\int_{\tau-t}^{T} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)+\int_s^{\tau}(2\sigma\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)-\lambda)\mathrm{d}l} \| g \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{35}$$

对(22)式应用 Gronwall 引理，当 $\tau-t<T \leqslant \tau$ 时，有

$$\begin{aligned}&\| v(\tau, \tau-t, \omega, g, v_{\tau-t}) \|^2 \leqslant \mathrm{e}^{2\sigma\int_T^{\tau}\delta(\theta_2, s\omega)\mathrm{d}s-\lambda(\tau-T)} \| v(T, \tau-t, \omega, g, v_{\tau-t}) \|^2 + \\ &C\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)}\mathrm{d}s + \frac{1}{\lambda}\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \| g \|^2 \mathrm{d}s - \\ &2\upsilon\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \| \nabla v(s, \tau-t, \omega, g, v_{\tau-t}) \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{36}$$

故有

$$\begin{aligned}&\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \| \nabla v(s, \tau-t, \omega, g, v_{\tau-t}) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant \\ &\frac{1}{2\upsilon}\mathrm{e}^{2\sigma\int_T^{\tau}\delta(\theta_2, s\omega)\mathrm{d}s-\lambda(\tau-T)} \| v(T, \tau-t, \omega, g, v_{\tau-t}) \|^2 + C\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)}\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{2\upsilon\lambda}\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \| g \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{37}$$

用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，代入(37)式，并结合(35)式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_T^{\tau} \mathrm{e}^{2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \| \nabla v(s, \tau-t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t}) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant \\ &\frac{1}{2\upsilon}\mathrm{e}^{2\sigma\int_{-t}^{0}\delta(\theta_2, s\omega)\mathrm{d}s-\lambda t} \| v_{\tau-t} \|^2 + C\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{0}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{2\upsilon\lambda}\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{0}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s} \| g(s+\tau) \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{38}$$

用 $\tau-1$ 替代 T，代入(38)式中，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla v \|^2 \leqslant &\frac{1}{2\upsilon}\mathrm{e}^{2\sigma\int_{-t}^{0}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}s-\lambda t} \| v_{\tau-t} \|^2 + C\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, s\omega)+2\sigma\int_s^{0}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\mathrm{d}s + \\ &\frac{1}{2\upsilon\lambda}\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{-2\delta(\theta_2, , s\omega)+2\sigma\int_s^{0}\delta(\theta_2, l\omega)\mathrm{d}l+\lambda s} \| g(s+\tau) \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{39}$$

易知，对于 $s \in [\tau-1, \tau]$，

$$\int_{\tau-1}^{\tau} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l+\lambda(s-\tau)} \|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_{\tau-1}^{\tau} e^{-2\sigma\max\limits_{-1\leqslant l\leqslant 0}|\delta(\theta_{2,\,l}\omega)|-\lambda} \|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s \tag{40}$$

由于随机变量 $z(\theta_{2,\,t}\omega)$ 是缓增的，$v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\omega)$，结合(25)—(28)式，于是有

$$\frac{1}{2\upsilon\lambda}e^{2\sigma\max\limits_{-1\leqslant l\leqslant 0}|\delta(\theta_{2,\,l}\omega)|}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\delta(\theta_{2,\,s}\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_{2,\,l}\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\|g\|^2\mathrm{d}s <$$

$$c\,e^{2\sigma\max\limits_{-1\leqslant l\leqslant 0}|\delta(\theta_{2,\,l}\omega)|}\left(\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}\{e^{-2\delta(\theta_{2,\,s}\omega)}\}+1\right)\frac{G(g_0)}{1-e^{\eta}} \tag{41}$$

因此，存在 $T_D(\tau,\omega)\geqslant 1$，使得当 $t\geqslant T_D(\tau,\omega)$ 时，

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$e^{2\sigma\max\limits_{-1\leqslant l\leqslant 0}|\delta(\theta_{2,\,l}\omega)|+\lambda}\Big(1+C\int_{-\infty}^{0}e^{-2\delta(\theta_{2,\,s}\omega)+2\sigma\int_s^0\delta(\theta_{2,\,l}\omega)\mathrm{d}l+\lambda s}\mathrm{d}s+$$

$$\left(\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}\{e^{-2\delta(\theta_{2,\,s}\omega)}\}+1\right)\frac{G(g_0)}{1-e^{\eta}}\Big)\doteq r_2(\omega) \tag{42}$$

显然，$r_2(\omega)$ 是缓增的. 由此，引理得证.

引理 3　假设 $g\in\mathscr{H}(g_0)$，$g_0\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ 且平移有界，(2)—(5) 式成立. 则对任意的 $v_{\tau-t}\in D(\tau-t,\omega)$，$D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，$\mathbb{P}$—a.e.的 $\omega\in\Omega$，存在 $T_D(\tau,\omega)\geqslant 1$，对所有的 $t\geqslant T_D(\tau,\omega)$，方程(12)—(13) 的解 v 满足下列不等式

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^2\leqslant r(\omega) \tag{43}$$

其中 $r(\omega)$ 是缓增随机变量.

证　将(12) 式与 $-\Delta v$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|^2+\upsilon\|\Delta v\|^2+(\lambda-\sigma\delta(\theta_{2,\,t}\omega))\|\nabla v\|^2=$$

$$e^{-\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(f_1(u)+a(x)f_2(u))\Delta v\,\mathrm{d}x+e^{-\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}(g(x,t),-\Delta v) \tag{44}$$

首先我们对(44) 等式右边进行逐项估计.

考虑第一项，根据条件(2)—(5)，利用 Young 不等式，Holder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$e^{-\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}f_1(u)\Delta v\,\mathrm{d}x=-e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}f_1{}'(u)\,|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant c\,e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\|\nabla v\|^2 \tag{45}$$

$$e^{-\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}a(x)f_2(u)\Delta v\,\mathrm{d}x\leqslant c\,e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\|a(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|^2 \tag{46}$$

考虑第二项，

$$e^{-\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}(g(x,t),-\Delta v)\leqslant\frac{1}{2\upsilon}e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\|g\|^2+\frac{\upsilon}{2}\|\Delta v\|^2 \tag{47}$$

由(44)—(47) 式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|^2\leqslant 2(\sigma\delta(\theta_{2,\,t}\omega)-\lambda+c\,e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}(1+\|a\|_{L^1}))\|\nabla v\|^2+\frac{1}{\upsilon}e^{-2\delta(\theta_{2,\,t}\omega)}\|g\|^2 \tag{48}$$

类似引理 2，令 $T_D(\tau,\omega)\geqslant 1$ 是正常数. 当 $B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathscr{D}$ 时，将(48) 式在(s,τ) 上积分，其中 $s\in(\tau-1,\tau)$，我们有

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2\leqslant\|\nabla v(s,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2+\frac{1}{\upsilon}\int_s^\tau e^{-2\delta(\theta_{2,\,r}\omega)}\|g\|^2\mathrm{d}r+$$

$$2\int_s^\tau(\sigma\delta(\theta_{2,\,r}\omega)-\lambda+c\,e^{-2\delta(\theta_{2,\,r}\omega)}(1+\|a\|_{L^1}))\|\nabla v(r,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}r \tag{49}$$

将(49) 式对 s 在$(\tau-1,\tau)$ 上积分可得

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2\leqslant(1+2\lambda)\int_{\tau-1}^{\tau}\|\nabla v(s,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\upsilon}\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,r}\omega)}\|g\|^{2}\mathrm{d}r+2\int_{\tau-1}^{\tau}(\sigma\delta(\theta_{2,r}\omega)+$$
$$c\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,r}\omega)}(1+\|a\|_{L^{1}}))\|\nabla v(r,\tau-t,\omega,g,v_{\tau-t})\|^{2}\mathrm{d}r \tag{50}$$

在(50)式中用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，类似引理 1 中做法，结合(26)和(50)式可得

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^{2}\leqslant$$
$$(1+2\lambda)\int_{-1}^{0}\|\nabla v(r,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^{2}\mathrm{d}r+\frac{1}{\upsilon}\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,r-\tau}\omega)}\|g\|^{2}\mathrm{d}r \tag{51}$$

结合引理 1 和引理 2 可知，对任意的 $t\geqslant T_{D}(\tau,\omega)\geqslant 1$，有

$$\|\nabla v(\tau,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|^{2}\leqslant$$
$$(1+2\lambda+2\sigma\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}\{2\delta(\theta_{2,s}\omega)\}+2c\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}\{\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s}\omega)}\}(1+\|a\|_{L^{1}}))r_{2}(\omega)+$$
$$\frac{1}{\upsilon}(\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}\{\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,s}\omega)}\}+1)\frac{G(g_{0})}{1-\mathrm{e}^{\eta}}\doteq r(\omega) \tag{52}$$

注意到 $a(x)\in L^{1}(\mathbb{R}^{n})\cap L^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$，$a(x)>0$，故 $r_{2}(\omega)$ 是缓增的，容易证明 $r(\omega)$ 是缓增的，由此引理得证.

引理 4 假设 $g\in\mathscr{H}(g_{0})$，$g_{0}\in L_{\mathrm{loc}}^{2}(\mathbb{R};H)$ 且平移有界，且(2)－(5)式成立. 则方程(12)－(13)的解是$(\mathscr{F},\mathscr{B}(L^{2}(\mathbb{R}^{n})))$-可测，并且解关于初值 $v_{\tau}(x)$ 和 g 连续.

证 令 v_{1} 和 v_{2} 是方程(12)－(13)的两个解，令 $w(t)=v_{1}(t)-v_{2}(t)$，则 $w(\tau)=v_{1,\tau}(x)-v_{2,\tau}(x)$，且 $w(\tau)$ 满足

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t}-\upsilon\Delta w(t)+(\lambda-\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega))w(t)=-\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}[(f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{1}(t))-f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{2}(t)))+$$
$$a(x)(f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{1}(t))-f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{2}(t)))]+\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}(g_{1}(x,t)-g_{2}(x,t)) \tag{53}$$

将(53)式与 $w(t)$ 在 $\mathbb{R}^{n}$ 上做内积，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^{2}+\upsilon\|\nabla w\|^{2}+(\lambda-\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega))\|w\|^{2}=$$
$$\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}[-\int_{\mathbb{R}^{n}}(f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}(\theta_{2,t}\omega)v_{1}(t))-f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}(\theta_{2,t}\omega)v_{2}(t)))w\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbb{R}^{n}}a(x)(f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{1}(t))-f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{2}(t)))w\mathrm{d}x]+$$
$$\int_{\mathbb{R}^{n}}\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}(g_{1}(x,t)-g_{2}(x,t))w\mathrm{d}x \tag{54}$$

由条件(2)－(5)可得

$$-\int_{\mathbb{R}^{n}}(f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{1}(t))-f_{1}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{2}(t)))w\mathrm{d}x\leqslant c\int_{\mathbb{R}^{n}}\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}|w|^{2}\mathrm{d}x=c\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}\|w\|^{2} \tag{55}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^{n}}a(x)(f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{1}(t))-f_{2}(\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}v_{2}(t)))w\mathrm{d}x\leqslant c\|a(x)\|_{L^{\infty}}\mathrm{e}^{\delta(\theta_{2,t}\omega)}\|w\|^{2} \tag{56}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n}}\mathrm{e}^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}(g_{1}(x,t)-g_{2}(x,t))w\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\|g_{1}-g_{2}\|^{2}+\frac{\lambda}{2}\|w\|^{2} \tag{57}$$

结合(53)－(57)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^{2}+2\upsilon\|\nabla w\|^{2}+2(\lambda-\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega))\|w\|^{2}\leqslant$$
$$c\|w\|^{2}+\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\|g_{1}-g_{2}\|^{2}+\lambda\|w\|^{2} \tag{58}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^{2}\leqslant-2\upsilon\|\nabla w\|^{2}+(2\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega)+C)\|w\|^{2}+\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\|g_{1}-g_{2}\|^{2} \tag{59}$$

舍去不等式右边第一项，并运用 Gronwall 引理

$$\|w(t)\|^2 \leqslant e^{2\sigma\int_\tau^t \delta(\theta_{2,s}\omega)ds + C(\tau-t)}\|w(\tau)\|^2 + \frac{1}{\lambda}\int_\tau^t e^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)+2\sigma\int_s^t \delta(\theta_{2,l}\omega)dl + C(\tau-t)}\|g_1 - g_2\|^2 ds \tag{60}$$

由此，引理得证.

引理 5　假设 $g \in \mathscr{H}(g_0)$，$g_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ 且平移有界，(2)－(5) 式成立. 则对任意的 $v_{\tau-t} \in D(\tau - t, \omega)$，$D = \{D(\tau, \omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$，$\varepsilon > 0$，以及 $\mathbb{P}$－a.e.的 $\omega \in \Omega$，存在 $T^* = T^*(\tau, \omega, D, \varepsilon) \geqslant 1$ 和 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*(\tau, \omega, \varepsilon) > 0$，当 $t \geqslant T^*$ 时，(12)－(13) 的解 $v(t, \tau, \omega, g, v_{\tau-t})$ 满足

$$\int_{|x| \geqslant \mathbb{R}^*} |v(\tau, \tau - t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t}(\theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g))|^2 dx \leqslant \varepsilon \tag{61}$$

证　令 ρ 为一个光滑函数，且对于任意的 $s \in \mathbb{R}^+$，有 $0 \leqslant \rho(s) \leqslant 1$，且满足

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 1 & s \geqslant 2 \end{cases} \tag{62}$$

则存在一个常数 C，对于任意的 $s \in \mathbb{R}^+$，有 $|\rho'| \leqslant C$. 将(12) 式与 $\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中做内积可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx = {} & \upsilon\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta v)\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx + (\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega) - \lambda)\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx - \\ & e^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(f_1(u) + a(x)f_2(u))\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx + \\ & e^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}g\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx \end{aligned} \tag{63}$$

接下来对(63) 式采取逐项估计

$$\upsilon\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta v)\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx \leqslant -\upsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^2\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)dx + \frac{C}{k}(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2) \tag{64}$$

对于非线性项，可得

$$-e^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}(f_1(u) + a(x)f_2(u))\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx \leqslant \beta_2 e^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}a(x)\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)dx \tag{65}$$

对(63) 式中的最后一项，

$$e^{-\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}g\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)v\,dx \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)g^2 dx \tag{66}$$

综合(63)－(66) 式，可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx \leqslant \\ & (2\sigma\delta(\theta_{2,t}\omega) - \lambda)\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v|^2 dx + \frac{1}{\lambda}e^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)g^2 dx + \\ & \frac{C}{k}(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2) + 2\beta_2 e^{-2\delta(\theta_{2,t}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}a(x)\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)dx \end{aligned} \tag{67}$$

对(67) 式在$(\tau - t, \tau)$ 上运用 Gronwall 引理，并用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，我们得到当 $\tau \in \mathbb{R}$，$t \geqslant 0$ 且 $\omega \in \Omega$ 时，有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v(\tau, \tau - t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t})|^2 dx \leqslant \\ & e^{2\sigma\int_{\tau-t}^{\tau}\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)dl - \lambda t}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v_{\tau-t}|^2 dx + \\ & \int_{\tau-t}^{\tau}e^{2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)dl - \lambda(\tau-s) - 2\delta(\theta_{2,s-\tau}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda}g^2 + 2\beta_2 a(x)\right)dx\,ds + \\ & \frac{C}{k}\int_{\tau-t}^{\tau}e^{2\sigma\int_s^{\tau}\delta(\theta_{2,l-\tau}\omega)dl - \lambda(\tau-s)}\|v(s, \tau - t, \theta_{2,-\tau}\omega, \vartheta_{2,-\tau}g, v_{\tau-t})\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}ds \end{aligned} \tag{68}$$

现对(68) 式中不等式右边进行逐项估计. 首先由(30) 式得到，对任意的$\varepsilon > 0$，存在 $T_1 = T_1(\tau, \omega, D,$

$\varepsilon) \geqslant 1$，使得对所有的 $t \geqslant T_1$，满足

$$e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l-\lambda t}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v_{\tau-t}|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{69}$$

用 s 替代 τ，其中 $\tau-t<s<\tau$，并用 $\theta_{2,-\tau}\omega$ 替代 ω，用 $\vartheta_{2,-\tau}g$ 替代 g，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{k}\int_{\tau-t}^{\tau} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l-\lambda(\tau-s)}\|v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t}(\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-t}g))\|_{H^1}^2\mathrm{d}s \leqslant\\
&\frac{C}{k}e^{2\sigma\int_{\tau-t}^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l-\lambda t}\|v_{\tau-t}(\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g)\|^2+\\
&\frac{C}{k\lambda}\int_{-t}^{0} e^{2\sigma\int_m^0 \delta(\theta_{2,\,l}\omega)\mathrm{d}l+\frac{\lambda}{2}m-2\delta(\theta_{2,\,m}\omega)}\mathrm{d}m+\\
&\frac{C}{k\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{2\sigma\int_m^0 \delta(\theta_{2,\,l}\omega)\mathrm{d}l+\frac{\lambda}{2}m-2\delta(\theta_{2,\,m}\omega)}\|g(m+\tau)\|^2\mathrm{d}m
\end{aligned} \tag{70}$$

由 $g\in\mathscr{H}(g_0)$，$g_0\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};H)$ 且平移有界，结合(25)－(29)式可得，对任意的 $t\geqslant T_2$ 和 $k\geqslant R_1$，存在 $T_2=T_2(\tau,\omega,D,\varepsilon)>T_1$ 和 $R_1=R_1(\tau,\omega,\varepsilon)>0$，满足

$$\frac{C}{k}\int_{\tau-t}^{\tau} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l-\lambda(\tau-s)}\|v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|_{H^1}^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{71}$$

用 $\tau-t$ 替代 T，由(33)式可知，对任意的 $t\geqslant T_3$ 和 $k\geqslant R_2$，存在 $T_3=T_3(\tau,\omega,D,\varepsilon)>T_1$ 和 $R_2=R_2(\tau,\omega,\varepsilon)>0$，满足

$$\frac{C}{k}\int_{\tau-t}^{\tau} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l+\lambda(\tau-s)}\|\nabla v(s,\tau-t,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})\|_{H^1}^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{72}$$

再次利用命题2，结合(25)－(29)式，设 $a(x)\in L^1(R^n)\cap L^\infty(R^n)$，对任意的 $t\geqslant T_4$ 和 $k\geqslant R_3$，存在 $T_4=T_4(\tau,\omega,D,\varepsilon)>T_1$ 和 $R_3=R_3(\tau,\omega,\varepsilon)>0$，满足

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau-t}^{\tau} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l+\lambda(\tau-s)-2\delta(\theta_{2,\,s-\tau}\omega)}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)\frac{1}{\lambda}(g^2+2\beta_2 a(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant\\
&\int_{-\infty}^{0}\int_{|x|\geqslant k} e^{2\sigma\int_s^\tau \delta(\theta_{2,\,l-\tau}\omega)\mathrm{d}l+\lambda s-2\delta(\theta_{2,\,s}\omega)}\frac{1}{\lambda}(g^2(s+\tau)+2\beta_2 a(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned} \tag{73}$$

令 $T^*=T^*(\tau,\omega,D,\varepsilon)=\max\{T_1,T_2,T_3,T_4\}$，$R^*=R^*(\tau,\omega,\varepsilon)=\max\{R_1,R_2,R_3\}$，结合(68)－(73)式可得，对所有的 $t\geqslant T^*$ 和 $k\geqslant R^*$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\rho\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)|v(t,\tau,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})|^2\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \tag{74}$$

故有

$$\int_{|x|\geqslant\mathbb{R}^*}|v(t,\tau,\theta_{2,-\tau}\omega,\vartheta_{2,-\tau}g,v_{\tau-t})|^2\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \tag{75}$$

由此，引理得证.

4 一致吸引子的存在性

引理6 假设 $g\in\mathscr{H}(g_0)$，$g_0\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};H)$ 且平移有界，且(2)－(5)式成立. 则随机动力系统 φ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 D_H 一致拉回渐近紧的，即对 $\omega\in\Omega$，当 $t_n\to\infty$，$g\in\mathscr{H}(g_0)$，$u_{0,n}\in B(\theta_{-t_n}\omega)$ 时，序列 $\{\varphi(t_n,\vartheta_{-t_n}\omega,\theta_{-t_n}g,u_{0,n})\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有收敛子序列.

证 由引理4知，方程(1)的解关于初值Lipschitz连续，应用引理1,2,3,5，即可得证明.

下面给出本文所得结论：

定理2 假设 $g\in\mathscr{H}(g_0)$，$g_0\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};H)$ 且平移有界，且(2)－(5)式成立. 那么由方程(1)所对应的非自治随机动力系统 φ 存在唯一的 $\mathscr{D}$ 一致随机吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$.

证 由引理1、引理5及引理6，并应用定理1即可得结论.

参考文献：

[1] BABIN A V，VISHIK M I. Attractors of Evolution Equations North-Holland [M]. Amsterdam：North-Holland，1992.

[2] HALE J. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems [M]. Rhode Island：American Mathematical Society，2010.

[3] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York：Springer New York，1997.

[4] CRAUEL H，DEBUSSCHE A，FLANDOLI F. Random attractors[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations，1997，9(2)：365-393.

[5] CRAUEL H，FLANDOLI F. Attractors for Random Dynamical Systems [J]. Probability Theory and Related Fields，1994，100(3)：307-341.

[6] FLANDOLI F，SCHMALFUSS B. Random Attractors for the 3d Stochastic Navier-Stokes Equation with Multiplicative White Noise [J]. Stochastics and Stochastic Reports，1996，59(1-2)：21-45.

[7] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.

[8] CUI H Y，LANGA J A. Uniform Attractors for Non-Autonomous Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2017，263(2)：1225-1268.

[9] BATES P W，LU K N，WANG B X. Random Attractors for Stochastic Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains [J]. Journal of Differential Equations，2009，246(2)：845-869.

[10] LI X J. Uniform Random Attractors for 2D Non-Autonomous Stochastic Navier-Stokes Equations [J]. Journal of Differential Equations，2021，276(5)：1-42.

[11] CHEPYZHOV V，VISHIK M. Attractors for Equations of Mathematical Physics [M]. Providence：American Mathematical Society，2001.

[12] ARNOLD L. Random Dynamical Systems [M] Berlin：Springer，1995.

[13] LU K N，WANG B X. Wong - Zakai Approximations and Long Term Behavior of Stochastic Partial Differential Equations [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations，2019，31(3)：1341-1371.

[14] CARABALLO T，LANGA J，MELNIK V S，et al. Pullback Attractors of Nonautonomous and Stochastic Multivalued Dynamical Systems [J]. Set-Valued Analysis，2003，11(2)：153-201.

[15] WANG X H，LU K N，WANG B X. Wong-Zakai Approximations and Attractors for Stochastic Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains [J]. Journal of Differential Equations，2018，264(1)：378-424.

责任编辑　张栒