DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.06.006

一类具有超线性项的 Kirchhoff 方程的变号解[①]

张玲，　吕颖

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了一类 Kirchhoff 方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(u)\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

其中 $a,b>0$，位势函数 V 具有双位势阱，f 满足一类超三线性增长条件. 通过变分法，证明了最小能量变号解的存在性.

关　键　词： Kirchhoff 方程；变分法；变号解

中图分类号：O176.3　　　**文献标志码：A**　　　**文章编号：** 1000－5471(2022)06－0034－07

Existence of Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Type Equation with Superliner Nonlinearity

ZHANG Ling，　LÜ Ying

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract: In the present paper, the following Kirchhoff type equation

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(u)\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

has been considered, where $a,b>0$ and the potential V has double potential well, with a superliner nonlinearity f. With the help of the variational method, the existence of least energy sign-changing solutions has been shown.

Key words: Kirchhoff-type equation; variational method; least energy sign-changing solution

本文考虑如下一类 Kirchhoff 方程最小能量变号解的存在性：

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(u)\qquad x\in\mathbb{R}^3\tag{1}$$

其中 $a,b>0$，位势函数 V 具有双位势阱. 该类方程首次是由 D'Alembert 在研究伸缩绳的自由振动的经典波动方程时提出. Kirchhoff 问题具有广泛的研究意义，它在物理问题、人工智能和弹性理论等诸多领域都有十分广泛的应用. 在非线性项满足不同条件的假设下，关于 Kirchhoff 方程正解的存在性和多解性，以及

① 收稿日期：2021－08－20
基金项目：国家自然科学基金项目(11601438).
作者简介：张玲，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：吕颖，教授.

基态解的存在性已有很多结果[1-8]. 但是研究方程(1) 的变号解的文章很少[9-11]. 文献[11] 设 V 具有双位势阱，非线性项是渐近三次的，研究了方程(1) 最小能量变号解的存在性. 本文假设位势函数 V 有双位势阱，并且假设 f 满足超三次条件，研究了最小能量变号解的存在性. 在本文中，V 和 f 满足下列条件：

(V_1)　$V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$，$V(x) \geqslant 0$，并且存在 $c_0 > 0$，使得集合 $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) < c_0\}$ 的勒贝格测度是正的且有限的；

(V_2)　$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = 0\} \neq \varnothing$，并且存在两个有界的光滑区域 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$，使得 $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$；

(f_1)　$f(t) \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，存在常数 $2 < q < 2^*$ 使得 $|f(t)| \leqslant c(|t| + |t|^{q-1})$，其中 c 是正的常数；

(f_2)　当 $|t| \to 0$ 时，$f(t) = o(|t|)$；

(f_3)　当 $|t| \to \infty$ 时，$\dfrac{f(t)}{t^3} \to \infty$；

(f_4)　当 $t \in (0, \infty)$ 时，$\dfrac{f(t)}{t^3}$ 是严格单调递增的.

令 H 是加权索伯列夫空间

$$H = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u^2 \mathrm{d}x < +\infty\right\}$$

在 H 上的范数为

$$\| u \| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (a |\nabla u|^2 + V(x) |u|^2) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

方程(1) 的能量泛函 $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (a |\nabla u|^2 + V(x) u^2) \mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u) \mathrm{d}x$$

由条件(V_1),(f_1),(f_2) 易知 I 是连续可微的. 若 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 是方程(1) 的解且 $u^{\pm} \neq 0$，则 u 叫做方程(1) 的变号解，其中 $u^+ = \max\{0, u\}$，$u^- = \min\{0, u\}$. 若 u 是方程(1) 的一个变号解，且对任意的变号解 v 都有 $I(u) \leqslant I(v)$，则 u 叫做方程(1) 的最小能量变号解.

定义流形

$$\mathscr{M} = \{u \in H_0^1(\Omega) : u^{\pm} \neq 0, \langle I'(u), u^- \rangle = \langle I'(u), u^+ \rangle = 0\}$$

$$m = \inf\{I(u) : u \in \mathscr{M}\}$$

下面介绍本文的主要结果：

定理 1　假设条件(V_1) − (V_2) 和(f_1) − (f_4) 成立，则方程(1) 至少有一个最小能量变号解.

注 1　(i) 条件(V_2) 说明位势 V 具有双位势阱；

(ii) 结合条件(f_2),(f_3) 和(f_4)，对任意 $t \in \mathbb{R}$，有 $G(t) = \dfrac{1}{4} f(t) t - F(t) \geqslant 0$，且当 $|t| \to \infty$ 时，$G(t) \to +\infty$.

引理 1　若条件(V_1),(V_2) 和(f_1) − (f_4) 成立，则 $\mathscr{M} \neq \varnothing$.

证　令 $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$，其中 $i = 1,2$，并且 v_i 满足

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_i|^2 \mathrm{d}x\right) \Delta v_i = \mu_i v_i^3 \qquad x \in \Omega_i$$

其中

$$\mu_i = \inf\left\{\left(\int_{\Omega_i} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 : u \in H_0^1(\Omega_i), \int_{\Omega_i} |u|^4 \mathrm{d}x = 1\right\} \qquad i = 1,2$$

当 $x \in \Omega_i$ 时，令 $\bar{v}_i = (-1)^{i-1} v_i$；当$x \notin \Omega_i$ 时，令 $\bar{v}_i = 0$. 因为 Ω_i 的边界是光滑的，所以 $\bar{v}_i \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 且 $\operatorname{supp} \bar{v}_1 \cap \operatorname{supp} \bar{v}_2 = \varnothing$. 下面证明存在 $s > 0$ 和 $t > 0$，使得

$$\langle I'(s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2), s\bar{v}_1 \rangle = \langle I'(s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2), t\bar{v}_2 \rangle = 0$$

此等式可以等价为

$$\begin{cases} s^2\|\bar{v}_1\|^2+bs^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_1|^2\mathrm{d}x\right)^2+bA^2s^2t^2-\int_{\mathbb{R}^3}f(s\bar{v}_1)s\bar{v}_1\mathrm{d}x=0 \\ t^2\|\bar{v}_2\|^2+bt^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_2|^2\mathrm{d}x\right)^2+bA^2s^2t^2-\int_{\mathbb{R}^3}f(t\bar{v}_2)t\bar{v}_2\mathrm{d}x=0 \end{cases}$$

其中

$$A^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_1|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_2|^2\mathrm{d}x$$

考虑带参数 $\upsilon\in[0,1]$ 的方程组

$$\begin{cases} g_\upsilon(s,t)=s^2\|\bar{v}_1\|^2+bs^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_1|^2\mathrm{d}x\right)^2+\upsilon bA^2s^2t^2-\int_{\mathbb{R}^3}f(s\bar{v}_1)s\bar{v}_1\mathrm{d}x=0 \\ q_\upsilon(s,t)=t^2\|\bar{v}_2\|^2+bt^4\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{v}_2|^2\mathrm{d}x\right)^2+\upsilon bA^2s^2t^2-\int_{\mathbb{R}^3}f(t\bar{v}_2)t\bar{v}_2\mathrm{d}x=0 \end{cases} \tag{2}$$

令

$$U=\{\upsilon:\upsilon\in[0,1],\text{使得方程组(2)在 }\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\text{ 中有解}\}$$

首先证明 $0\in U$. 由于 $g_0(s,t)$ 与 t 无关，$q_0(s,t)$ 与 s 无关，则不失一般性，只需要证明存在 $s_1>0$，使得 $g_0(s_1,t)=0$ 成立.

$$g_0(s,t)=s^2a\int_{\Omega_1}|\nabla\bar{v}_1|^2\mathrm{d}x+s^4\left(b\mu_1\int_{\Omega_1}|\bar{v}_1|^4\mathrm{d}x-\int_{\Omega_1}\frac{f(s\bar{v}_1)}{(s\bar{v}_1)^3}|\bar{v}_1|^4\mathrm{d}x\right) \tag{3}$$

由条件(f_3)和(f_4)成立，有

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{\Omega_1}\frac{f(s\bar{v}_1)}{(s\bar{v}_1)^3}|\bar{v}_1|^4\mathrm{d}x>b\mu_1\int_{\Omega_1}|\bar{v}_1|^4\mathrm{d}x \tag{4}$$

结合(3)式和(4)式知，当 $s>0$ 足够大时，有 $g_0(s,t)<0$. 由 $g_0(s,t)$ 的解析式知，当 $s>0$ 足够小时，有 $g_0(s,t)>0$. 由 $g_0(s,t)$ 的连续性，则存在 $s_1>0$ 使得 $g_0(s_1,t)=0$. 因此得证 $0\in U$. 由条件(f_4)，有 $f'(t)t^2>3f(t)t$，则由隐函数定理可证明 U 在$[0,1]$上既是开集也是闭集，类似的证明可参见文献[12]. 故完成了引理 1 的证明.

引理 2 若条件(V_1),(V_2)和$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$成立，则 $\mathscr{M}$ 是 H 中的闭集.

证 当 $u\in\mathscr{M}$ 时，有 $\langle I'(u),u^\pm\rangle=0$，由条件$(\mathrm{f}_1)$，$(\mathrm{f}_2)$和索伯列夫嵌入定理，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得

$$\|u^\pm\|^2\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}f(u^\pm)u^\pm\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_1\|u^\pm\|^2+C_\varepsilon\|u^\pm\|^q$$

所以

$$\|u^\pm\|\geqslant c \tag{5}$$

假设$\{u_n\}\subset\mathscr{M}$，$u\in H$，且 $n\to+\infty$，在 H 中 $u_n\to u$，则 $u_n^\pm\to u^\pm$. 由(5)式可知 $\|u_n^\pm\|\geqslant c$，故 $u^\pm\neq0$. 因为$\{u_n\}\subset\mathscr{M}$，且在 H 中有 $u_n\to u$，故

$$\langle I'(u),u^+\rangle=\langle I'(u),u^-\rangle=0$$

因此有 $u\in\mathscr{M}$，即 $\mathscr{M}$ 在 H 中是闭集.

定义函数 $\varphi(s,t)=I(su^++tu^-)$.

引理 3 若条件$(\mathrm{V}_1)-(\mathrm{V}_2)$和$(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_4)$成立，假设 $u\in H$，并且 $u^\pm\neq0$，则：

(i) 若 $\varphi'_s(1,1)\leqslant0$ 且 $\varphi'_t(1,1)\leqslant0$，则存在唯一一对正数 $0<s_u,t_u\leqslant1$，使得 $s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$；

(ii) 若 $\varphi'_s(1,1)\geqslant0$ 且 $\varphi'_t(1,1)\geqslant0$，则存在唯一一对正数 $s_u,t_u\geqslant1$，使得 $s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$.

证

$$\begin{cases} \varphi'_s(s_u,t_u)=s_u\|u^+\|^2+bs_u^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\right)^2+\upsilon bA^2s_ut_u^2-\int_{\mathbb{R}^3}f(s_uu^+)u^+\mathrm{d}x=0 \\ \varphi'_t(s_u,t_u)=t_u\|u^-\|^2+bt_u^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x\right)^2+\upsilon bA^2s_u^2t_u-\int_{\mathbb{R}^3}f(t_uu^-)u^-\mathrm{d}x=0 \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$A^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x$$

结合条件$(f_1)-(f_4)$可得：当 $s_u>0$ 且足够小时，有 $\varphi'_s(s_u,s_u)>0$，$\varphi'_t(s_u,s_u)>0$；当 $t_u>0$ 且足够大时，有 $\varphi'_s(t_u,t_u)<0$，$\varphi'_t(t_u,t_u)<0$. 则存在 $0<r<R$，且对任意的 $r<s_u,t_u<R$，有

$$\varphi'_s(r,t_u)<0\qquad\varphi'_s(R,t_u)<0$$

$$\varphi'_s(s_u,r)>0\qquad\varphi'_s(s_u,R)>0$$

由 Miranda 定理，存在 s_u,t_u，并且 $r<s_u,t_u<R$，使得

$$\varphi'_s(s_u,t_u)=0\qquad\varphi'_t(s_u,t_u)=0$$

故 $s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$. 假设 s_u,t_u 存在但不唯一，结合条件(f_4)可推出矛盾，故存在唯一一对 s_u,t_u 使得 $s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$.

不失一般性，假设 $s_u\geqslant t_u>0$，由 $s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$，有

$$s_u\|u^+\|^2+bs_u^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\right)^2+bs_u^3\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x\geqslant$$
$$s_u\|u^+\|^2+bs_u^3\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\right)^2+bs_ut_u^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}f(s_uu^+)u^+\,\mathrm{d}x\tag{7}$$

根据 $\varphi'_s(1,1)\leqslant 0$，有

$$\|u^+\|^2+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\right)^2+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^-|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}f(u^+)u^+\,\mathrm{d}x\tag{8}$$

结合(7)式和(8)式，得到

$$\left(\frac{1}{s_u^2}-1\right)\|u^+\|^2\geqslant\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{f(s_uu^+)}{(s_uu^+)^3}-\frac{f(u^+)}{(u^+)^3}\right]|u^+|^4\mathrm{d}x$$

若 $s_u>1$，由条件(f_4)可推出是矛盾的. 因此有 $s_u\leqslant 1$，(i) 得证. 同理可证明(ii).

引理 4　若条件(V_1),(V_2)和$(f_1)-(f_4)$成立，则极小化序列$\{u_n\}\in\mathscr{M}$在 H 中是有界的.

证　令$\{u_n\}\in\mathscr{M}$是极小化序列，则有

$$m+o(1)=I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle=$$
$$\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(u_n)u_n-4F(u_n))\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\|u_n\|^2$$

因此，$\{u_n\}$ 在 H 中是有界的.

引理 5　若条件(V_1),(V_2)和$(f_1)-(f_4)$成立，则存在极小化序列$\{u_n\}\subset\mathscr{M}$，满足当 $n\to\infty$ 时有 $I'(u_n)\to 0$.

证　对任意 $u\in\mathscr{M}$，有

$$I(u)=I(u)-\frac{1}{4}\langle I'(u),u\rangle=\frac{1}{4}\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}G(u)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

即 I 在 $\mathscr{M}$ 中有下界，根据 Ekeland 变分原理知极小化序列$\{u_n\}\subset\mathscr{M}$满足

$$m\leqslant I(u_n)\leqslant m+\frac{1}{n}$$

$$I(v)\geqslant I(u_n)-\frac{1}{n}\|v-u_n\|\qquad\forall v\in\mathscr{M}\tag{9}$$

对任意的 n 和 $\varphi\in H$，定义函数 $h^{\pm}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$h^{\pm}(t,s,l)=$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla(u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)^{\pm}|^2+V(x)|(u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)^{\pm}|^2)\mathrm{d}x+$$

$$b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)^\pm|^2\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}f((u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)^\pm)(u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-)^\pm\,\mathrm{d}x$$

由 h 的定义可知 $h^\pm(0,0,0)=0$，且 $h^\pm(t,s,l)$ 是连续可微的. 令

$$v_n=u_n+t\varphi+su_n^++lu_n^-$$

则有

$$\frac{\partial h^+(t,s,l)}{\partial s}=2\int_{\mathbb{R}^3}(a\ \nabla v_n^+\nabla u_n^++V(x)v_n^+u_n^+)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(v_n^+)v_n^+u_n^++f(v_n^+)u_n^+)\mathrm{d}x+$$
$$2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n^+\nabla u_n^+\mathrm{d}x+2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n\nabla u_n^+\mathrm{d}x$$

因为 $u_n\in\mathscr{M}$，故有

$$\frac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial s}=2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u_n^+)(u_n^+)^2-f(u_n^+)u_n^+)\mathrm{d}x$$

由

$$\frac{\partial h^+(t,s,l)}{\partial l}=2\int_{\mathbb{R}^3}(a\nabla v_n^+\nabla u_n^-+V(x)v_n^+u_n^-)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(v_n^+)v_n^+u_n^-+f(v_n^+)u_n^-)\mathrm{d}x+$$
$$2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n^+\nabla u_n^-\mathrm{d}x+2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n\nabla u_n^-\mathrm{d}x$$

可得

$$\frac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial l}=2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x>0$$

同理可得

$$\frac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial l}=2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u_n^-)(u_n^-)^2-f(u_n^-)u_n^-)\mathrm{d}x$$
$$\frac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial s}=2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x>0$$

则由隐函数定理可知，存在常数 δ_n 和函数 $s_n(t),l_n(t)\in C^1((-\delta_n,\delta_n),\mathbb{R})$，使得 $s_n(0)=l_n(0)$，并且对任意的 $t\in(-\delta_n,\delta_n)$，有

$$h^\pm(t,s_n(t),l_n(t))=0 \tag{10}$$

即

$$v_n=u_n+t\varphi+s_n(t)u_n^++l_n(t)u_n^-\in\mathscr{M}\qquad\forall\,t\in(-\delta_n,\delta_n) \tag{11}$$

下证 $\{s'_n(0)\}$ 和 $\{l'_n(0)\}$ 是有界的. 根据(10)式，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial t}+\dfrac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial s}s'_n(0)+\dfrac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial l}l'_n(0)=0\\[2ex]\dfrac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial t}+\dfrac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial s}s'_n(0)+\dfrac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial l}l'_n(0)=0\end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\frac{\partial h^\pm(0,0,0)}{\partial t}=2\int_{\mathbb{R}^3}(a\nabla u_n^\pm\ \nabla\varphi^++V(x)u_n^\pm\ \varphi^\pm)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u_n^\pm)u_n^\pm\ \varphi^\pm+f(u_n^\pm)\varphi^\pm)\mathrm{d}x+$$
$$2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n^\pm\ \nabla\varphi^\pm\ \mathrm{d}x+2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^\pm|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n\nabla\varphi\mathrm{d}x$$

根据(12)式，有

$$s'_n(0)=\frac{1}{\det\boldsymbol{M}_1}\left(\frac{\partial h^-}{\partial t}\frac{\partial h^+}{\partial l}-\frac{\partial h^+}{\partial t}\frac{\partial h^-}{\partial l}\right)(0,0,0) \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial s} & \dfrac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial l}\\ \dfrac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial s} & \dfrac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial l}\end{bmatrix}$$

由$\{u_n\}$在 H 的有界性和简单计算，可得

$$\left|\left(\frac{\partial h^+}{\partial t}\frac{\partial h^-}{\partial l}-\frac{\partial h^-}{\partial t}\frac{\partial h^+}{\partial l}\right)(0,0,0)\right|\leqslant C\|\varphi\|$$

下证 $\det \boldsymbol{M}_1>0$.

$$\frac{\partial h^+(0,0,0)}{\partial s}=2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u_n^+)(u_n^+)^2-f(u_n^+)u_n^+)\mathrm{d}x<$$

$$2b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\right)^2-2\int_{\mathbb{R}^3}f(u_n^+)u_n^+\mathrm{d}x=$$

$$-2\|u_n^+\|^2-2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial h^-(0,0,0)}{\partial l}<-2\|u_n^-\|^2-2b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^+|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^-|^2\mathrm{d}x$$

并且结合(5)式，有

$$\det \boldsymbol{M}_1>4\|u_n^+\|^2\|u_n^-\|^2\geqslant c>0$$

再结合(13)式可得$\{s_n'(0)\}$是有界的，即对任意$\varphi\in H$，有$|s_n'(0)|<C\|\varphi\|$. 同理可得$l_n'(0)$是有界的. 根据(9)式和(11)式可推出

$$|I(u_n+t\varphi+s_n(t)u_n^++l_n(t)u_n^-)-I(u_n)|\leqslant\frac{1}{n}\|t\varphi+s_n(t)u_n^++l_n(t)u_n^-\|$$

令 $t\to 0^+$，则

$$|\langle I'(u_n),\varphi\rangle|\leqslant\frac{1}{n}\|\varphi+s_n'(0)u_n^++l_n'(0)u_n^-\|$$

由$\{u_n\}$,$\{s_n'(0)\}$和$\{l_n'(0)\}$的有界性，有

$$|\langle I'(u_n),\varphi\rangle|=o(1)\|\varphi\|$$

定理 1 的证明　由引理 4 和引理 5，可知存在极小化序列$\{u_n\}\subset\mathscr{M}$，满足

$$I(u_n)\to m\qquad I'(u_n)\to 0\tag{14}$$

由引理 4，可知$\{u_n\}$在 H 中是有界的，故在 H 中$u_n\rightharpoonup u$；在$L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$中 $u_n\to u$；对所有 $s\in[2,6)$，在 $\mathbb{R}^3$ 中 $u_n\to u$ 几乎处处成立.

下面证明当 $n\to\infty$ 时有 $\|u_n\|\to\|u\|$. 由(14)式，可得对任意的 $\varphi\in H$，有

$$a\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u\varphi\mathrm{d}x+bA\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\varphi\mathrm{d}x=0\tag{15}$$

其中

$$A=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=A$$

在(15)式中取 $\varphi=u^{\pm}$，于是有

$$\langle I'(u),u^{\pm}\rangle\leqslant 0$$

由引理 3 可知，存在$(s_u,t_u)\in(0,1]\times(0,1]$，使得

$$\bar{u}=s_uu^++t_uu^-\in\mathscr{M}$$

由条件(f_4)，有

$$m\leqslant I(\bar{u})=I(\bar{u})-\frac{1}{4}\langle I'(\bar{u}),\bar{u}\rangle=$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\|\bar{u}\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(\bar{u})u-4F(\bar{u}))\mathrm{d}x= \\
&\frac{1}{4}\|s_u u^+\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(s_u u^+)s_u u^+-4F(s_u u^+))\mathrm{d}x+ \\
&\frac{1}{4}\|t_u u^-\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(t_u u^-)t_u u^--4F(t_u u^-))\mathrm{d}x\leqslant \\
&\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(u)u-4F(u))\mathrm{d}x\leqslant \\
&\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(f(u_n)u_n-4F(u_n))\mathrm{d}x\right]= \\
&\liminf_{n\to\infty}\left(I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle\right)=m
\end{aligned}
$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|=\|u\|$，即在 H 中有 $u_n\to u$，且 $I(u)=m$，结合引理 2，定理 1 证毕.

参考文献：

[1] GUO Z J. Ground States for Kirchhoff Equations without Compact Condition [J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259: 2884-2902.

[2] JIN J H, WU X. Infinitely Many Radial Solutions for Kirchhoff-Type Problems in $\mathbb{R}^N$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 369: 564-574.

[3] CHENG B T. New Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Nonlocal Elliptic Kirchhoff-Type Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 394: 488-495.

[4] HE X M, ZOU W M. Existence and Concentration Behavior of Positive Solutions for a Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252: 1813-1834.

[5] XIE Q L, MA S W. Existence and Concentration of Positive Solutions for Kirchhoff-Type Problems with a Steep Well Potential [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 431: 1210-1223.

[6] XIE Q L. Bounded State Solution of Degenerate Kirchhoff Type Problem with a Critical Exponent [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 479: 1-24.

[7] 王雅琪，欧增奇. 带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(10): 89-94.

[8] 唐榆婷，唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(6): 81-86.

[9] MAO A M, ZHANG Z T. Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P. S. Condition [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 1275-1287.

[10] ZHANG Z T, PERERA K. Sign-Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 317: 456-463.

[11] XIE Q L. Least Energy Nodal Solution for Kirchhoff Type Problem with an Asymptotically 4-Linear Nonlinearity [J]. Applied Mathematics Letters, 2020, 102: 106-157.

[12] SHUAI W. Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problem in Bounded Domains [J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259: 1256-1274.

责任编辑 廖坤