第 47 卷　第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 6 月
Vol. 47　No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.06.007

涉及 Δ_λ 算子的 Kirchhoff 方程基态解的存在性[①]

陈佳[1,2]，　李麟[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；
2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

摘要：利用变分法，在 $\mathbb{R}^3$ 上讨论了一类涉及 Δ_λ 算子的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_\lambda u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta_\lambda u + V(x)u = f(x,u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

其中 a，b 是正常数，Δ_λ 是强退化椭圆算子，$V(x)$ 是强制位势. 在非线性项 $f(x,u)$ 满足超线性条件时得到该方程的最小能量解，即基态解.

关　键　词：Kirchhoff 方程；基态解；变分法

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)06-0041-04

Ground State Solution for Kirchhoff Equation Involving Δ_λ Operator

CHEN Jia[1,2]，　LI Lin[1,2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;*
2. *Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China*

Abstract: In this article, the variational method has been used to discuss a class of Kirchhoff equations involving the operators of Δ_λ on $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_\lambda u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta_\lambda u + V(x)u = f(x,u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

where a, b are positive constants, Δ_λ is a strongly degenerate elliptic operator, $V(x)$ is a coercive potential. The least energy solution of the equation is obtained under the condition that the nonlinear term $f(x,u)$ satisfies the superlinearity, i.e. the ground state solution.

Key words: Kirchhoff equation; ground state solution; variational methods

我们知道 Kirchhoff 方程考虑的是横向振动产生的弦长变化，具有较好的物理意义，同时吸引了大量学

---

① 收稿日期：2021-06-23
基金项目：重庆市教育委员会基金项目(KJQN20190081)；重庆市自然科学基金项目(2019jcyj-msxmX0115)；重庆工商大学基金项目(CTBUZDPTTD201909)；重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2021-112-109).
作者简介：陈佳，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：李麟，教授.

者们的关注. 文献[1]在 $\mathbb{R}^3$ 中通过变分方法得到当非线性项 f 满足次临界条件时 Kirchhoff 方程解的集中行为以及存在性结果. 随后，文献[2]考虑了具有临界增长的非线性项 f 的 Kirchhoff 方程的正解的多重性和集中性. 文献[3]运用单调性和全局紧性引理讨论了 Kirchhoff 方程正基态解的存在性，并且推广了文献[1]中的结果. 文献[4]讨论了非线性项 f 无紧性条件下 Kirchhoff 方程的基态解. 文献[5]考虑了具有一般位势的 Kirchhoff 方程的 Nehari-Pohozaev 型基态解. 对于 Kirchhoff 方程基态解的存在性问题已经得到广泛的研究，但对于 f 满足超线性条件时基态解的结果还很少. 受文献([1-9])的启发，本文主要考虑如下的 Kirchhoff 方程的基态解：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_\lambda u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta_\lambda u + V(x)u = f(x, u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1}$$

其中 a，b 是正常数，$\nabla_\lambda = (\lambda_1 \partial_{x_1} u, \cdots, \lambda_N \partial_{x_N} u)$，并且 Δ_λ 是强退化椭圆算子，具体形式为

$$\Delta_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2 \partial_{x_i}) \qquad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N): \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

关于该算子更多的性质，参见文献[10-13]. 这里非线性项 f 满足以下条件：

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，并且存在常数 $c_0 > 0$，$2 < p < 2_\lambda^*$，有

$$|f(x, t)| \leqslant c_0(|t| + |t|^{p-1}) \qquad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

其中 $2_\lambda^* = \dfrac{2Q}{Q-2}$，$Q$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 相对于一组扩张的齐次维度，更多细节可参见文献[10]；

(f_2) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x, t)}{|t|} \to 0$，对 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立；

(f_3) 存在 $\mu > 4$ 使得 $f(x, t)t \geqslant \mu F(x, t)$，$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

位势 $V(x)$ 满足如下条件：

(V) $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$，$\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$.

首先，定义空间

$$E = \{u: |\nabla_\lambda u|^2 + V(x)u^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$$

显然，E 是 Hilbert 空间，具有内积

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v + V(x)uv)\mathrm{d}x$$

和范数

$$\| u \|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla_\lambda u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x$$

为了方便，记 $\|\cdot\|$ 表示 E 的范数，$\|\cdot\|_q$ 表示空间 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 的范数. 显然，常数 $a > 0$，$\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla_\lambda u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla_\lambda u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x$ 是等价的，所以 u 在 E 上的范数为

$$\| u \|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (a|\nabla_\lambda u|^2 + u^2)\mathrm{d}x$$

其次，我们在 E 上定义方程对应的能量泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla_\lambda u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u)\mathrm{d}x \qquad \forall u \in E \tag{2}$$

不难得到 $J \in C^1(E, \mathbb{R})$，具有导数

$$\langle J'(u), v\rangle = (u, v) + b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} f(x, u)v\mathrm{d}x \qquad \forall u, v \in E \tag{3}$$

注 1 本文主要在 $\mathbb{R}^3$ 中讨论 Kirchhoff 方程基态解的存在性，最大的困难在于全空间 $\mathbb{R}^3$ 中我们无法得到嵌入紧性. 因此，为了找到 J 的临界点，我们将通过 Nehari 流形的方法寻找最小能量解，并且该解就是方程的解.

根据条件(f_1)－(f_3)以及标准的证明可知泛函 J 具有山路几何结构，从而有相应的序列$\{u_n\}\subset E$，使得 $J(u_n)\leqslant c$，$J'(u_n)\to 0(n\to\infty)$，即$\{u_n\}$为(PS)序列. 设

$$\mathcal{N}=\{u\in E\backslash\{0\}:\langle J'(u),u\rangle=0\}$$

并且$\inf\limits_{u\in\mathcal{N}}J(u)=m$，如果 $u\in\mathcal{N}$，$J(u)=m$，则 $u\in E$ 是基态解.

引理 1　设条件(f_1)－(f_3)和(V)成立，则任意的(PS)序列$\{u_n\}$是有界的.

证　设$\{u_n\}$为(PS)序列，就有 $J(u_n)\leqslant c$，$J'(u_n)\to 0$. 那么根据条件(f_3)可知

$$\begin{aligned}c+o(1)=&J(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle J'(u_n),u_n\rangle=\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{\mu}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2\end{aligned}\tag{4}$$

(4)式意味着$\{u_n\}$在 E 上有界.

引理 2　设条件(f_1)－(f_3)和(V)成立，则 $\mathcal{N}\neq\varnothing$，并且存在常数 $k>0$，使得 $\forall u\in\mathcal{N}$，$J(u)>k$.

证　根据引理 1，存在一个(PS)序列$\{u_n\}\subset E$，对某个 $M>0$ 有 $\|u_n\|\leqslant M$. 设$\{u_n\}$的子序列仍为$\{u_n\}$，使得在 E 中有 $u_n\rightharpoonup u_0$，在 $L^q(\mathbb{R}^3)(2<q<2_\lambda^*)$中有 $u_n\to u_0$. 下面通过反证法证明 $u_0\neq 0$. 假设 $u_0=0$，根据条件(f_1),(f_2)，对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 C_ε 使得

$$|F(x,t)|\leqslant\varepsilon t^2+C_\varepsilon t^p\qquad\forall x\in\mathbb{R}^3\tag{5}$$

由文献[14]的引理 2.2 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3\varepsilon C_2^2M^2}{4}+C_\varepsilon\lim_{n\to\infty}|u_n|_p^p=\frac{c}{4}$$

令 $\varepsilon=\dfrac{c}{3C_2^2M^2}$，$M^2=c$，因此我们可以得到

$$\begin{aligned}c+o(1)=&J(u_n)-\frac{1}{4}\langle J'(u_n),u_n\rangle=\\&\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right|\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{M^2}{4}+\frac{c}{4}+o(1)=\frac{c}{2}+o(1)\end{aligned}$$

显然这是矛盾的，所以 $u_0\neq 0$. 又根据文献[6]的引理 2.2 和条件(f_1)，可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u_0))v\mathrm{d}x=0\tag{6}$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n)-J'(u_0),v\rangle=\\&\lim_{n\to\infty}\Big[(u_n-u_0,v)+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_\lambda u_n\nabla_\lambda v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u_0|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_\lambda u_0\nabla_\lambda v\mathrm{d}x\right)-\\&\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u_0))v\mathrm{d}x\Big]=0\end{aligned}\tag{7}$$

从而得到

$$\langle J'(u_0),v\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n),v\rangle=0\qquad\forall v\in E$$

所以$\langle J'(u_0),v\rangle=0$，$u_0\neq 0$，得到 $\mathcal{N}\neq\varnothing$.

下面证明 $J(u)>k$. 因为对每一个 $u\in\mathcal{N}$都有$\langle J'(u),u\rangle=0$，所以由(5)式可以得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla_\lambda u|^2+u^2)\mathrm{d}x\leqslant&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla_\lambda u|^2+u^2)\mathrm{d}x+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u|^2\mathrm{d}x\right)^2=\\&\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)u\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_2^2+C\|u\|_p^p\leqslant C_1\|u\|^2+C_2\|u\|^p\leqslant\end{aligned}$$

$$C'(\|u\|^2+\|u\|^p)$$

因此，存在常数 $\gamma>0$，任取 $u\in\mathcal{N}$，使得 $\|u\|^2\geqslant\gamma$. 又根据条件(f_3)，可以推出

$$J(u)=J(u)-\frac{1}{\mu}\langle J'(u),u\rangle\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla_\lambda u|^2+u^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\gamma^2=k$$

所以存在常数 $k>0$，使得 $\forall u\in\mathcal{N}$，$J(u)>k$.

定理1 设条件(f_1)-(f_3)和(V)成立，则方程(1)存在一个基态解.

证 根据引理2，可以得到 $u_n\subseteq\mathcal{N}$，$m>0$，有 $J(u_n)\to m$. 由前面引理相似的证明，存在 $u\in E\backslash\{0\}$，使得在 E 中，$u_n\rightharpoonup u$；在 $x\in\mathbb{R}^3$ 中几乎处处有 $u_n\to u$. 并且 $J'(u)=0$，$J(u)\geqslant m$. 由法图引理可知

$$\begin{aligned}m&=\lim_{n\to\infty}J(u_n)=\lim_{n\to\infty}\left(J(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle J'(u_n),u_n\rangle\right)=\\&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{\mu}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\right]\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u\|^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{b}{\mu}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_\lambda u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}f(x,u)u-F(x,u)\right)\mathrm{d}x=\\&J(u)-\frac{1}{\mu}\langle J'(u),u\rangle=J(u)\geqslant m\end{aligned}$$

这就意味着 $u\in\mathcal{N}$，有 $J(u)=m$. 所以 $u\in E$ 是 J 的基态解.

参考文献：

[1] HE X M，ZOU W M. Existence and Concentration Behavior of Positive Solutions for a Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Differential Equations，2012，252(2)：1813-1834.

[2] WANG J，TIAN L X，XU J X，et al. Multiplicity and Concentration of Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with Critical Growth [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(7)：2314-2351.

[3] LI G B，YE H Y. Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Differential Equations，2014，257(2)：566-600.

[4] GUO Z J. Ground States for Kirchhoff Equations without Compact Condition [J]. Journal of Differential Equations，2015，259(7)：2884-2902.

[5] TANG X H，CHEN S T. Ground State Solutions of Nehari-Pohozaev Type for Kirchhoff-Type Problems with General Potentials [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2017，56(4)：1-25.

[6] TANG X H. Infinitely Many Solutions for Semilinear Schrödinger Equations with Sign-Changing Potential and Nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，401(1)：407-415.

[7] 余芳，陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J].西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：116-123.

[8] 蒙璐，储昌木，雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J].西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：82-88.

[9] 邵正梅，欧增奇. 具有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：25-29.

[10] CHEN J H，TANG X H，GAO Z. Infinitely Many Solutions for Semilinear Δ_λ-Laplace Equations with Sign-Changing Potential and Nonlinearity [J]. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica，2017，54(4)：536-549.

[11] KOGOJ A E，LANCONELLI E. On Semilinear Δ_λ-Laplace Equation [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2012，75(12)：4637-4649.

[12] KOGOJ A E，SONNER S. Attractors for a Class of Semi-Linear Degenerate Parabolic Equations [J]. Journal of Evolution Equations，2013，13(3)：675-691.

[13] KOGOJ A E，SONNER S. Attractors Met X-Elliptic Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2014，420(1)：407-434.

[14] LUYEN D T，TRI NGUYEN M. Existence of Infinitely Many Solutions for Semilinear Degenerate Schrödinger Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，461(2)：1271-1286.

责任编辑 廖坤