

拟线性 Kirchhoff 型问题解的存在性^①

邹小林

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 讨论了一类 p 阶 Kirchhoff Neumann 边界条件问题非平凡解的存在性. 当非线性项满足非线性边界条件以及临界条件时, 利用山路引理和集中紧性原理, 得到了该方程的一个非平凡解.

关键词: p 阶 Kirchhoff 方程; 非线性边界条件; 临界非线性增长; 山路引理; 集中紧性原理

中图分类号: O176.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)06-0045-07

Existence of Solutions for Quasilinear Kirchhoff Type Problem

ZOU Xiaolin

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a class of p -Kirchhoff type problem involving nonlinear Neumann boundary condition and critical nonlinear growth has been introduced. With the help of mountain pass lemma and the concentration compactness principle, the existence of nontrivial solution for the problem has been obtained.

Key words: p -Kirchhoff type problem; nonlinear boundary condition; critical nonlinear growth; mountain pass lemma; concentration compactness principle

考虑如下 p 阶 Kirchhoff 问题:

$$\begin{cases} M(\|u\|^p)(-\Delta_p u + |u|^{p-2}u) = |u|^{p^*-2}u & u > 0, x \in \Omega \\ M(\|u\|^p)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda|u|^{q-2}u & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域, $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是 Kirchhoff 函数. $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p -拉普拉斯算子, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示沿外法线的导数.

$$\|u\|^p = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \quad 1 < p < q < p^*$$

$p^* = \frac{Np}{N-p}$ 是临界索伯列夫指数, λ 是正实数.

① 收稿日期: 2022-01-13

作者简介: 邹小林, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析的研究.

问题(1) 有非局部项 $M(\|u\|^p)$, 因此问题(1) 是一个非局部问题, 与下面的 Kirchhoff 方程有关:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{l_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

方程(2) 由 Kirchhoff 提出, 该方程推广了弹性弦自由振动的经典 D'Alembert's 波动方程. 在之后, 有许多学者对 Kirchhoff 方程进行了研究, 可以参见文献[1-4].

对于带有狄利克雷边界条件的临界 Kirchhoff 问题, 可以参见文献[5-7]. 特别地, 文献[8] 用变分方法研究了如下问题解的存在性和多解性:

$$\begin{cases} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx\right) \Delta_p u = \lambda |u|^{s-1} + |u|^{p^*-1} & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中

$$1 < s < p < p^* = \frac{Np}{N-p} \quad N > p$$

$$M(t) = a + bt^m$$

并且 $\lambda > 0, a > 0, b > 0, p(m+1) < p^*$.

文献[9] 利用 Nehari 流形和纤维映射方法得到了下列问题弱解的多解性:

$$\begin{cases} M\left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx\right) (-\Delta_p u + |u|^{p-2}u) = |u|^{r-2}u & u > 0, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda |u|^{q-2}u & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

这里 $M(s) = a + bs^k$, 其中 $a, b, k > 0$. 并且 $1 < q < p < r < p^*$, λ 是一个正实数.

文献[10-12] 研究了具有非线性边界条件的问题. 文献[13] 利用集中紧性原理和山路引理研究了下列拟线性椭圆问题解的存在性和多解性:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-\alpha p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + h(x) |u|^{p-2}u = g(x) |u|^{r-2}u + |x|^{-b p^*} |u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ |x|^{-\alpha p} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda f(x) |u|^{q-2}u & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $1 < p < q < r < p^*$; $g(x) \geq 0, g(x) |x|^{br} \in L^a(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \alpha = \frac{p^*}{p^* - r}$; $g(x), f(x)$ 是连续函数.

受文献[13] 的启发, 我们考虑问题(1) 解的存在性. 我们对 Kirchhoff 函数 M 作如下假设:

(M₁) $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个连续函数, 存在 $M_0 > 0$, 使得对 $t > 0$, 有 $M(t) \geq M_0$;

(M₂) 存在 $\delta \in (\xi, 1]$, 使得对 $t > 0$, $\frac{M(t)}{t^{\frac{1}{\delta}-1}}$ 是非增的, 这里 $\xi = \max\left\{\frac{1}{p^*}, \frac{p}{q}\right\}$.

注意到, 由条件 (M₂) 可知, 当 $0 < t_1 < t_2$ 时, 对 $t > 0$, $\frac{1}{\delta} \hat{M}(t) - M(t)t$ 是非增的, 其中

$\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$. 特别地, 当 $t > 0$ 时, $\hat{M}(t) \geq \delta M(t)t$, 且当 $0 < t \leq 1$ 时, 有 $\hat{M}(t) \geq \hat{M}(1)t^{\frac{1}{\delta}}$; 当 $t \geq 1$ 时, 有 $\hat{M}(t) \leq \hat{M}(1)t^{\frac{1}{\delta}}$.

若 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$M(\|u\|^p) \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + u^{p-2} u \varphi) dx = \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u \varphi dx + \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$$

则称 u 是问题(1) 的弱解.

定理 1 假设 $1 < p < q < p^*$, 条件 (M₁), (M₂) 成立, 则存在 $\lambda_* > 0$, 使得对 $\forall \lambda \in [\lambda_*, +\infty)$,

问题(1) 至少有一个非平凡解.

定义 $X = W^{1,p}(\Omega)$ 为索伯列夫空间, 相应的范数为

$$\|u\|^p = \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx$$

当 $r \in [p, p^*)$ 时, 嵌入 $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$ 是紧的. 设 S 为嵌入 $X \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ 的最佳常数, 即

$$S = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|u\|^p}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}$$

问题(1) 的能量泛函为

$$I_{\lambda}(u) = \frac{1}{p} \hat{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma$$

易得 $I_{\lambda}(u) \in C^1(X, \mathbb{R})$, 于是对 $\forall \varphi \in X$, 有

$$\langle I'_{\lambda}(u), \varphi \rangle = M(\|u\|^p) \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + |u|^{p-2} u \varphi) dx - \int_{\Omega} |u|^{p^*-2} u \varphi dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^{q-2} u \varphi d\sigma$$

引理 1^[14, 定理2.8] 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是实 Banach 空间, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ 满足 $I(0) = 0$, 并且:

(i) 存在常数 $\rho, \alpha > 0$, 使得 $I|_{\partial B_{\rho}} \geq \alpha$;

(ii) 存在 $e \in X \setminus B_{\rho}$, 使得 $I(e) < 0$.

则常数 $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) \geq \alpha$, 且存在序列 $\{u_k\} \subset X$, 使得 $I(u_k) \rightarrow c$, $I'(u_k) \rightarrow 0$, 其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0, 1], X) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

引理 2 假设定理 1 的条件成立, 则:

(i) 存在常数 $\alpha, \rho > 0$, 使得 $\|u\| = \rho$ 时, 有 $I_{\lambda}(u) \geq \alpha$;

(ii) 存在 $e \in X$, 使得 $\|e\| > \rho$, 且 $I_{\lambda}(e) \leq 0$.

证 利用迹定理和索伯列夫不等式, 存在 $C_1 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &= \frac{\hat{M}(\|u\|^p)}{p} - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \geq \\ &\quad \frac{\delta}{p} M_0 \|u\|^p - \frac{1}{p^*} S^{\frac{p^*}{p}} \|u\|^{p^*} - \frac{\lambda}{q} C_1 \|u\|^q \end{aligned}$$

由 $1 < p < q < p^*$, 即得(i).

根据条件(M₂) 可得, 当 $1 \leq t$ 时, 有 $\hat{M}(t) \leq \hat{M}(1)t^{\frac{1}{\delta}}$. 因此, 固定 $u \in X \setminus \{0\}$, 当 k 充分大时, 可得

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(ku) &= \frac{1}{p} \hat{M}(k^p \|u\|^p) - \frac{k^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx - \frac{\lambda k^q}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \leq \\ &\quad \frac{\hat{M}(1)k^{\frac{p}{\delta}}}{p} \|u\|^{\frac{p}{\delta}} - \frac{k^{p^*}}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx - \frac{\lambda k^q}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \end{aligned}$$

即当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $I_{\lambda}(ku) \rightarrow -\infty$. 因此, 存在 $\|e\| > \rho > 0$, 使得 $I_{\lambda}(e) < 0$.

由引理 2 可知, 泛函 $I_{\lambda}(u)$ 满足山路定理的几何结构, 从而存在 $(PS)_{c_{\lambda}}$ 序列, 其中

$$c_{\lambda} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_{\lambda}(\gamma(t))$$

且

$$\Gamma = \{\gamma \in C[0, 1] \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

引理 3 如果条件(M₁) – (M₂) 和 $1 < p < q < p^*$ 成立, 则当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $c_{\lambda} \rightarrow 0$.

证 取 $u_0 \in X$ 使得 $\|u_0\|_{L^{p^*}} = 1$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{\lambda}(tu_0) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_{\lambda}(tu_0) = -\infty$$

从而存在 $t_\lambda > 0$, 使得

$$\sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu_0) = I_\lambda(t_\lambda u_0)$$

且 t_λ 满足

$$M(\|t_\lambda u_0\|^p) t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \|u_0\|^p = t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \int_\Omega |u|^{p^*} dx + \lambda t_\lambda^q \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma$$

下证当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, $t_\lambda \rightarrow 0$.

事实上, $\{t_\lambda\}$ 是有界的.

由条件 (M_2) 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \hat{M}(\|t_\lambda u_0\|^p) &\geq M(\|t_\lambda u_0\|^p) t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \|u_0\|^p = \\ &t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \int_\Omega |u_0|^{p^*} dx + \lambda t_\lambda^q \int_{\partial\Omega} |u_0|^q d\sigma \geq t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \int_\Omega |u_0|^{p^*} dx \end{aligned} \quad (3)$$

不妨假设对 $\lambda > 0$, 有 $t_\lambda \geq 1$. 从(3)式可以得到

$$t_\lambda^{\frac{p}{p^*}} \int_\Omega |u_0|^{p^*} dx \leq \frac{1}{\delta} \hat{M}(\|t_\lambda u_0\|^p) \leq \frac{1}{\delta} \hat{M}(1) t_\lambda^{\frac{1}{\delta}} \|u_0\|^{\frac{1}{\delta}}$$

由 $\delta \in (\xi, 1]$ 可知 $\{t_\lambda\}$ 是有界的. 则存在序列 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$ 和 $t_0 \geq 0$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\lambda_n \rightarrow +\infty$, $t_{\lambda_n} \rightarrow t_0$,

$$M(\|t_{\lambda_n} u_0\|^p) t_{\lambda_n}^{\frac{p}{p^*}} \|u_0\|^p = t_{\lambda_n}^{\frac{p}{p^*}} \int_\Omega |u_0|^{p^*} dx + \lambda_n t_{\lambda_n}^q \int_{\partial\Omega} |u_0|^q d\sigma$$

若 $t_0 > 0$, 可得

$$M(\|t_0 u_0\|^p) t_0^{\frac{p}{p^*}} \|u_0\|^p = \infty$$

这是不可能的. 因此当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $t_\lambda \rightarrow 0$, 则有

$$0 < c_\lambda \leq I_\lambda(t_\lambda u_0) \leq \frac{1}{p} \hat{M}(\|t_\lambda u_0\|^p) \rightarrow 0$$

从而存在 $\lambda_* > 0$, 使得 $\lambda \geq \lambda_*$,

$$\sup I_\lambda(tu) < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) (M_0 S)^{\frac{N}{p}}$$

引理 4 若 $c_\lambda < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) (M_0 S)^{\frac{N}{p}}$, 则 $I_\lambda(u)$ 满足 $(PS)_{c_\lambda}$ 条件.

证 步骤 1 证明 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列的有界性.

设 $\{u_n\} \subset X$ 是 $I_\lambda(u)$ 的一个 $(PS)_{c_\lambda}$ 序列, 即当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c_\lambda \quad I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \quad (4)$$

则

$$\begin{aligned} 1 + c_\lambda + o(\|u_n\|) &\geq \\ I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle &= \\ \frac{1}{p} \hat{M}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{q} M(\|u_n\|^p) \|u_n\|^p &+ \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \geq \\ \left(\frac{\delta}{p} - \frac{1}{q}\right) M_0 \|u_n\|^p \end{aligned}$$

因为 $\delta \in (\xi, 1]$, $1 < p < q < p^*$, 则 $\{u_n\}$ 是 X 上的有界序列.

步骤 2 证明在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中, $u_n \rightarrow u$.

由步骤 1 可知, $\{u_n\}$ 在 X 上有界, 从而存在弱收敛子列, 仍然记为 $\{u_n\}$, 在 X 中, $\{u_n\}$ 是弱收敛的, $u_n \rightharpoonup u$; 在 $L^r(\Omega)$ 中, $\{u_n\}$ 是强收敛的, $u_n \rightarrow u$, 其中 $r \in (p, p^*)$; 在 Ω 中, $u_n \rightarrow u$ 几乎处处成立. 运用文献[13]中引理 4.1 的集中紧性原理, 在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ 中有

$$\|u_n\|^p \rightharpoonup \mu \quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$$

这里 μ, ν 是非负有界测度, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的有界测度空间. 在至多可数的集 J 上, 存在 $\mathbb{R}^N$ 中的不相等的点族 $\{x_j \in \Omega \mid j \in J\}$, 以及一个正数族 $\{v_j \in \Omega \mid j \in J\}$, 使得

$$\begin{cases} \mu \geq \|u\|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta x_j & \mu_j > 0 \\ \nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta x_j & \nu_j > 0 \\ \mu_j \geq S \nu_j^{\frac{p}{p^*}} \end{cases} \quad (5)$$

其中 δx_j 是 x_j 上的 Dirac 测度. 定义函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{x_j \in J} \text{dist}(x_j, \partial\Omega)$, 使得在 $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$ 中, $\varphi \equiv 1$; 在 $\Omega \setminus B_\varepsilon(x_j)$ 中, $\varphi = 0$; 且存在 $C_2 > 0$ 使得 $|\nabla \varphi| \leq C_2$. 由(4)式可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \varphi \rangle = 0$$

即

$$\begin{aligned} & M(\|u_n\|^p) \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n \varphi + |u_n|^p \varphi) dx = \\ & -M(\|u_n\|^p) \int_\Omega u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx + \int_\Omega |u_n|^{p^*-1} u_n \varphi dx + \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-1} u_n \varphi d\sigma + o(1) \end{aligned} \quad (6)$$

由 $\{\|u_n\|\}$ 有界和勒贝格控制收敛定理以及迹定理, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-1} \varphi u_n d\sigma = 0 \quad (7)$$

由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| M(\|u_n\|^p) \int_\Omega u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx \right| \leq \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u_n \nabla \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} M(\|u_n\|^p) \leq \\ & C_3 \left(\int_{B(x_j, \varepsilon)} |\nabla \varphi|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_j, \varepsilon)} |u_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_4 \left(\int_{B(x_j, \varepsilon)} |u_n|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由(6), (7), (8)式以及条件 (M_1) 可得 $M_0 \int_\Omega \varphi d\mu \leq \int_\Omega \varphi d\nu$, 即 $M_0 \mu_j \leq \nu_j$. 由(5)式可得 $\nu_j \geq$

$(M_0 S)^{\frac{N}{p}}$ 或 $\nu_j = 0$. 接下来证明 $\nu_j \geq (M_0 S)^{\frac{N}{p}}$ 是不可能的. 假设存在 j_0 , 使得 $\nu_{j_0} \geq (M_0 S)^{\frac{N}{p}}$, 得到

$$\begin{aligned} c_\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_\lambda(u_n) - \frac{1}{q} \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle \right) \geq \\ & \frac{1}{p} \hat{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{q} M(\|u\|^p) \|u\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega |u|^{p^*} dx \geq \\ & \left(\frac{\delta}{p} - \frac{1}{q} \right) M_0 \|u\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega |u|^{p^*} dx \geq \\ & \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_{j_0} \geq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) (M_0 S)^{\frac{N}{p}} \end{aligned}$$

矛盾, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \rightarrow \int_\Omega |u|^{p^*} dx$.

步骤 3 证明在 X 中, $u_n \rightarrow u$.

由(4)式可知,在 X^* 中, $I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$;在 X 中, $u_n \rightharpoonup u$.于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$.所以

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle I'_\lambda(u_n), u_n - u \rangle = \\ &= M(\|u_n\|^p) \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u) + |u_n|^{p-2} u_n(u_n - u)) dx - \\ &= \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n(u_n - u) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-2} u_n(u_n - u) d\sigma \end{aligned} \quad (9)$$

由 Hölder 不等式和 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^{p^*}(\Omega)$ 中强收敛,可得

$$\left| \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n(u_n - u) dx \right| \leq \left(\int_\Omega (|u_n|^{p^*-1})^{\frac{p^*}{p^*-1}} dx \right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \rightarrow 0 \quad (10)$$

由 Hölder 不等式和迹嵌入定理,对 $r \in [p, p^*)$, 嵌入 $X \hookrightarrow L^r(\partial\Omega)$ 是紧的,可得

$$\begin{aligned} \left| \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-2} u_n(u_n - u) d\sigma \right| &\leq \left| \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-1} (u_n - u) d\sigma \right| \leq \\ &= \lambda \left(\int_{\partial\Omega} |u_n|^q d\sigma \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\partial\Omega} |u_n - u|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

由(9)–(11)式和 $\{M(\|u_n\|^p)\}$ 是有界的,可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u) + |u_n|^{p-2} u_n(u_n - u)) dx = 0 \quad (12)$$

在证明中将会用到下面不等式:

$$|\xi - \eta|^p \leq \begin{cases} C_{1p} (|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta)(\xi - \eta) & p \geq 2 \\ C_{2p} [(|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta)(\xi - \eta)]^{\frac{p}{2}} (|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{2}} & 1 < p < 2 \end{cases} \quad (13)$$

其中 C_{1p}, C_{2p} 是与 p 有关的正数.

分为以下两种情况讨论:

情形 1 当 $p \geq 2$ 时,由(12),(13)式以及 $\{u_n\}$ 在 X 中弱收敛, $u_n \rightharpoonup u$, 可得

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^p &= \int_\Omega (|\nabla(u_n - u)|^p + |u_n - u|^p) dx \leq \\ &= C_{1p} \int_\Omega [(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) + (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u)(u_n - u)] dx = \\ &= C_{1p} \int_\Omega [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u)] dx - \\ &= C_{1p} \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) + |u|^{p-2} u (u_n - u)) dx = \\ &= o_n(1) + \langle u, u_n - u \rangle = o_n(1) \end{aligned}$$

情形 2 当 $1 < p < 2$ 时, $\{\|u_n\|\}$ 是有界的. 对所有 $a, b > 0$, 有

$$(a+b)^{\frac{2-p}{2}} \leq a^{\frac{2-p}{2}} + b^{\frac{2-p}{2}}$$

我们有

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^p &\leq C_{2p} \left[\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u)) dx - \right. \\ &\quad \left. \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) + |u|^{p-2} u (u_n - u)) dx \right]^{\frac{p}{2}} (\|u_n\|^p + \|u\|^p)^{\frac{2-p}{2}} = o_n(1) \end{aligned}$$

所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{u_n\}$ 在 X 中强收敛于 u .

定理 1 的证明

由引理 3 可知,当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, $0 < c_\lambda \rightarrow 0$, 所以存在 $\lambda_* > 0$, 当 $\lambda \geq \lambda_*$ 时, 有

$$c_\lambda < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) (M_0 S)^{\frac{N}{p}}$$

通过引理 4 可知 $I_\lambda(u)$ 满足 $(PS)_{c_\lambda}$ 条件, 由极大极小值原理可知, 泛函 I_λ 在 c_λ 处存在临界点 u_λ , 由 $I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda > 0$, 故 $u_\lambda \neq 0$.

参考文献:

- [1] 杜佳璐, 吕颖. 一类分数阶 Kirchhoff 方程的半经典解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(2): 30-36.
- [2] 苑紫冰, 欧增奇. 一类具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 32-36.
- [3] CHEN W J. Existence of Solutions for Fractional p -Kirchhoff Type Equations with a Generalized Choquard Nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Physics, 2018, 59(12): 1-14.
- [4] CHEN C S, HUANG J C, LIU L H. Multiple Solutions to the Nonhomogeneous p -Kirchhoff Elliptic Equation with Concave-Convex Nonlinearities [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(7): 754-759.
- [5] NAIMEN D. Positive Solutions of Kirchhoff Type Elliptic Equations Involving a Critical Sobolev Exponent [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications Nodea, 2014, 21(6): 885-914.
- [6] OURRAOUI A. On a p -Kirchhoff Problem Involving a Critical Nonlinearity [J]. Comptes Rendus-Mathématique, 2014, 352(4): 295-298.
- [7] ZHOU C X, SONG Y Q. Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems of p -Kirchhoff Type with Critical Exponent [J]. Boundary Value Problems, 2015, 2015(1): 1-12.
- [8] CHU C M, SUN J J. Multiplicity of Positive Solutions for a Class of p -Kirchhoff Equation with Critical Exponent [J]. Annals of Functional Analysis, 2020, 11(4): 1126-1140.
- [9] LI Q, YANG Z D. Existence of Multiple Solutions for a p -Kirchhoff Problem with the Non-Linear Boundary Condition [J]. Applicable Analysis, 2018, 97(16): 2843-2851.
- [10] ABREU E A M, MEDEIROS J M. Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Nonhomogeneous Neumann Problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2005, 60(8): 1443-1471.
- [11] DENG Y B, JIN L Y. Multiple Positive Solutions for a Quasilinear Nonhomogeneous Neumann Problems with Critical Hardy Exponents [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2007, 67(12): 3261-3275.
- [12] SABINA DE LIS J C. A Concave-Convex Quasilinear Elliptic Problem Subject to a Nonlinear Boundary Condition [J]. Differential Equations and Applications, 2011, 3(4): 469-486.
- [13] XIU Z H, CHEN C S. Existence of Multiple Solutions for Singular Elliptic Problems with Nonlinear Boundary Conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 410(2): 625-641.
- [14] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian System [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

责任编辑 廖坤