DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.06.009

Orlicz 混合宽度积分①

杨林[1], 唐孝国[1], 谭杨[1], 罗淼[2]

1. 铜仁职业技术学院 信息工程学院,贵州 铜仁 554300;
2. 贵州师范大学 数学科学学院,贵阳 550025

摘要: 基于 Brunn-Minkowski 理论中混合体积的 Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式与 Orlicz 混合宽度积分的探究,利用 Jensen 不等式建立了 Orlicz 混合宽度积分的 Orlicz-Minkowski 不等式与 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式. 当 $\varphi(x, y)=x^{-p}+y^{-p}$ 时即为 L_p 混合宽度积分的 L_p-Minkowski 不等式与 L_p-Brunn-Minowski 不等式.

关 键 词: Orlicz 混合宽度积分;Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式;Orlicz-Minkowski 不等式;Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式

中图分类号:O186.5 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2022)06-0052-06

On Orlicz Mixed Width Integral

YANG Lin[1], TANG Xiaoguo[1], TAN Yang[1], LUO Miao[2]

1. School of information technology, Tongren Polytechnic College, Tongren Guizhou 554300, China;
2. School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: Based on the Orlicz-Aleksandrov-Fenchel inequality and the Orlicz mixed width integral of the Brunn-Minkowski theory, the Orlicz-Minkowski inequality and Orlicz-Brunn-Minkowski inequality of Orlicz mixed width integral are established by Jensen's inequality. When $\varphi(x, y)=x^{-p}+y^{-p}$, the corresponding inequality of Orlicz mixed width integral to L_p-Minowski inequality and L_p-Brunn-Minkowski inequality of L_p mixed width integral.

Key words: Orlicz mixed width integral; Orlicz-Aleksandrov-Fenchel inequality; Orlicz-Minkowski inequality; Orlicz-Brunn-Minkowski inequality

Orlicz-Brunn-Minkowski 理论[1-3] 基于 L_p Brunn-Minkowski 理论[4] 发展而来,在凸体或星体(及其相关的如投影体、相交体等)的体积、混合体积、仿射表面积、宽度积分及弦长积分等研究目标上建立了 Orlicz-Minkowski 不等式、Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式及其他一系列优美的结果[5-11]. 近期关于平面

① 收稿日期:2021-06-19
基金项目:2019 年度贵州省基础研究计划项目(黔科合基础[2019]1228 号);铜仁市科技计划项目(铜仁市科研[2020]116 号).
作者简介:杨林,副教授,硕士,主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者:罗淼,副教授,博士.

上的凸体或凸曲线的研究可参见文献[12-14].

本文研究的对象为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，其集合记为 $\mathscr{K}^n$. $\mathscr{K}^n_o$ 表示原点为内点的凸体之集. 设 $e_1,\cdots,e_m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的标准正交基，函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_m)$ 为定义在 $[0,\infty)^m$ 上的对每一分量严格递减且满足 $\varphi(0)=\infty$，$\varphi(e_i)=1(i=1,2,\cdots,m)$ 的凸函数，由此类函数构成的函数集合用 Φ_m 表示.

设 $K\in\mathscr{K}^n$ 的支撑函数 $h(K,\cdot)$ 为

$$h(K,u)=\max\{x\cdot u: x\in K\}\qquad u\in S^{n-1}$$

K 的 n 维体积为

$$V(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h(K,u)\mathrm{d}S(K,u)$$

$\mathrm{d}S(K,u)$ 表示 K 在 u 方向上的面积微元，K 的宽度函数为

$$b(K,u)=\frac{h(K,u)+h(K,-u)}{2}$$

若存在正实数 λ，使得 $b(K,u)=\lambda b(L,u)$，则称 K 与 L 具有相似宽度.

设 $\varphi\in\Phi_1$，$K,L\in\mathscr{K}^n_o$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0(\alpha,\beta$ 不同时为 0)，K,L 的 Orlicz 组合[5,8] $\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L\in\mathscr{K}^n_o$ 由

$$h(\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L,u)=\sup\left\{\lambda>0:\alpha\varphi\left(\frac{h(K,u)}{\lambda}\right)+\beta\varphi\left(\frac{h(L,u)}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\}$$

确定.

由 Orlicz 组合的定义可知

$$h(\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L,u)=\lambda\Leftrightarrow\alpha\varphi\left(\frac{h(K,u)}{h(\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L,u)}\right)+\beta\varphi\left(\frac{h(L,u)}{h(\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L,u)}\right)=1$$

文献[9]研究了 $\varphi\in\Phi_1$，$K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n_o$ 的 Orlicz 多元混合体积 $V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)$，其定义为

$$V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)=\varphi'_+(1)V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi L)'_+(0)=$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{h(L,u)}{h(K,u)}\right)h(K,u)\mathrm{d}S(K_1,\cdots,K_{n-1},u)$$

同时建立了一系列不等式，如 Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式和 Orlicz Brunn-Minkowski 不等式：

Orlicz-Aleksandrov-Fenchel 不等式　若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n_o$，$\varphi\in\Phi_1$，$1\leqslant m<n$，则

$$\frac{V_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}\geqslant\varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m}V(K_r[m],K_{m+1},\cdots,K_{n-1},L)^{\frac{1}{m}}}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}\right)$$

Orlicz Brunn-Minkowski 不等式　若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n_o$，$\varphi\in\Phi_1$，则对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\varphi\left(\frac{V(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},K+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi L)}\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{V(K_1,\cdots,K_{n-1},L)}{V(K_1,\cdots,K_{n-1},K+_\varphi\varepsilon\cdot_\varphi L)}\right)\leqslant 1$$

文献[14]研究了 $K_1,\cdots,K_n\in\mathscr{K}^n$ 的混合宽度积分 $B(K_1,\cdots,K_n)$，其积分表达式为

$$B(K_1,\cdots,K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}b(K_1,u)\cdots b(K_n,u)\mathrm{d}S(u)\tag{1}$$

并建立了不等式

$$B(K_1,\cdots,K_n)\leqslant\prod_{r=1}^{m}B(K_r[m],K_{m+1},\cdots,K_n)^{\frac{1}{m}}\tag{2}$$

设 α,β 为非负且不同时为 0 的实数，文献[10]定义并研究了 $K,L\in\mathscr{K}^n$ 的 Orlicz 宽度线性加法 $b(+_\varphi(K,L,\alpha,\beta),u)$，

$$b(+_\varphi(K,L,\alpha,\beta),u)=\sup\left\{\lambda>0:\alpha\varphi_1\left(\frac{b(K,u)}{\lambda}\right)+\beta\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\}\qquad u\in S^n$$

其中

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y) \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_1$$

由 Orlicz 宽度线性加法的定义可知

$$\alpha\varphi_1\left(\frac{b(K, u)}{b(+_\varphi(K, L, \alpha, \beta), u)}\right)+\beta\varphi_2\left(\frac{b(L, u)}{b(+_\varphi(K, L, \alpha, \beta), u)}\right)=1 \tag{3}$$

设 $K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_1$，$0 \leqslant i < n$，文献[10]将 K, L 的 Orlicz 混合宽度积分 $B_{\varphi, i}(K, L)$ 定义为

$$B_{\varphi, i}(K, L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \varphi\left(\frac{b(L, u)}{b(K, u)}\right) b(K, u)^{n-i} \mathrm{d}S(u) \tag{4}$$

同时建立了如下 Orlicz Minkowski 不等式和 Orlicz Brunn-Minkowski 不等式：

Orlicz-Minkowski 不等式 若 $K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_1$，$0 \leqslant i < n$，则

$$B_{\varphi, i}(K, L) \geqslant B_i(K)\varphi\left(\left(\frac{B_i(L)}{B_i(K)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

Orlicz Brunn-Minkowski 不等式 若 $K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_2$，$0 \leqslant i < n$，则

$$1 \geqslant \varphi\left(\left(\frac{B_i(K)}{B_i(+_\varphi(K, L, 1, 1))}\right)^{\frac{1}{n-i}}, \left(\frac{B_i(L)}{B_i(+_\varphi(K, L, 1, 1))}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

本文在文献[9-10]的启发下，定义了关于 $K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L$ 的 Orlicz 多元混合宽度积分 $B_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L)$，其表达式为

$$B_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \varphi\left(\frac{b(L, u)}{b(K, u)}\right) b(K, u) b(K_1, u) \cdots b(K_{n-1}, u) \mathrm{d}S(u) \tag{5}$$

当 $K_1, \cdots, K_{n-1}$ 中有 $n-i-1$ 个与 K 相等，其余 i 个为单位球时，(5) 式即为公式(4). 本文建立了 Orlicz 多元混合宽度积分的如下不等式：

定理 1 若 $K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_1$，则

$$\frac{B_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)} \geqslant \varphi\left(\frac{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, L)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

定理 2 若 $K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_2$，$\alpha, \beta > 0$，则

$$1 \geqslant \varphi\left(\frac{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, +_\varphi(K, L, \alpha, \beta))}, \frac{B_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, L)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, +_\varphi(K, L, \alpha, \beta))}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

为得到文中结论的证明，需借助以下引理：

引理 1[10] 若 $K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_2$，则当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，有 $b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u) \to b(K)$.

引理 2 若 $K, L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi=\varphi(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$，$\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_1$，则

$$b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u)'_+(0)=\frac{\varphi_2\left(\frac{b(L, u)}{b(K, u)}\right) b(K, u)}{(\varphi_1)'_+(1)}$$

证 由引理 1、(3) 式及凸函数的性质知

$$b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u)'_+(0)=\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u)-b_K(u)}{\varepsilon}=$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-\frac{b(K, u)}{b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u)}}{\varepsilon} b(+_\varphi(K, L, 1, \varepsilon), u)=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{\varphi_1(1)-\varphi_1(x)}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{b(+_\varphi(K,L,1,\varepsilon),u)}\right)b(+_\varphi(K,L,1,\varepsilon),u)=$$
$$\frac{\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{b(K,u)}\right)b(K,u)}{(\varphi_1)'_+(1)}$$

其中

$$x=\varphi_1^{-1}\left(1-\varepsilon\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{b(+_\varphi(K,L,1,\varepsilon),u)}\right)\right)$$

引理 3　若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n$，$\varphi\in\Phi_2$，则

$$B(K_1,\cdots,K_{n-1},+_\varphi(K,L,1,\varepsilon))'_+(0)=\frac{1}{n(\varphi_1)'_+(1)}\int_{S^{n-1}}\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{b(K,u)}\right)b(K,u)b(K_1,u)\cdots b(K_{n-1},u)\mathrm{d}S(u)$$

证　由引理 1、引理 2、(1) 式，令

$$f(u)=b(K_1,u)\cdots b(K_{n-1},u)$$

可以得到

$$B(K_1,\cdots,K_{n-1},+_\varphi(K,L,1,\varepsilon))'_+(0)=$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{B(K_1,\cdots,K_{n-1},+_\varphi(K,L,1,\varepsilon))-B(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}{\varepsilon}=$$
$$\frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{S^{n-1}}\frac{b(+_\varphi(K,L,1,\varepsilon),u)-b(K,u)}{\varepsilon}f(u)\mathrm{d}S(u)=$$
$$\frac{1}{n(\varphi_1)'_+(1)}\int_{S^{n-1}}\varphi_2\left(\frac{b(L,u)}{b(K,u)}\right)b(K,u)f(u)\mathrm{d}S(u)$$

由引理 3 与 $B_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)$ 的定义，可得：

引理 4　设 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n$，$\varphi\in\Phi_1$，则

$$B_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{b(L,u)}{b(K,u)}\right)b(K,u)b(K_1,u)\cdots b(K_{n-1},u)\mathrm{d}S(u)$$

引理 5(Jensen 不等式)[15]　设(X,μ)为概率测度空间，$f:X\longrightarrow I\subset\mathbb{R}$ 为(X,μ)上的可积函数. 若 $\varphi:X\longrightarrow I$ 是严格凸函数，则

$$\int_X\varphi(f(x))\mathrm{d}\mu(x)\geqslant\varphi\left(\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)$$

等号成立当且仅当 $f(u)=C$(a.e. $x\in X$)，其中 C 为常数.

定理 1 的证明　由引理 4、引理 5 及(1) 式可得

$$\frac{B_\varphi(K_1,\cdots,K_{n-1},K,L)}{B(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}=$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{b(L,u)}{b(K,u)}\right)\frac{b(K,u)b(K_1,u)\cdots b(K_{n-1},u)}{B(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}\mathrm{d}S(u)\geqslant$$
$$\varphi\left(\frac{\int_{S^{n-1}}b(L,u)b(K_1,u)\cdots b(K_{n-1},u)\mathrm{d}S(u)}{nB(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}\right)=$$
$$\varphi\left(\frac{B(K_1,\cdots,K_{n-1},L)}{B(K_1,\cdots,K_{n-1},K)}\right)\tag{6}$$

由引理 5 不等式等号成立的条件知定理 1 中不等式等号成立的充要条件为 K 与 L 具有相似宽度.

由定理 1、不等式(2) 以及 φ 的单调递减性可得：

推论 1　若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L\in\mathscr{K}^n$，$\varphi\in\Phi_1$，$1\leqslant m<n$，则

$$\frac{B_{\varphi}(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)} \geqslant \varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m} B(K_r[m], K_{m+1}, \cdots, K_{n-1}, L)^{\frac{1}{m}}}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

在推论 1 中令 $\varphi(x)=x^{-p}$，可得：

推论 2 若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L \in \mathscr{K}^n$，$1 \leqslant m < n$，$p \geqslant 1$，则

$$B_{-p}(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L) \geqslant B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)^{1+p} \prod_{r=1}^{m} B(K_r[m], K_{m+1}, \cdots, K_{n-1}, L)^{\frac{-p}{m}}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

当推论 1 中，当 $m=n-1$ 时，有：

推论 3 若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_1$，则

$$\frac{B_{\varphi}(K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L)}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)} \geqslant \varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{n-1} B(K_r[n-1], L)^{\frac{1}{n-1}}}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

定理 2 的证明 由(1),(3) 式与引理 4，令

$$\mathscr{C}=(K_1, \cdots, K_{n-1})$$

可得

$$\begin{aligned}
&B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))= \\
&\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} b(K_1, u)\cdots b(K_{n-1}, u) b(+_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), u)\mathrm{d}S(u)= \\
&\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \left(\alpha\varphi_1\left(\frac{b(K, u)}{b(+_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), u)}\right)+\beta\varphi_2\left(\frac{b(L, u)}{b(+_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), u)}\right)\right)\times \\
&b(K_1, u)\cdots b(K_{n-1}, u) b(+_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), u)\mathrm{d}S(u)= \\
&\alpha B_{\varphi}(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), K)+\beta B_{\varphi}(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta), L) \geqslant \\
&B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))\left(\alpha\varphi\left(\frac{B(\mathscr{C}, K)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)+\right. \\
&\left.\beta\varphi\left(\frac{B(\mathscr{C}, L)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)\right)
\end{aligned}$$

整理即得

$$\begin{aligned}
1 \geqslant\ & \alpha\varphi_1\left(\frac{B(\mathscr{C}, K)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)+\beta\varphi_2\left(\frac{B(\mathscr{C}, L)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)= \\
&\varphi\left(\frac{B(\mathscr{C}, K)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}, \frac{B(\mathscr{C}, L)}{B(\mathscr{C}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)
\end{aligned}$$

由定理 1 不等式等号成立的条件知定理 2 中不等式等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

由定理 2、不等式(2) 以及 φ 的单调性，可得：

推论 4 若 $K_1,\cdots,K_{n-1},K,L \in \mathscr{K}^n$，$\varphi \in \Phi_2$，$1 \leqslant m < n$，则

$$1 \geqslant \varphi\left(\frac{\prod_{r=1}^{m} B(K_r[m], K_{m+1}, \cdots, K_{n-1}, K)^{\frac{1}{m}}}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}, \frac{\prod_{r=1}^{m} B(K_r[m], K_{m+1}, \cdots, K_{n-1}, L)^{\frac{1}{m}}}{B(K_1, \cdots, K_{n-1}, +_{\varphi}(K, L, \alpha, \beta))}\right)$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

在定理 2 中令 $\varphi(x, y)=x^{-p}+y^{-p}$，得：

推论 5　若 $K_1, \cdots, K_{n-1}, K, L \in \mathscr{K}^n$，$p \geqslant 1$，则

$$B(K_1, \cdots, K_{n-1}, +_p(K, L, 1, 1))^{-p} \geqslant B(K_1, \cdots, K_{n-1}, K)^{-p} + B_\varphi(K_1, \cdots, K_{n-1}, L)^{-p}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 具有相似宽度.

参考文献：

[1] LUTWAK E，YANG D，ZHANG G Y. Orlicz Centroid Bodies [J]. Journal of Differential Geometry，2010，84(2)：365-387.

[2] LUTWAK E，YANG D，ZHANG G Y. Orlicz Projection Bodies [J]. Advances in Mathematics，2010，223(1)：220-242.

[3] HABERL C，LUTWAK E，YANG D，et al. The Even Orlicz Minkowski Problem [J]. Advances in Mathematics，2010，224(6)：2485-2510.

[4] SCHNEIDER R. Convex Bodies：the Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.

[5] GARDNER R J，HUG D，WEIL W. The Orlicz-Brunn-Minkowski Theory：A General Framework，Additions，and Inequalities [J]. Journal of Differential Geometry，2014，97(3)：427-476.

[6] GARDNER R J，HUG D，WEIL W，et al. The Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，430(2)：810-829.

[7] ZHU B C，ZHOU J Z，XU W X. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory [J]. Advances in Mathematics，2014，264：700-725.

[8] XIONG G，ZOU D. Orlicz Mixed Quermassintegrals [J]. Science China Mathematics，2014，57(12)：2549-2562.

[9] ZHAO C J. Orlicz-Aleksandrov-Fenchel Inequality for Orlicz Multiple Mixed Volumes [J]. Journal of Function Spaces，2018，2018：1-16.

[10] ZHAO C J. Orlicz Version of the Mixed Width Integrals [J]. Metric Geometry Functional Analysis，2021，2021：1-18.

[11] 杨林，罗淼，何邦财，等. Orlicz-Aleksandrov 体的混合体积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(8)：25-28.

[12] 周媛，张增乐. 平面上的逆 Bonnesen 型 Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：70-74.

[13] 方建波. 平面凸曲线的一类熵不变流 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：117-123.

[14] LUTWAK E. Mixed Width-Integrals of Convex Bodies [J]. Israel Journal of Mathematics，1977，28(3)：249-253.

[15] HARDY G，LITTLEWOOD J，PÓLYA G. Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

责任编辑　廖坤