第 47 卷　第 7 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2022 年 7 月
Vol. 47　No. 7　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jul.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.07.001

矩阵 Hadamard 积与 Fan 积的特征值新界[①]

张晓凤，　陈付彬，　罗欢

昆明理工大学津桥学院 理工学院，昆明 650106

摘要：非负矩阵和 M -矩阵是矩阵论中两类重要的矩阵. 矩阵特征值的研究是如今的重要问题. 利用 Brauer 定理和 Gerschgorin 定理给出了非负矩阵 Hadamard 积和非奇异 M -矩阵 Fan 积的特征值新界. 所有的新结果只依赖相关矩阵的元素，其计算简单容易. 将所给定理的优越性进行了理论上的比较. 通过数值例子验证所得结果改进了其他文献中的相关结果.

关　键　词：非负矩阵；Hadamard 积；谱半径；M -矩阵；Fan 积；最小特征值

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000 - 5471(2022)07 - 0001 - 06

New Bounds for Eigenvalues of Hadamard Product and Fan Product of Matrices

ZHANG Xiaofeng，　CHEN Fubin，　LUO Huan

Department of Science and Technology, Kunming University of Science and Technology Oxbridge College, Kunming 650106, China

Abstract: Nonnegative matrix and M-matrix are two important matrices in matrix theory. It is important nowadays to study matrix eigenvalue. New bounds on eigenvalues for the Hadamard product of nonnegative matrices and the Fan product of nonsingular M-matrices are given by using Brauer theorem and Gerschgorin theorem. All new results depend only on the elements of the correlation matrices and are easy to calculate. The advantages of the given theorem are compared in theory. Numerical examples show that the results improve the result of the results in the other literatures.

Key words: nonnegative matrix; Hadamard product; spectral radius; M-matrix; Fan product; minimum eigenvalue

矩阵在众多科学领域中有着极其广泛的应用，是研究的重点[1-3]. 矩阵的 Hadamard 积与 Fan 积是两种与矩阵的乘法不同的运算[4]. 非负矩阵和 M -矩阵相关特征值的研究是一个热点问题，其中非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和非奇异 M -矩阵 Fan 积的特征值下界引起了学者们的关注，且相继给出了许多结果[5-19]. 下面将继续针对这两个问题进行研究，得到只依赖相关矩阵元素且更具优越性的结果.

1　预备知识

以 $R^{n\times n}$ ($C^{n\times n}$) 表示实(复)矩阵集，N 表示集合$\{1, 2, \cdots, n\}$.

---

① 收稿日期：2021 - 09 - 26

基金项目：国家自然科学基金项目(11501141)；云南省教育厅科学研究基金项目(2018JS747,2020J1233).

作者简介：张晓凤，研究生，讲师，主要从事矩阵理论及其应用的研究.

通信作者：陈付彬，教授.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的元素满足 $a_{ij}>0(i,j\in N)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正矩阵，记 $\boldsymbol{A}>0$；如果满足 $a_{ij}\geqslant 0(i,j\in N)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非负矩阵，记 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值模的最大值 $\rho(\boldsymbol{A})=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in R^{n\times n}$. 用 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相乘的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积，如果 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}\geqslant 0$，则 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\geqslant 0$.

如果有置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 可约，否则 $\boldsymbol{A}$ 不可约.

记

$$Z_n=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij}):a_{ij}\leqslant 0(i\neq j);i,j=1,\cdots,n\}$$

设 $\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}\geqslant 0$，$\alpha\in\mathbb{R}$，若 $\alpha>\rho(\boldsymbol{P})$，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M-矩阵，记为 $\boldsymbol{M}_n$；否则 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}=(c_{ij})$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积，其中

$$c_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}b_{ij} & i\neq j\\ a_{ij}b_{ij} & i=j\end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n$，则 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n$.

本文将用到以下记号：令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$i,j,k\in N$，$j\neq i$，

$$r_{li}=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum\limits_{k\neq l,i}|a_{lk}|}\qquad r_i=\max_{l\neq i}\{r_{li}\}\qquad m_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|}$$

$$h_i=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|m_{ji}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|m_{ki}}\right\}$$

$$u_j=\begin{cases}1 & n_j=0\\ h_j & n_j\neq 0\end{cases}$$

$$\tau_{ji}=|a_{ji}|u_j\qquad \tau_i=\max_{j\neq i}\{\tau_{ji}\}$$

2 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界

引理 1[18] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于如下域中：

$$\bigcup_{i\neq j}^{n}\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ki}|\right\}$$

引理 2[18] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于如下域中：

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ki}|\cdot\sum_{l\neq j}|a_{lj}|\right\}$$

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}$$

证 当 $n=1$ 时，结论明显成立. 当 $n\geqslant 2$ 时，分以下两种情况讨论：

情况 1 若 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 不可约. 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也不可约. 依据引理 1，当 $i\in\mathbb{N}$ 时，有

$$|\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})-a_{ii}b_{ii}|\leqslant\sum_{k\neq i}a_{ki}b_{ki}=\sum_{k\neq i}\frac{\tau_{ki}}{\tau_{ki}}a_{ki}b_{ki}\leqslant\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{\tau_{ki}}a_{ki}b_{ki}=$$

$$\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{a_{ki}b_{ki}}{a_{ki}u_k}=\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}$$

由于 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\geqslant a_{ii}b_{ii}$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}$$

情况 2　若 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 可约. 则有满足 $\xi_{12}=\xi_{23}=\cdots=\xi_{n-1,n}=\xi_{n,1}=1$，且其余元素 $\xi_{ij}=0$ 的置换阵 $\boldsymbol{D}=(\xi_{ij})$，当正数 ε 充分小时，$\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{D}$ 非负不可约. 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 替换为 $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{D}$，同情况 1 的讨论，结论成立.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

证　当 $n=1$ 时，结论明显成立. 当 $n\geqslant 2$ 时，分以下两种情况讨论：

情况 1　若 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 不可约. 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也不可约. 令 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=\lambda$，依据引理 2，存在 (i,j)，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$i\neq j$，有

$$\begin{aligned}|\lambda-a_{ii}b_{ii}||\lambda-a_{jj}b_{jj}|&\leqslant\left(\sum_{k\neq i}a_{ki}b_{ki}\right)\left(\sum_{l\neq j}a_{lj}b_{lj}\right)=\left(\sum_{k\neq i}\frac{\tau_{ki}}{\tau_{ki}}a_{ki}b_{ki}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{\tau_{lj}}{\tau_{lj}}a_{lj}b_{lj}\right)\leqslant\\&\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{\tau_{ki}}a_{ki}b_{ki}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{1}{\tau_{lj}}a_{lj}b_{lj}\right)=\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{a_{ki}b_{ki}}{a_{ki}u_k}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{a_{lj}b_{lj}}{a_{lj}u_l}\right)=\\&\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\end{aligned}$$

由于 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\geqslant a_{ii}b_{ii}$，则

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})&\leqslant\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant\\&\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned}$$

情况 2　若 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 可约. 则有满足 $\xi_{12}=\xi_{23}=\cdots=\xi_{n-1,n}=\xi_{n,1}=1$，且其余元素 $\xi_{ij}=0$ 的置换阵 $\boldsymbol{D}=(\xi_{ij})$，当正数 ε 充分小时，$\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{D}$ 非负不可约. 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 替换为 $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{D}$，同情况 1 的讨论，结论成立.

下面比较定理 1 和定理 2 的优越性. 不失一般性，当 $i\neq j$ 时，假设有

$$a_{jj}b_{jj}+\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\leqslant a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}$$

即

$$\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\leqslant a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}$$

则

$$\begin{aligned}&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\leqslant\\&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)=\\&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2=\\&\left(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant\\&\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[\left(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}=a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}$$

所以

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}$$

例 1 令非负矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\2&5&1&1\\0&2&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&4&3\\0&0&1&5\end{pmatrix}$$

应用文献[8-15]中 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ 的相关定理分别得

$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 50.127\,4$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.536\,4$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 31.461\,1$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 23.200\,0$

$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 28.446\,0$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.364\,4$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 22.163\,3$ $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 21.887\,2$

而应用所给定理 1，得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}=23.000\,0$$

应用定理 2，得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=21.858\,9$$

3 非奇异 M-矩阵 Fan 积的特征值下界

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n$，则

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right\}$$

证 当 $n=1$ 时，结论明显成立. 当 $n\geqslant 2$ 时，分以下两种情况讨论：

情况 1 若 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 不可约. 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也不可约. 依据引理 1，当 $i\in\mathbb{N}$ 时，有

$$|\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})-a_{ii}b_{ii}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ki}b_{ki}|=\sum_{k\neq i}\frac{\tau_{ki}}{\tau_{ki}}|a_{ki}b_{ki}|\leqslant\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{\tau_{ki}}|a_{ki}b_{ki}|=$$
$$\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{|a_{ki}|u_k}|a_{ki}b_{ki}|=\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}$$

由于 $0\leqslant\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\leqslant a_{ii}b_{ii}$，则

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right\}$$

情况 2 若 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 可约. 因为 Z_n 中的矩阵满足主子式皆为正时为 M-矩阵[19]，则有满足 $\xi_{12}=\xi_{23}=\cdots=\xi_{n-1,n}=\xi_{n,1}=1$，且其余元素 $\xi_{ij}=0$ 的置换阵 $\boldsymbol{D}=(\xi_{ij})$，当正数 ε 充分小时，$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{D}$ 为 M-矩阵且不可约. 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 替换为 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{D}$，同情况 1 的讨论，结论成立.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n$，则

$$\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

证 当 $n=1$ 时，结论明显成立. 当 $n\geqslant 2$ 时，分以下两种情况讨论：

情况 1 若 $\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B}$ 不可约. 则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 也不可约. 令 $\tau(\boldsymbol{A}\bigstar\boldsymbol{B})=\lambda$，依据引理 2，存在 (i,j)，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$i\neq j$，有

$$
\begin{aligned}
|\lambda-a_{ii}b_{ii}||\lambda-a_{jj}b_{jj}| &\leqslant \Big(\sum_{k\neq i}|a_{ki}b_{ki}|\Big)\Big(\sum_{l\neq j}|a_{lj}b_{lj}|\Big)= \\
&\left(\sum_{k\neq i}\frac{\tau_{ki}}{\tau_{ki}}|a_{ki}b_{ki}|\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{\tau_{lj}}{\tau_{lj}}|a_{lj}b_{lj}|\right)\leqslant \\
&\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{\tau_{ki}}|a_{ki}b_{ki}|\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{1}{\tau_{lj}}|a_{lj}b_{lj}|\right)= \\
&\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{|a_{ki}|u_k}|a_{ki}b_{ki}|\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{1}{|a_{lj}|u_l}|a_{lj}b_{lj}|\right)= \\
&\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)
\end{aligned}
$$

由于 $0\leqslant\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\leqslant a_{ii}b_{ii}$，则

$$
\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}) &\geqslant \frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\geqslant \\
&\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

情况 2　若 $\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}$ 可约. 因为 Z_n 中的矩阵满足主子式皆为正时为 M-矩阵[19]，则有满足 $\xi_{12}=\xi_{23}=\cdots=\xi_{n-1,n}=\xi_{n,1}=1$，且其余元素 $\xi_{ij}=0$ 的置换阵 $\boldsymbol{D}=(\xi_{ij})$，当正数 ε 充分小时，$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{D}$ 为 M-矩阵且不可约. 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 替换为 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{D}$，同情况 1 的讨论，结论成立.

下面比较定理 3 和定理 4 的优越性. 不失一般性，当 $i\neq j$ 时，假设有

$$a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\leqslant a_{jj}b_{jj}-\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}$$

即

$$\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\leqslant a_{jj}b_{jj}-a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}$$

则

$$
\begin{aligned}
&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\leqslant \\
&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(a_{jj}b_{jj}-a_{ii}b_{ii}+\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)= \\
&(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)(a_{jj}b_{jj}-a_{ii}b_{ii})+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2= \\
&\left(a_{jj}b_{jj}-a_{ii}b_{ii}+2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\left(\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)\left(\tau_j\sum_{l\neq j}\frac{b_{lj}}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\geqslant \\
&\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[\left(a_{jj}b_{jj}-a_{ii}b_{ii}+2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}= \\
&\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-a_{jj}b_{jj}+a_{ii}b_{ii}-2\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}\right\}=a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}}{u_k}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}) &\geqslant \min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\geqslant \\
&\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right\}
\end{aligned}
$$

例 2 令 M -矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1 & -1\\ -2 & 5 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -0.5 & 0 & 0\\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & -0.5 & 1\end{pmatrix}$$

应用文献[8-14,16]中 $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})$ 的相关定理分别得

$\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 0.1910$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 1.5730$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 1.5238$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 2.4333$

$\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 1.5730$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 1.5238$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 2.8333$ $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant 2.9212$

而应用本文定理 3 得

$$\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{a_{ii}b_{ii}-\tau_i\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right\}=2.8750$$

应用定理 4 得

$$\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant \min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}-\left[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\tau_i\tau_j\left(\sum_{k\neq i}\frac{|b_{ki}|}{u_k}\right)\left(\sum_{l\neq j}\frac{|b_{lj}|}{u_l}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}=2.9447$$

参考文献:

[1] 赵仁庆. 严格对角占优 M -矩阵的逆矩阵的无穷大番薯的新上界 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(8): 6-11.

[2] 张源野, 谭宜家. 形式三角矩阵半环的自同构与反自同构 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(12): 67-73.

[3] 兰美辉, 范全润, 高炜. 本体稀疏矩阵学习以及在相似度计算中的应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(1): 118-123.

[4] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[5] 钟琴, 周鑫. 非负不可约矩阵 Perron 根的上界 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 75-78.

[6] 孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 M -矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(2): 7-11.

[7] 钟琴. 非负矩阵最大特征值的新界值 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 40-43.

[8] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991: 359.

[9] FANG M Z. Bounds on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 425(1): 7-15.

[10] HUANG R. Some Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428(7): 1551-1559.

[11] LI Y T, LI Y Y, WANG R W, et al. Some New Bounds on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(2/3): 536-545.

[12] LIU Q B, CHEN G L. On Two Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(5/7): 974-984.

[13] LIU Q B, CHEN G L, ZHAO L L. Some New Bounds on the Spectral Radius of Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(4): 936-948.

[14] GUO Q P, LI H B, SONG M Y. New Inequalities on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 2013: 1-11.

[15] 陈付彬, 赵建兴. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界 [J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2019, 43(2): 18-22.

[16] 陈付彬. M-矩阵 Fan 积的新不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(8): 1-5.

[17] 陈付彬. M -矩阵 Fan 积的特征值的新下界 [J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2018, 35(4): 21-24.

[18] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[19] BERMAN A, PLEMMONS R J. Negative Matrices in the Mathematical Science [M]. New York: Academic Press, 1979.

责任编辑 廖坤