

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.07.002

改进的 Newton-法求解不同阶对称张量组 Z-特征值^①

杨廷梅, 刘奇龙, 陈震, 许云霞

贵州师范大学 数学科学学院, 贵阳 550025

摘要: 首先, 将求解不同阶对称张量组的 Z-特征值问题转化为非线性函数的极小值问题. 当 Newton 方向与非线性函数负梯度方向夹角的余弦值小于取定的某一固定值时, 对下降方向进行改进, 从而提出改进的 Newton-法求解不同阶对称张量组的 Z-特征值. 其次, 理论证明改进 Newton-法是全局超线性收敛的. 最后, 数值实例表明, 与带位移对称高阶幂法(shifted symmetric high order power method, SS-HOPM)相比, 改进 Newton-法能够计算出更多的 Z-特征值和特征向量, 且所用的时间更短.

关键词: 不同阶对称张量组; Z-特征值; 特征向量; 改进 Newton-法

中图分类号: O151.23

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)07-0007-07

Improved Newton Method for Computing the Z-Eigenvalues of Multiple Order Symmetric Tensors

YANG Tingmei, LIU Qilong, CHEN Zhen, XU Yunxia

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: Firstly, the Z-eigenvalue problem solving multiple order symmetric tensors is transformed into the minimum value problem of nonlinear functions. The descending direction is improved when the cosine of angle between the Newton direction and negative gradient direction of the nonlinear function is less than a fixed value. Thus, the improved Newton method is proposed to solve the Z-eigenvalues of multiple order symmetric tensors. Secondly, the theory proves that the improved Newton method is globally superlinear convergent. Finally, compared with the shifted symmetric high order power method (SS-HOPM), numerical examples show that the improved Newton method can calculate more Z-eigenvalues and eigenvectors in shorter time.

Key words: multiple order symmetric tensors; Z-eigenvalue; eigenvector; improved Newton method

① 收稿日期: 2021-05-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(12061025); 贵州省科学技术基金项目(黔科合基础[2020]1Z002); 贵州省教育厅自然科学研究项目(黔教合 KY 字[2020] 298).

作者简介: 杨廷梅, 硕士研究生, 主要从事数值代数的研究.

设 $\mathbb{R}$ 是实数域, $\mathbb{R}^n$ 是所有 n 维实向量的集合. 张量是向量和矩阵的高阶推广, 通常 m 阶 n 维实张量是由 n^m 个实数构成的多维数组, 即

$$\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m}), a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbb{R}, i_j \in N, j \in M$$

其中 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, $M = \{1, 2, \cdots, m\}$. 记 $\mathbb{R}^{[m, n]}$ 为 m 阶 n 维实张量的全体构成的集合, 特别地, 当 $m=0$ 时, $\mathbb{R}^{[0, n]}$ 简记为 $\mathbb{R}$, 当 $m=1$ 时, $\mathbb{R}^{[1, n]}$ 简记为 $\mathbb{R}^n$. 如果实张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 的元素满足

$$a_{i_{p(1)} i_{p(2)} \cdots i_{p(m)}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_m}, i_j \in N, j \in M$$

p 是指标集 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的任意置换, 则称 $\mathbf{A}$ 是实对称张量.

文献[1]提出了张量特征值与特征向量(也称为张量特征对)的概念, 并讨论 Z -特征值和 H -特征值的一些性质. 张量特征值是矩阵特征值的高阶推广, 下面给出实对称张量的 Z -特征值的定义.

定义 1^[1] 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{[m, n]}$ 是实对称张量, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1 \quad (1)$$

则称 λ 为 $\mathbf{A}$ 的 Z -特征值, $\mathbf{x}$ 为与 λ 相对应的 Z -特征向量, 或称 $(\lambda, \mathbf{x})$ 是 $\mathbf{A}$ 的 Z -特征对, 其中 $\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1}$ 是 n 维向量, 第 i 个分量为

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1})_i = \sum_{i_2, \cdots, i_m \in N} a_{ii_2 \cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, i \in N$$

由于对称张量 Z -特征值在数据挖掘^[2-3]、目标跟踪^[4]和超图匹配^[5]等许多实际问题中有着重要应用, 使得对称张量 Z -特征值问题逐渐成为张量谱理论研究的热点问题^[6-13]. 文献[14]在研究基于张量算法的高阶图匹配时提出了包含边和超边的匹配模型. 文献[15]从文献[14]中提出不同阶对称张量组 Z -特征值问题, 定义如下.

定义 2^[15] 设 $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{[i, n]}$ 是实对称张量, $i=2, 3$, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{A}_3\mathbf{x}^2 + \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1 \quad (2)$$

则称 λ 为不同阶对称张量组 $\{\mathbf{A}_i\}_{i=2}^3$ 的 Z -特征值, $\mathbf{x}$ 为与 λ 相对应的 Z -特征向量, 或称 $(\lambda, \mathbf{x})$ 是不同阶对称张量组 $\{\mathbf{A}_i\}_{i=2}^3$ 的 Z -特征对.

近年来, 文献[16]提出应用 Newton-Gauss-Seidel 法可求解不同阶张量组方程, 接着文献[15]提出通过 SS-HOPM 求解不同阶对称张量组 Z -特征值问题(2). 本文接下来介绍应用改进的 Newton-法求解问题(2).

1 改进的 Newton-法求不同阶对称张量组 Z -特征值

首先, 回顾 Newton-法求解对称张量 Z -特征值, 从而将该方法推广到求解不同阶对称张量组 Z -特征值. 为了解决对称张量 Z -特征值问题(1), 文献[17]将对称张量组 Z -特征值问题(1)等价转化为如下非线性方程组解的问题:

$$G(\mathbf{x}, \mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1} - \mu\mathbf{x} \\ \frac{1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

设 $\mathbf{w} = (\mathbf{x}^T, \mu)^T$ 是 $(n+1)$ 维向量, 其价值函数为 $g(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (G_i(\mathbf{w}))^2$. 在此基础上, 文献[17]利用 Newton-法求解问题(1).

针对问题(2), 将不同阶对称张量组 Z -特征值问题等价转化为如下非线性方程组的解的问题:

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3\mathbf{x}^2 + \mathbf{A}_2\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ \frac{1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

易知 $(n+1)$ 维向量 $(\mathbf{x}^T, \lambda)^T$ 为非线性方程组(3)的解当且仅当 $(\lambda, \mathbf{x})$ 为不同阶对称张量组 $\{\mathbf{A}_i\}_{i=2}^3$ 的

Z-特征对. 现在考虑用改进 Newton-法求解非线性方程组(3). 首先, 给出 $F(\mathbf{x}, \lambda)$ 的 Jacobi 矩阵.

引理 1^[18] 若 $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{[i, n]}$ 是实对称张量, $i=2, 3$, 则 $F(\mathbf{x}, \lambda)$ 的 Jacobi 矩阵 $\nabla F(\mathbf{x}, \lambda)$ 为实对称矩阵, 且具有如下形式:

$$\nabla F(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{I}_n & -\mathbf{x} \\ -\mathbf{x}^T & 0 \end{bmatrix}$$

记 $\mathbf{v} = (\mathbf{x}^T, \lambda)^T$, 则 $\mathbf{v}$ 为 $(n+1)$ 维列向量, 当使用 Newton-法求解非线性方程组(3)时, 若 $\mathbf{p}$ 为 Newton-法的下降方向, 则在任意一迭代点 $\mathbf{v}_k = (\mathbf{x}_k^T, \lambda_k)^T$ 处的下降方向 $\mathbf{p}_k$ 满足

$$\nabla F(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k = -F(\mathbf{v}_k) \quad (4)$$

为了确保 Newton-法的全局收敛性, 根据文献[17]提出的方法, 引入 $F(\mathbf{v})$ 的价值函数

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|F(\mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (F_i(\mathbf{v}))^2$$

显然, 若 $F(\mathbf{v}_*) = 0$, 则 $f(\mathbf{v}_*) = 0$. 由于 $f(\mathbf{v}) \geq 0$ 对所有的 $\mathbf{v}$ 恒成立, 因此, $f(\mathbf{v})$ 的全局极小值点为 $F(\mathbf{v}) = 0$ 的根.

通常, 满足(4)式时, Newton-法的下降方向 $\mathbf{p}_k$ 与 $f(\mathbf{v})$ 的负梯度方向 $-\nabla f(\mathbf{v}_k)$ 的夹角为 $\theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. 为了加快收敛速度, 给定常数 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$\cos \theta_k = \frac{-\nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k}{\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| \|\mathbf{p}_k\|} > \delta \quad (5)$$

其中 $\nabla f(\mathbf{v}_k) = \nabla F^T(\mathbf{v}_k) F(\mathbf{v}_k)$, δ 越靠近 1, 收敛速度越快. 当 $\mathbf{p}_k$ 不满足(5)式时, 对 $\mathbf{p}_k$ 进行修正, 修正式为

$$(\nabla F(\mathbf{v}_k) + \tau_k \nabla F^{-T}(\mathbf{v}_k)) \mathbf{p}_k = -F(\mathbf{v}_k)$$

其中 $\nabla F^{-T}(\mathbf{v}_k)$ 表示 Jacobi 矩阵 $\nabla F(\mathbf{v}_k)$ 的逆的转置, 令

$$\mathbf{B}_k = \nabla F^T(\mathbf{v}_k) \nabla F(\mathbf{v}_k) + \tau_k \mathbf{I}_{n+1} \quad (6)$$

通过化简得

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{v}_k)$$

又由文献[19]中的算法 3.3 知 τ_k 的选取使 $\mathbf{B}_k$ 为正定矩阵且使(5)式成立, 具体过程见算法 1.

算法 1^[19] τ_k 选取的算法

输入: 矩阵 $\mathbf{H}_k = \nabla F^T(\mathbf{v}_k) \nabla F(\mathbf{v}_k)$

输出: τ_{k+1}

选取初始点: 给定常数 σ

1: if $\min(h_{ii}) > 0$

2: $\tau_0 = 0$

3: else

4: $\tau_0 = -\min(h_{ii}) + \sigma$

5: end if

6: for $k = 0, 1, \dots$, do

7: if $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{H}_k + \tau_k \mathbf{I}_{n+1}$

8: stop

9: else

10: $\tau_{k+1} = \max(2\tau_k, \sigma)$

11: end if

12: end for

选取步长 β_k 满足如下 Wolfe 条件

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_k + \beta_k \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{v}_k) + c_1 \beta_k \nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k \\ \nabla f(\mathbf{v}_k + \beta_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k \geq c_2 \nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k \end{cases} \quad (7)$$

其中: $0 < c_1 < c_2 < 1$. 通过上述的分析, 下面给出改进的 Newton-法求不同阶实对称张量组 Z-特征值的算法.

算法 2 改进的 Newton-法求解不同阶对称张量组 Z -特征值.

输入: 对称张量 $\{\mathbf{A}_i\}_{i=2}^3 \in \mathbb{R}^{[i, n]}$, 初始值 $\mathbf{x}_0, \lambda_0, \beta$, 给定常数 $\delta, \varepsilon, \rho \in (0, 1), 0 < c_1 < c_2 < 1$.

输出: 特征值 λ_{k+1} .

```

1: for  $k = 0, 1, \dots$ , do
2:    $\mathbf{p}_k = -\nabla F^{-1}(\mathbf{v}_k)F(\mathbf{v}_k)$ 
3:   if  $-\mathbf{p}_k^T \nabla f(\mathbf{v}_k) \leq \delta \|\mathbf{p}_k\| \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|$ 
4:      $\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{v}_k)$ 
5:   end if
6:   while  $f(\mathbf{v}_k + \beta \mathbf{p}_k) > f(\mathbf{v}_k) + c_1 \beta \nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k \|\nabla f(\mathbf{v}_k + \beta \mathbf{p}_k)\| \mathbf{p}_k < c_2 \nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k$ 
7:      $\beta = \rho \beta$ 
8:   end while
9:    $\beta_k = \beta$ 
10:   $(\mathbf{x}_{k+1}^T, \lambda_{k+1})^T = (\mathbf{x}_k^T, \lambda_k)^T + \beta_k \mathbf{p}_k$ 
11:   $\mathbf{v}_k = (\mathbf{x}_{k+1}^T, \lambda_{k+1})^T$ 
12:  if  $\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| \leq \varepsilon$ 
13:    break
14:  end if
15: end for

```

2 收敛性分析

本节分析算法 2 的收敛性, 首先给出一些假设.

假设 1 f 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上有下界, 并且在包含水平集 $E = \{\mathbf{v}: f(\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{v}_0)\}$ 的开集 Ω 上连续可微, 其中 $\mathbf{v}_0$ 为起始迭代点.

假设 2 f 的梯度 ∇f 在 Ω 上 Lipschitz 连续. 即存在一个常数 $L > 0$, 使得

$$\|\nabla f(\mathbf{v}) - \nabla f(\mathbf{v}')\| \leq L \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|, \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \Omega$$

假设 3 $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 在凸开集 D 上连续可微且 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v} + \mathbf{p}$ 是 D 中的向量.

引理 2^[19] 如果 f 满足假设 1 和 2, 那么考虑 $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 这种形式的迭代, 其中 $\mathbf{p}_k$ 是下降方向, α_k 是步长且满足 Wolfe 条件(7), 有如下不等式成立

$$\sum_{k \geq 0} \cos^2 \theta_k \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|^2 < \infty$$

其中 θ_k 是 $\mathbf{p}_k$ 与 $-\nabla f(\mathbf{v}_k)$ 的夹角.

定理 1 如果函数 $f(\mathbf{v})$ 满足假设 1 和 2, 那么由算法 2 产生的序列 $\{\mathbf{v}_k\}$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(\mathbf{v}_k) = 0$$

即改进的 Newton-法全局收敛.

证 当 $\mathbf{p}_k$ 满足条件(5)时, 由引理 2 可知, 由于 $\sum_{k \geq 0} \cos^2 \theta_k \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|^2 < \infty$, 可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 \theta_k \cdot \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|^2 = 0$, 又由条件(5)可知对任意的 k 都有 $\cos \theta_k \geq \delta > 0$, 由此可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| = 0$. 当 $\mathbf{p}_k$ 不满足条件(5)时, 根据(6)式构造的矩阵 $\mathbf{B}_k$ 是正定矩阵并具有有界条件数, 因此, 存在常数 $U > 0$, 使得对任意 k 都有 $\|\mathbf{B}_k^{-1}\| \|\mathbf{B}_k\| \leq U$, 又由条件(5)可得

$$\cos \theta_k = -\frac{\nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{p}_k}{\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| \|\mathbf{p}_k\|} = \frac{\nabla f^T(\mathbf{v}_k) \mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{v}_k)}{\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| \|\mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{v}_k)\|} \geq$$

$$\frac{\rho_{\min} \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|^2}{\|\mathbf{B}_k^{-1}\| \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|^2} = \frac{\rho_{\min} \|\mathbf{B}_k\|}{\|\mathbf{B}_k^{-1}\| \|\mathbf{B}_k\|} \geq \frac{\|\mathbf{B}_k\|}{\rho_{\max} U} \geq \frac{1}{U}$$

其中 $\rho_{\min}, \rho_{\max}$ 分别是 $\mathbf{B}_k$ 的最小特征值和最大特征值, 由引理 2 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| = 0$.

通过上面的分析, 两种情况都可得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| = 0$, 由文献[19]可知改进的 Newton-法全局收敛, 即定理 1 得证.

定理 2 若假设 1, 2, 3 成立, 且 $\beta_k = 1$. 如果 $\nabla F(\mathbf{v}^*)$ 是非奇异的, 其中 $\mathbf{v}^*$ 是算法 2 产生的序列 $\{\mathbf{v}_k\}$ 的收敛点, 那么算法 2 超线性收敛.

证 由定理 1 得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| = 0$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla F^T(\mathbf{v}_k)F(\mathbf{v}_k)\| = 0$, 因为 $\mathbf{v}^*$ 是序列 $\{\mathbf{v}_k\}$ 的收敛点, $\nabla F(\mathbf{v}^*)$ 是非奇异的, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(\mathbf{v}_k)\| = 0$. 又由假设 1, 2, 3 成立可知, 通过文献 [19] 中的定理 11.1 和 11.2 可得

$$\|\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}^*\| = o(\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^*\|)$$

即 $\{\mathbf{v}_k\}$ 超线性收敛到 $\mathbf{v}^*$.

3 数值实验

本节使用文献[15]中给出的两个例子进行数值实验, 并对二者的结果进行比较. 所有试验都在 MATLAB R2015a 中完成, 其配置为: Intel(R) Celeron(R)3205U 1.50 GHz CPU 和 4.00G RAM 内存.

例 1 设实对称张量 $\mathbf{A}_3 = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}^{[3,3]}$ 和实对称正定矩阵 $\mathbf{A}_2 = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{[2,3]}$, 且元素取值如下:

$$\begin{aligned} a_{113} &= -0.0954 & a_{111} &= -0.1281 & a_{112} &= 0.0516 & a_{122} &= -0.1958 \\ a_{123} &= -0.1790 & a_{133} &= -0.2676 & a_{222} &= 0.3251 & a_{223} &= 0.2513 \\ a_{233} &= 0.1173 & a_{333} &= 0.0338 & b_{11} &= 0.0011 & b_{12} &= 0.0004 \\ b_{13} &= -0.0005 & b_{22} &= 0.0009 & b_{23} &= 0.0006 & b_{33} &= 0.0012 \end{aligned}$$

使用两种算法进行数值实验, 在算法 2 中选取的参数分别是 $\epsilon = 10^{-7}$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.8$, 并用分布在 $[-2, 2]$ 中的不同随机初始点 $\mathbf{x}_0$ 和 λ_0 进行 200 次实验, 最大迭代次数为 1 000 次, 如果 $\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\| \leq \epsilon$, 说明算法收敛. 实验结果见表 1-3.

表 1 算法 2 在例 1 上的数值结果

出现次数 / 次	λ	$\mathbf{x}^T$	平均迭代次数 / 次
52	0.0043	[0.4499 0.7752 -0.4435]	11
40	-0.0022	[0.4455 0.7727 -0.4522]	10
32	-0.0166	[0.7114 -0.5109 0.4826]	9
28	0.0194	[0.7149 0.5077 -0.4808]	10
11	-0.4298	[0.7187 0.1232 0.6844]	8
16	0.2298	[-0.8458 0.4371 -0.3059]	7
14	-0.2291	[0.8434 -0.4401 0.3081]	7
6	-0.8715	[0.3923 -0.7252 -0.5659]	7
1	0.4314	[-0.7188 -0.1258 -0.6837]	8

表 2^[15] SS-HOPM 算法在例 1 上的数值结果

α	出现次数 / 次	λ	$\mathbf{x}^T$	平均迭代次数 / 次
1	42	0.8745	[-0.3920 0.7246 0.5668]	31
1	28	0.4314	[-0.7188 -0.7246 0.5668]	50
1	11	0.0194	[0.7149 0.5077 -0.4808]	108
1	19	0.0003	[-0.2960 -0.7349 0.6101]	147

表 3 两种算法计算相同特征值所用平均时间

λ	t/s	
	算法 2	SS-HOPM
0.019 4	0.146 362	0.554 435
0.431 4	0.155 210	0.253 205

由表 1 与表 2 可知,该数值实验得出的结果与文献[15]中的结果相比:第一,两种方法都能求出特征值 0.019 4 和 0.431 4,但根据表 3,可知算法 2 计算所用的时间更少一些;第二,算法 2 可以求出 14 个特征值里的 9 个,比文献[15]中用 SS-HOPM 所求的特征值多了 5 个,其中有 7 个与文献[15]求出的特征值不相同.

例 2 实对称张量 $\mathbf{A}_3=(a_{ijk})\in\mathbb{R}^{[3,3]}$ 和实对称矩阵 $\mathbf{A}_2=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{[2,3]}$,且元素取值如下:

$$\begin{array}{llll} a_{111}=0.399\ 1 & a_{112}=-0.597\ 6 & a_{113}=-0.581\ 9 & a_{122}=0.384\ 0 \\ a_{123}=0.415\ 1 & a_{133}=0.888\ 0 & a_{222}=-0.206\ 6 & a_{223}=-0.672\ 3 \\ a_{233}=-0.464\ 0 & a_{333}=0.004\ 5 & b_{11}=-0.155\ 6 & b_{12}=0.049\ 5 \\ b_{13}=0.197\ 9 & b_{22}=-0.457\ 4 & b_{23}=0.701\ 7 & b_{33}=-0.089\ 8 \end{array}$$

再次使用两种算法进行数值实验,算法 2 选取的参数分别是 $\epsilon=10^{-7}$, $c_1=0.000\ 1$, $c_2=0.8$,并用分布在 $[-10,10]$ 中的不同随机初始点 $\mathbf{x}_0$ 和 λ_0 进行 100 次实验,其最大迭代次数为 1 000 次,如果 $\|\nabla f(\mathbf{v}_k)\|\leqslant\epsilon$,说明算法收敛,结果见表 4,5.

表 4 算法 2 在例 2 上的数值结果

出现次数 / 次	λ	$\mathbf{x}^T$	平均迭代次数 / 次
65	-0.853 3	[-0.448 8 -0.762 8 -0.465 5]	14
31	0.785 9	[-0.492 6 -0.237 3 -0.837 3]	6
4	-0.994 2	[-0.183 3 -0.566 6 -0.803 4]	6

表 5^[15] SS-HOPM 算法在例 2 上的数值结果

α	出现次数 / 次	λ	$\mathbf{x}^T$	平均迭代次数 / 次
3	56	2.750 1	[0.507 7 -0.571 1 -0.645 0]	34
3	44	0.785 9	[0.492 6 0.237 3 0.837 3]	29

对表 4 和表 5 的结果比较可知,算法 2 要比 SS-HOPM 所求特征对多,两种方法都能算出特征值 0.785 9,但算法 2 用时为 0.085 451 s,SS-HOPM 用时为 0.144 277 s,可见算法 2 用时较少,且与文献[15]相比,得到了新的特征值.

4 结论

数值例子实验表明,改进的 Newton-法是一种有效的求解不同阶对称张量组 Z-特征值的方法且算法 2 是全局超线性收敛的.因此,改进的 Newton-法和 SS-HOPM 相互补充,可以求出更多的不同阶对称张量组的 Z-特征值.

参考文献:

[1] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation, 2005, 40(6): 1302-1324.

[2] BENSON A R. Three Hypergraph Eigenvector Centralities [J]. SIAM Journal on Mathematics of Data Science, 2019, 1(2): 293-312.

[3] BENSON A R, GLEICH D F, LESKOVEC J. Tensor Spectral Clustering for Partitioning Higher-Order Network Structures [C]//Proceedings of the SIAM International Conference on Data Mining SIAM International Conference on Data Mining. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2015: 118-126.

[4] SHI X C, LING H B, PANG Y, et al. Rank-1 Tensor Approximation for High-Order Association in Multi-Target Tracking [J]. International Journal of Computer Vision, 2019, 127(8): 1063-1083.

[5] DUTTA A, LLADÓS J, BUNKE H, et al. Product Graph-Based Higher Order Contextual Similarities for Inexact Subgraph Matching [J]. Pattern Recognition, 2018, 76: 596-611.

[6] 何军, 刘衍民. 张量伪谱的新包含域 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(8): 7-10.

[7] QI L Q. Eigenvalues and Invariants of Tensors [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 325(2): 1363-1377.

[8] 许云霞, 李耀堂. 四阶张量 Z-特征值的一个新的定位集及其应用 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2020, 56(6): 28-32.

[9] NG M, QI L Q, ZHOU G L. Finding the Largest Eigenvalue of a Nonnegative Tensor [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2010, 31(3): 1090-1099.

[10] 桑彩丽, 赵建兴. 矩形张量的 S-型奇异值包含集 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(10): 1-4.

[11] LI W. On the Z-Eigenvalue Bounds for a Tensor [J]. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 2019, 11(4): 810-826.

[12] KOFIDIS E, REGALIA P A. On the Best Rank-1 Approximation of Higher-Order Supersymmetric Tensors [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2002, 23(3): 863-884.

[13] ZENG M L, NI Q. quasi-Newton Method for Computing z-Eigenpairs of a Symmetric Tensor [J]. Pacific Journal of Optimization, 2015, 11(2): 279-290.

[14] DUCHENNE O, BACH F, KWEON I S, et al. A Tensor-Based Algorithm for High-Order Graph Matching [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(12): 2383-2395.

[15] 张小双, 陈震, 刘奇龙. 求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(8): 81-87.

[16] LI D H, XIE S L, XU H R. Splitting Methods for Tensor Equations [J]. Numerical Linear Algebra With Applications, 2017, 24(5): e2102.

[17] 周会晓, 倪勤, 曾梅兰. 求实对称张量 Z-特征值的牛顿法 [J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2014, 35(3): 10-12.

[18] KOLDA T G, MAYO J R. Shifted Power Method for Computing Tensor Eigenpairs [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2011, 32(4): 1095-1124.

[19] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical Optimization [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

责任编辑 张枸