

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.07.003

有限群的 σ -半次正规子群^①

郑毅, 吴珍凤, 殷霞, 杨南迎

江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122

摘要: 令 G 是一个有限群. 如果 G 中存在子群 K , 满足 $G=HK$, 且对任一 $K_1 < K$ 有 $HK_1 < G$, 则称 H 在 G 中是半正规的. 本文结合子群的 σ -次正规性和半正规性引入了新的子群概念. 如果群 G 的子群 H 在 G 中是 σ -次正规的或者半正规的, 则称 H 在 G 中是 σ -半次正规的. 通过研究群 G 的完全 Hall σ -集中的子群及其极大子群的 σ -半次正规性, 给出了 G 是 σ -可解群和超可解群的若干新的判别准则.

关键词: 有限群; 半正规子群; σ -次正规子群; σ -半次正规子群

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)07-0014-07

On σ -Semisubnormal Subgroups of Finite Groups

ZHENG Yi, WU Zhenfeng, YIN Xia, YANG Nanying

School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: G is a finite Group. A subgroup H of G is said to be seminormal in G if there is a subgroup K in G such that $G=HK$ and the product HK_1 is a proper subgroup of G for any subgroup K_1 in K which differs from K . In this paper, a new concept of subgroups is introduced by combining the σ -subnormality and seminormality of subgroups. A subgroup H of G is called σ -semisubnormal in G , if H is σ -subnormal in G or seminormal in G . By studying the σ -seminormality of subgroups and their maximal subgroups in the complete Hall set of type σ of G , some new criteria for G to be solvable group and supersolvable group are given.

Key words: finite group; seminormal subgroup; σ -subnormal subgroup; σ -semisubnormal subgroup

文中所涉及的群均为有限群. G 总表示一个有限群, $|G|$ 表示 G 的阶, $\pi(n)$ 表示所有整除 n 的素因子的集合, 且 $\pi(G)=\pi(|G|)$. $|G|_\pi$ 表示能整除 $|G|$ 且素因子均在 π 中的最大整数.

文献[1]首次引入了半正规的概念: 假定 $H \leq G$, 如果 G 中存在子群 K , 满足 $G=HK$, 且对任一 $K_1 < K$ 有 $HK_1 < G$, 则称 H 在 G 中是半正规的, 并称 K 是 H 在 G 中的 S -补.

文献[2]利用子群的半正规性, 推广了 Ito 定理.

文献[3]结合次正规和半正规的概念引入了半次正规的概念: 假定 $A \leq G$, 如果 A 在 G 中次正规或者半正规, 则称 A 在 G 中是半次正规的, 并得到了有限群超可解的若干判别准则.

① 收稿日期: 2021-07-26

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(JUSRP121048).

作者简介: 郑毅, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

通信作者: 杨南迎, 副教授.

文献[4-7]引进了有限群的 σ -理论: 令 $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ 是所有素数集合 P 的一个划分, 即 $P = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ 且 $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset (i \neq j)$, 如果 n 是一个正整数, 则记 $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ 且 $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; 如果群 G 是一个 σ_i -群, 则称 G 为 σ -准素的; 如果群 G 的每个 G -主因子都是 σ -准素的, 则称 G 为 σ -可解的, 并称 G 的所有正规的 σ -可解子群的积为 G 的 σ -根, 记作 $R_\sigma(G)$. 假定 $H \leq G$, 如果存在一个子群链 $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_t = G$, 使得对所有的 $i = 1, \dots, t$, 要么 H_{i-1} 正规于 H_i , 要么 $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ 是 σ -准素的, 则称 H 在 G 中是 σ -次正规的.

近些年, 学者们通过利用有限群的 σ -理论和半正规子群的性质来研究有限群, 得到了有限群结构的许多重要的结果(参见文献[3-12]). 通过分析这些已有的结果与方法, 本文结合 σ -次正规性和半正规性引入了如下概念:

定义 1 假定 $A \leq G$, 如果 A 在 G 中 σ -次正规或者半正规, 则称 A 在 G 中是 σ -半次正规的.

由定义, 半次正规子群显然也是 σ -半次正规子群, 但下面的例子表明反之不成立:

例 1 设 $G = \text{PSL}_2(7)$, 则 $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, 且 G 中含有一个阶为 $3 \cdot 7$ 的极大子群, 记为 M . 令 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, 其中 $\sigma_1 = \{2, 3, 7\}$, $\sigma_2 = \{2, 3, 7\}'$. 则 G 是 σ -幂零的, 从而由文献[3]的命题 2.3 知 M 在 G 中是 σ -次正规的, 则 M 是 σ -半次正规的. 若 M 在 G 中是半次正规的, 那么由于 G 是单群, 故 M 在 G 中是半正规的, 从而存在 $B \leq G$ 使得 $G = MB$, 且对任意 $B_1 < B$ 有 $MB_1 < G$. 显然, $2^3 \mid |B|$. 令 $P \in \text{Syl}_2(B)$, 则 $P \in \text{Syl}_2(G)$. 设 B_1 是 P 中的 2 阶子群, 那么 $M \leq MB_1 < G$. 因为 M 是 G 的极大子群, 所以 $M = MB_1$, 即 $B_1 \leq M$, 与 $2 \nmid |M|$ 矛盾. 故 M 在 G 中不是半次正规的.

通过研究 σ -半次正规子群, 我们给出有限群的 σ -可解性和超可解性的一些新的充分条件. 未交代的符号和概念参见文献[13-19].

1 预备知识

令 Π 是 σ 的一个子集. 假定 n 是整数, 如果 $\pi(n) \subseteq \bigcup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$, 则称 n 为 Π -数. 假定 $H \leq G$, 如果 $|H|$ 是 Π -数, 则称 H 为 G 的 Π -子群; 如果 $|H|$ 是 Π -数且 $|G:H|$ 是一个 Π' -数, 则称 H 为 G 的 Hall Π -子群. 特别地, 如果存在 σ 的子集 Π , 使得 H 是群 G 的 Hall Π -子群, 则称 H 为 G 的 σ -Hall 子群. 假定 H 是群 G 的子群集, 如果对于某个 $\sigma_i \in \sigma$, H 中的任一非单位元都是 G 的 Hall σ_i -子群, 且对每个 $\sigma_i \in \sigma(G)$, H 中有且仅有一个元素是 G 的 Hall σ_i -子群, 则称 H 为 G 的完全 Hall σ -集. 如果群 G 有一个完全 Hall σ -集, 则称 G 为 σ -完全的. 如果对所有的 $\sigma_i \in \sigma(G)$, 群 G 的每个子群都是 D_{σ_i} -群, 则称 G 为具有 Sylow 型的 σ -完全群.

引理 1^[4,6] 设 A, K 和 N 是群 G 的子群. 假设 A 在 G 中是 σ -次正规的, 并且 N 正规于 G , 则:

- (i) $A \cap K$ 在 K 中是 σ -次正规的;
- (ii) AN/N 在 G/N 中是 σ -次正规的;
- (iii) 若 A 是 G 的 σ -Hall 子群, 则 A 正规于 G ;
- (iv) 若 $H \neq 1$ 是 G 的 Hall Π -子群, 且 A 不是 Π' -群, 则 $A \cap H \neq 1$ 且是 A 的 Hall Π -子群;
- (v) 若 G 是 Π -完全群, 且 A 是 Π -群, 则 $A \leq O_\Pi(G)$.

引理 2^[15] 设 G 是群, $H \leq X \leq G$ 且 N 正规于 G , 则下列结论成立:

- (i) 如果 H 在 G 中半正规, 则 H 在 X 中半正规;
- (ii) 如果 H 在 G 中半正规, 则 HN/N 在 G/N 中半正规;
- (iii) 如果 H 在 G 中半正规, 且 K 是 H 在 G 中的 S -补, 则对 $\forall g \in G$ 和 $L \leq K$, H 与 L^g 置换, 特别地, 对任意 $g \in G$, K^g 是 H 在 G 中的 S -补.

引理 3 设 G 是群, $H \leq X \leq G$, 如果 H 在 G 中 σ -半次正规, 则下列结论成立:

- (i) H 在 X 中 σ -半次正规;
- (ii) 若 N 正规于 G , 则 HN/N 在 G/N 中 σ -半次正规.

证 如果 H 在 G 中 σ -次正规, 则由引理 1 得 (i) - (ii) 成立; 如果 H 在 G 中半正规, 则由引理 2 得

(i) — (ii) 成立. 因此(i) — (ii) 成立.

引理 4^[4] σ -可解群在子群、同态像和直积下是封闭的. 并且任意两个 σ -可解群的扩张还是 σ -可解群.

引理 5^[5] 令 H 是群 G 的次正规且 σ -可解子群, 那么 $H \leq R_\sigma(G)$.

引理 6^[15] 令 H 是群 G 的半正规 Hall π -子群, 那么 H 在 G 中的任一 S -补都是 G 的 Hall π' -子群.

引理 7^[15] 令 H 是群 G 的半正规子群, 且 K 是 H 在 G 中的 S -补, 那么对 K 的任一子群 L , $H^L \cap L^H$ 在 G 中次正规.

引理 8^[16] 若 X 是群 G 的次正规且 π -可解子群, 则 X^G 是 π -可解群.

引理 9^[17] 设 G 是群, $P \in \text{Syl}_p(G)$ 且 P 循环. 若 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 则 G 有正规 p -补, 即 G 为 p -幂零群.

引理 10^[18] 有限群 G 是超可解群当且仅当 G 的所有极大子群的指数是素数.

2 主要结果

定理 1 设群 G 是具有 Sylow 型的 σ -完全群, 且有完全 Hall σ -集 $H = \{H_1, \dots, H_t\}$. 令 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 假设对任意的 $i=1, \dots, t$, H_i 是 p -幂零群. 如果对所有的非循环子群 H_i , H_i 在 G 中都是 σ -半次正规的, 那么 G 是 σ -可解群.

证 假设结论不成立, 并设群 G 是一极小阶反例, 我们分以下步骤来证明:

步骤 1 如果 R 是群 G 的一个极小正规子群, 那么 G/R 满足定理 1 的假设, 从而 G/R 是 σ -可解的. 显然, $\bar{H} = \{H_1R/R, \dots, H_tR/R\}$ 是 G/R 的一个完全 Hall σ -集. 对任意的非循环子群 H_iR/R , H_i 是非循环的, 从而由引理 3(ii) 知, H_iR/R 在 G/R 中是 σ -半次正规的, 且 $H_iR/R \cong H_i/(H_i \cap R)$ 是 p -幂零群. 以上表明 G/R 满足定理 1 的条件, 故由 G 的选取可知, G/R 是 σ -可解的.

步骤 2 $R_\sigma(G) = 1$.

假设 $R_\sigma(G) \neq 1$, 则 G 存在非平凡的 σ -可解正规子群 N . 那么由步骤 1 知, G/N 是 σ -可解的, 从而由引理 4 知 G 是 σ -可解的, 矛盾. 因此 $R_\sigma(G) = 1$.

步骤 3 对任意非循环的子群 H_i , 都有 H_i 半正规于 G .

由假设, 对任意非循环的子群 H_i , 都有 H_i 在 G 中 σ -次正规或半正规. 如果 H_i 在 G 中 σ -次正规, 则由引理 1(iii) 可知 H_i 正规于 G , 与步骤 2 矛盾. 这表明对任意非循环的子群 H_i , 都有 H_i 半正规于 G .

步骤 4 令 $p \in \sigma_1$. 则 H_1 是非循环的且在 G 中半正规.

若 H_1 是循环的, 则 G 的 Sylow p -子群也是循环的, 从而由引理 9 知 G 是 p -幂零的. 又因为 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 所以 G 是可解的, 矛盾, 故 H_1 是非循环的. 因此由步骤 3 知, H_1 在 G 中是半正规的.

步骤 5 $|\sigma(G)| = 2$ 且 $G = H_1H_2$.

由步骤 4 知 H_1 半正规于 G . 根据引理 6 得, G 存在 Hall σ'_1 -子群 K , 使得 K 是 H_1 在 G 中的 S -补. 令 L 是 K 的任一 Hall σ_i -子群 ($i \neq 1$), 则 L 也是 G 的 Hall σ_i -子群. 又因 G 是具有 Sylow 型的 σ -完全群, 从而存在 $x \in G$ 使得 $L^x = H_i$. 于是由引理 2(iii) 可得 $H_1H_i \leq G$, 并且 K^x 也是 H_1 在 G 中的 S -补. 因此由引理 3(i) 得 H_1H_i 满足定理假设. 如果 $|\sigma(G)| > 2$, 那么 $H_1H_i < G$, 从而由 G 的选取知 H_1H_i 是 σ -可解的.

令 $D = H_1^{H_i} \cap H_i^{H_1}$. 由引理 7 知 D 次正规于 G . 考虑

$$D = H_1^{H_i} \cap H_i^{H_1} \leq H_1H_i < G$$

我们得到 D 是 σ -可解的. 再根据引理 5, 我们有 $D \leq R_\sigma(G)$. 故由步骤 2, 得到 $D = 1$, 从而

$$[H_1, H_i] \leq [H_1^{H_i}, H_i^{H_1}] \leq H_1^{H_i} \cap H_i^{H_1} = 1$$

因此 $H_i \leq C_G(H_1)$. 由 H_i 选取的任意性知 $H_1 \triangleleft G$, 但这与步骤 2 矛盾. 因此 $|\sigma(G)| = 2$, 即 $G = H_1H_2$.

步骤 6 最后矛盾.

下面分两种情况讨论:

情况 1 H_2 非循环. 由步骤 3 知 H_1, H_2 在 G 中半正规, 再由引理 6 和引理 2(iii) 可得, H_1 是 H_2 在

G 中的 S -补, 同时 H_2 也是 H_1 在 G 中的 S -补. 现设 L_1, L_2 是 H_1 的两个不同的极大子群, 且 $A_i = H_2 L_i$, $i=1, 2$, 则

$$A_1 = H_2 L_1 < G \quad A_2 = H_2 L_2 < G$$

我们断言 A_1, A_2 均是 σ -可解的. 显然 $\{L_i, H_2\}$ 是 A_i 的完全 Hall σ -集, $L_i = H_1 \cap A_i$ 是 A_i 的 Hall σ_1 -子群. 因为 H_2 是 H_1 在 G 中的 S -补, 所以对任意 $B < H_2$, 有 $H_1 B < G$, 从而

$$H_1 B \cap A_i = (H_1 \cap A_i) B = L_i B$$

是 A_i 的真子群, 故 L_i 半正规于 A_i . 又由引理 3 知 H_2 在 A_i 中亦半正规, 故 A_i 满足定理假设, 从而由 G 的选取知 A_i 是 σ -可解群. 令 $D_i = H_2^{L_i} \cap L_i^{H_2}$, 则由引理 7 知, D_i 次正规于 G , 再由引理 5 得到 $D_i \leq R_\sigma(G) = 1$. 因此

$$[H_2, L_i] \leq [H_2^{L_i}, L_i^{H_2}] \leq H_2^{L_i} \cap L_i^{H_2} = 1$$

所以 $L_i \leq C_G(H_2)$. 又因为 $H_1 = \langle L_1, L_2 \rangle$, 从而 $H_1 \leq C_G(H_2)$, 故 $H_2 \triangleleft G$, 矛盾.

情况 2 H_2 循环. 由步骤 4 知 H_1 在 G 中半正规, 从而由引理 6 知 H_2 是 H_1 在 G 中的 S -补. 我们断言 $|H_2| = q$. 设 Q 是 H_2 的一个极大子群, 则 $H_1 Q$ 是 G 的真子群. 因 $\{H_1, Q\}$ 是 $H_1 Q$ 的完全 Hall σ -集, 且由引理 3 得 $H_1 Q$ 满足定理假设, 所以由 G 的选取知 $H_1 Q$ 是 σ -可解的. 于是同情况 1 同样的讨论可得到 $H_1 \leq C_G(Q)$, 故 $Q \triangleleft G$. 由步骤 2, $Q = 1$, 从而 $|H_2| = q$, 故 G 是可解群, 矛盾.

综上所述, 定理 1 得证.

推论 1^[15] 如果群 G 的所有非循环 Sylow 子群在 G 中半正规, 那么 G 是可解群.

定理 2 设群 G 有完全 Hall σ -集 $H = \{H_1, \dots, H_t\}$, 使得 H_i 均为超可解子群, 对于所有 $i = 1, \dots, t$, 如果 G 的任意极大子群在 G 中都是 σ -半次正规的, 那么 G 是超可解群.

证 假设定理 2 不成立, 并设群 G 是一极小阶反例, 我们分以下步骤来证明:

步骤 1 若 R 是群 G 的一个非平凡的极小正规子群, 则 G/R 是超可解群.

显然, $\bar{H} = \{H_1 R/R, \dots, H_t R/R\}$ 是 G/R 的一个完全 Hall σ -集, 且 $H_i R/R \cong H_i/H_i \cap R$ 是超可解的. 令 M/R 是 G/R 的任一极大子群, 则 M 也是 G 的极大子群. 于是由引理 3 知, M/R 在 G/R 中 σ -半次正规, 故 G/R 满足定理假设. 因此由 G 的选取, G/R 是超可解群.

步骤 2 G 有唯一极小正规子群, 记作 R .

设 R_1 和 R_2 是 G 的两个不同极小正规子群, 则由步骤 1 知, G/R_1 和 G/R_2 均为超可解的, 故 G 是超可解群, 矛盾.

步骤 3 最后矛盾.

设 M 是 G 的任一极大子群. 如果 $R \leq M$, 那么 M/R 是 G/R 的极大子群, 于是由步骤 1 知, G/R 是超可解群. 所以根据引理 10, 我们有 $|G : M| = |G/R : M/R|$ 为素数. 如果 $R \not\leq M$, 那么 $G = RM$, 且由假设, M 在 G 中 σ -半次正规. 若 M 在 G 中 σ -次正规, 则 $M \triangleleft G$ 或者 G/M_G 为 σ -准素的.

若 $M \triangleleft G$, 则由 R 的唯一性知 $M = 1$, 从而 G 是素数阶循环群, 矛盾.

若 G/M_G 为 σ -准素的, 则对某个 $H_i \in H$, $G/M_G = H_i M_G/M_G$, 因 H_i 是超可解的, 从而 G/M_G 为超可解群, 故 $M_G \neq 1$. 又由步骤 2 知, $R \leq M_G \leq M$, 矛盾. 该矛盾表明 M 在 G 中半正规.

现设 K 是 M 在 G 中的 S -补, 则 $G = MK$, 且对任意 $H < K$ 有 $MH < G$. 我们断言 $M \cap K \leq \Phi(K)$. 事实上, 若 $M \cap K \not\leq \Phi(K)$, 则存在 K 的极大子群 K_1 使得 $M \cap K \not\leq K_1$. 因为 $MK_1 = K_1 M$, 所以进一步我们有

$$MK_1 \cap K = (M \cap K) K_1 = K$$

从而可得

$$MK_1 = M(M \cap K) K_1 = MK = G$$

矛盾, 故 $M \cap K \leq \Phi(K)$. 设 L 是 K 的任一极大子群, 则 ML 是 G 的真子群. 又因 M 是 G 的极大子群, 于是 $ML = M$, 则 $L \leq M \cap K \leq K$, 因此 $L = M \cap K$. 从而

$$\Phi(K) \leq L = M \cap K \leq \Phi(K)$$

于是 $L = M \cap K = \Phi(K)$ 是 K 的极大子群, 这表明 K 的极大子群唯一, 从而 K 为素数幂阶循环群, 故

$|G:M| = |K:M \cap K|$ 为素数. 因此, 对 G 的任一极大子群 M , 都有 $|G:M|$ 为素数. 由引理 10 可知, G 是超可解群, 矛盾. 定理 2 得证.

推论 2^[3] 如果群 G 的所有极大子群在 G 中半正规, 那么 G 是超可解群.

定理 3 设群 G 是具有 Sylow 型的 σ -完全群, 且有完全 Hall σ -集 $H = \{H_1, \dots, H_t\}$. 令 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 且当 $p \in \sigma_i$ 时, H_i 是超可解群. 如果 H_i 的所有极大子群都在 G 中 σ -半次正规, 那么 G 是 σ -可解群.

证 假设定理 3 不成立, 并设 G 是一极小阶反例, 则由 Feit-Thompson 定理可知 $p = 2$. 不失一般性, 可假设 $p \in \sigma_1$.

步骤 1 如果 R 是 G 的非平凡正规子群, 那么 G/R 是 σ -可解群.

若 $2 \nmid |H_1 R/R|$, 则 G/R 为 $2'$ -群, 从而 G/R 是可解群.

若 $2 \mid |H_1 R/R|$, 则 $\bar{H} = \{H_1 R/R, \dots, H_t R/R\}$ 是 G/R 的完全 Hall σ -集. 对 $H_1 R/R$ 的任意极大子群 M/R , 我们有

$$M = M \cap H_1 R = (M \cap H_1) R$$

因为 H_1 是超可解群, 所以由引理 10 知 $|H_1 R/R : M/R| = |H_1 R : M| = |H_1 : M \cap H_1|$ 是素数, 从而 $M \cap H_1$ 是 H_1 的极大子群. 则由引理 3 知 $(M \cap H_1) R/R = M/R$ 在 G/R 中 σ -半次正规, 故 G/R 满足定理假设. 因此由 G 的选取可知, G/R 是 σ -可解群.

步骤 2 $O_{\sigma_1}(G) = O_{\sigma'_1}(G) = 1$.

若 $O_{\sigma_1}(G) \neq 1$, 则由步骤 1 知 $G/O_{\sigma_1}(G)$ 为 σ -可解群. 又因 $O_{\sigma_1}(G)$ 是 σ -可解的, 从而根据引理 4 得到 G 是 σ -可解的, 矛盾, 故 $O_{\sigma_1}(G) = 1$. 若 $O_{\sigma'_1}(G) \neq 1$, 则由步骤 1 知 $G/O_{\sigma'_1}(G)$ 为 σ -可解群. 又因 $O_{\sigma'_1}(G)$ 为奇数阶的, 故是可解群, 从而根据引理 4 得到 G 是 σ -可解的, 矛盾, 因此 $O_{\sigma'_1}(G) = 1$.

步骤 3 最后矛盾.

设 M 是 H_1 的极大子群, 且 $|H_1 : M| = 2$, 于是 $M \triangleleft H_1$. 由假设, M 在 G 中 σ -半次正规. 假设 M 在 G 中 σ -次正规. 则对任意 $x \in G$, 由引理 1(iv) 知 $M \cap H_1^x$ 为 M 的 Hall σ_1 -子群. 于是 $M \cap H_1^x = M$, 即 $M \leq H_1^x$, 故

$$M \leq O_{\sigma_1}(G) = \bigcap_{x \in G} H_1^x = 1$$

因此 $|H_1| = 2$, 从而由引理 9 知 G 是可解群, 矛盾. 因此 M 在 G 中半正规.

设 K 是 M 在 G 中的 S -补, 则 $G = MK$. 于是对任意 $q \in \sigma_i \cap \pi(G) (i = 2, \dots, t)$, 有 $q \nmid |K|$. 设 $Q \in \text{Syl}_q(K)$, 令 $D = M^Q \cap Q^M$, 则由引理 7 知 D 次正规于 G . 如果 $D = 1$, 那么

$$[M, Q] \leq [M^Q, Q^M] \leq M^Q \cap Q^M = 1$$

从而 $Q \leq C_G(M)$. 则由 q 的任意性知 $|G : N_G(M)|$ 是 σ_1 -数, 又由 $M \triangleleft H_1$ 可得 $M \triangleleft G$, 与步骤 2 矛盾. 因此存在 $Q \in \text{Syl}_q(K)$, 使得 $D = M^Q \cap Q^M \neq 1$. 显然 $D \leq MQ$, 于是由引理 3 知 M 在 MQ 中半正规. 又因为 $M \leq H_1$ 是超可解的, 则 M 为 2-幂零的, 从而由文献[15]的定理 1 知 MQ 为 $\pi(M)$ -可解的, 进而由引理 8 知 D^G 为 $\pi(M)$ -可解的. 令 R 是 G 的极小正规子群, 且 $R \leq D^G$, 则 R 亦是 $\pi(M)$ -可解的. 再因 $|H_1 : M| = 2$, 那么 $\pi(H_1) = \pi(M)$ 或者 $\pi(H_1) = \pi(M) \cup \{2\}$.

如果 $\pi(H_1) = \pi(M)$, 则 R 为 $\pi(H_1)$ -可解的, 从而 R 是 $\pi'(H_1)$ -群或初等交换 t -群, 其中 $t \in \sigma_1$. 若 R 是 $\pi'(H_1)$ -群, 则 $R \leq O_{\sigma'_1}(G) = 1$, 矛盾. 若 R 是初等交换群, 则 $R \leq O_{\sigma_1}(G) = 1$, 矛盾.

如果 $\pi(H_1) = \pi(M) \cup \{2\}$, 那么 $|H_1|_2 = 2$, 从而由引理 9 知 G 是可解群.

综上所述, 定理 3 得证.

定理 4 设群 G 是具有 Sylow 型的 σ -完全群, 且 $H = \{H_1, \dots, H_t\}$ 是 G 的一个完全 Hall σ -集, 使得对所有的 $i = 1, \dots, t$, H_i 是超可解群. 令 A 和 B 是 G 的子群, 且 $G = AB$. 如果 A, B 的所有 Hall σ_i -子群在 G 中都是 σ -半次正规的, 那么 G 是超可解群.

证 不失一般性, 可设 H_i 是 G 的 Hall σ_i -子群 ($i = 1, \dots, t$). 假设定理 4 不成立, 并设群 G 是一极小阶反例, 我们分以下步骤来证明:

步骤 1 对 G 的任一非平凡的正规子群 R , G/R 是超可解群.

令 R 是 G 的任一非平凡的正规子群, 则

$$G/R = AR/R \cdot BR/R$$

因为 $H_i R/R$ 是 G/R 的一个 Hall σ_i -子群, 且 $H_i R/R \cong H_i/H_i \cap R$ 是超可解的, 所以 $\bar{H} = \{H_1 R/R, \dots, H_t R/R\}$ 是 G/R 的一个完全 Hall σ -集, 且 $H_i R/R$ 是超可解的 ($i=1, \dots, t$). 令 H/R 是 AR/R 的任一 Hall σ_i -子群, 则

$$H = (H \cap A)R$$

且

$$|AR/R : H/R| = |AR : H| = |AR : (H \cap A)R| = |A : H \cap A|$$

是 σ'_i -数. 再令 S 是 $H \cap A$ 的任一 Hall σ_i -子群, 则 $|A : S| = |A : H \cap A| |H \cap A : S|$ 是 σ'_i -数. 从而 S 是 A 的一个 Hall σ_i -子群, 则由假设知 S 在 G 中是 σ -半次正规的. 又因为

$$SR/R \leq H/R$$

且

$$|AR/R : SR/R| = |AR : SR| = |A : S| / |A \cap R : S \cap R|$$

是 σ'_i -数, 所以 SR/R 是 AR/R 的一个 Hall σ_i -子群, 故 $SR/R = H/R$. 由引理 3(ii) 知, $H/R = SR/R$ 在 G/R 中是 σ -半次正规的. 类似地, 我们可以证明 BR/R 中的任一 Hall σ_i -子群 K/R 在 G/R 中是 σ -半次正规的. 因此 G/R 满足定理假设条件, 故由 G 的选取可知, G/R 是超可解群.

步骤 2 G 是可解群.

事实上, 我们只需证明 G 是 σ -可解群. 因为若 G 是 σ -可解的, 则对 G 的任一主因子 H/K , 都有 H/K 是 σ -准素的, 所以存在 G/K 的某一 Hall σ_i -子群 $H_i K/K$, 使得 $H/K \leq H_i K/K$. 又因 $H_i K/K \cong H_i/H_i \cap K$ 是超可解的, 故 H/K 是初等交换的 q -群, 对于某个素数 q , G 是可解群.

下面我们证明 G 是 σ -可解群. 令 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 且不妨假设 $p \in \sigma_1$. 因为 $G = AB$, 所以若 A, B 都是 σ_1 -子群, 则 G 是 σ_1 -群, 从而 G 是 σ -可解群, 得证.

下面我们可以假设 A, B 不全在 σ_1 -子群, 不妨设 A 不是 σ_1 -子群, 则 A 中存在 Hall σ_i -子群 A_i , 使得 $A_i \neq 1$ 且 $i \neq 1$. 由定理假设, A_i 在 G 中是 σ -半次正规的.

若 A_i 在 G 中是 σ -次正规的, 则由引理 1(v) 知 $A \leq O_{\sigma_i}(G)$. 从而由步骤 1 知 $G/O_{\sigma_i}(G)$ 是超可解的, 进而 G 是 σ -可解的.

若 A_i 在 G 中是半正规的, 则由文献[19]的引理 11 知 A_i^G 是 p' -群. 因为 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子, 所以 A_i^G 是可解的. 又由步骤 1 知 G/A_i^G 是超可解的, 从而 G 是可解的.

因此, 在任一种情况下, 我们都能得到 G 是 σ -可解的. 从而步骤 2 成立.

步骤 3 G 中含有唯一的极小正规子群, 记为 N . 且 $N = O_q(G) = C_G(N)$, 对于某个素数 q , $q \in \sigma_i$. 由步骤 1 和步骤 2 可以直接得到.

步骤 4 最后矛盾.

设 L 是 A 的 Hall σ_i -子群. 由步骤 2 知存在 $x \in G$, 使得 $L \leq H_i^x$. 因为 H_i 是超可解的且 $N \leq H_i^x$, 所以存在 N 的极大子群 N_1 , 使得 $N_1 \triangleleft H_i^x$. 对 A 的任意 Hall σ_j -子群 T ($j \neq i$), 由定理假设知 T 在 G 中是 σ -半次正规的.

如果 T 在 G 中是 σ -次正规的, 则

$$T \leq O_{\sigma_j}(G) \leq C_G(N) = N$$

矛盾. 从而 T 在 G 中是半正规的. 故存在 G 的子群 U , 使得 $G = TU$, 且对任意 $U_1 \leq U$ 有 $TU_1 \leq G$. 显然 $N \leq U$, 从而 $TN_1 = N_1 T$. 由 $TN_1 \cap N = N_1$ 知 $T \leq N_G(N_1)$, 故

$$T \leq N_G(N_1) \cap A = N_A(N_1)$$

即 $|A : N_A(N_1)|$ 是 σ'_j -数. 由 j 的任意性知 $|A : N_A(N_1)|$ 是 σ_i -数.

与上面的证明类似, 可得 $|B : N_B(N_1)|$ 也是 σ_i -数.

因为 $N_1 \triangleleft H_i^x$ 且 $L \leq H_i^x$, 所以有 $L \leq N_A(N_1)$, 但 L 是 A 的 Hall σ_i -子群, 所以 $|A : N_A(N_1)|$ 是

σ'_i -数, 从而 $A = N_A(N_1)$. 由 $G = AB$ 知 $N_G(N_1) = AN_B(N_1)$, 故 $|G : N_G(N_1)| = |B : N_B(N_1)| / |A \cap B : A \cap N_B(N_1)|$ 是 σ_i -数. 又因为 H_i^x 是 G 的 Hall σ_i -子群, 且 $N_1 \triangleleft H_i^x$, 所以 $H_i^x \leq N_G(N_1)$, 即 $|G : N_G(N_1)|$ 是 σ'_i -数, 从而 $G = N_G(N_1)$, 即 $N_1 \triangleleft G$. 又因 N 是 G 的极小正规子群, 所以 $N_1 = 1$. 故 $|N| = q$, 再由 G/N 是超可解群可得 G 是超可解群, 矛盾.

综上所述, 定理 4 得证.

推论 3^[3] 令 A 和 B 是 G 的子群, 且 $G = AB$. 如果 A, B 的所有 Sylow 子群在 G 中都是半次正规的, 那么 G 是超可解群.

参考文献:

- [1] 苏向盈. 有限群的半正规子群 [J]. 数学杂志, 1988, 8(1): 5-10.
- [2] 王品超, 杨兆兴. 有限群的某些定理 [J]. 数学进展, 1995, 24(6): 547-549.
- [3] MONAKHOV V S, TROFIMUK A A. On the Supersolubility of a Group with Semisubnormal Factors [J]. Journal of Group Theory, 2020, 23(5): 893-911.
- [4] SKIBA A N. On σ -Subnormal and σ -Permutable Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 2015, 436(16): 1-16.
- [5] SKIBA A N. A Generalization of a Hall Theorem [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2016, 15(5): 207-214.
- [6] GUO W B, SKIBA A N. On Π -Quasinormal Subgroups of Finite Groups [J]. Monatshefte Für Mathematic, 2018, 185(3): 443-453.
- [7] GUO W B, SKIBA A N. Groups with Maximal Subgroups of Sylow Subgroups σ -Permutably Embedded [J]. Journal of Group Theory, 2017, 20(1): 169-183.
- [8] 毛月梅, 马小箭. 两个 σ -超可解子群的积 [J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(4): 409-417.
- [9] 高建玲, 毛月梅. 有限群的 δ -置换子群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 105-109.
- [10] 曹建基, 高建玲. 非正规循环子群的正规化子皆极大的两类有限可解群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(12): 81-85.
- [11] 袁媛, 常健, 刘建军. 有限群的可解性与其部分极大子群的 SS-可补性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(4): 1-4.
- [12] BEIDLEMAN J C. Seminormal, Non-Normal Maximal Subgroups and Soluble PST-Groups [J]. Advances in Group Theory and Applications, 2016, 2(2): 67-77.
- [13] DOERK K, HAWKES T O. Finite Soluble Groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
- [14] GUO W B. The Theory of Classes of Groups [M]. New York: Science Press/Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [15] MONAKHOV V S. Finite Groups with a Seminormal Hall Subgroup [J]. Mathematical Notes, 2006, 80(3/4): 542-549.
- [16] MURASHKA V I. One Formation of Finite Groups [EB/OL]. 2013: arxiv: 1312.0313[math.GR]. <https://arxiv.org/abs/1312.0313>.
- [17] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [18] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [19] KNYAGINA V N, MONAKHOV V S. Finite Groups with Seminormal Schmidt Subgroups [J]. Algebra and Logic, 2007, 46(4): 244-249.

责任编辑 廖坤