

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.07.005

若干太阳图的顶点魔幻全标号优化算法^①

席晓慧, 王遂缠, 高鹏

甘肃省气象信息与技术装备保障中心, 兰州 730020

摘要: 图的顶点魔幻全标号指: 对于图 $G(p, q)$, 任意顶点 v 及其关联边的标号值之和等于常数 k , 其中标号值集合与集合 $\{1, 2, \dots, p+q\}$ 一一映射. 该文实现了一种针对随机图的顶点魔幻全标号优化算法, 能够求解得到有限点内简单连通图的标号, 通过结果分析, 发现了两类太阳图 S_n 和 GS_n 、广义太阳图 $S_{n,m}$ 以及图 $P(n, 1)$ 的标号特性, 总结出若干定理并给出证明.

关键词: 顶点魔幻全标号; 优化算法; 太阳图; 标号特性

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)07-0027-08

On Vertex-Magic Total Labelings Optimization Algorithm of Some Sun-graphs

XI Xiaohui, WANG Suichan, GAO Peng

Gansu Meteorological Information and Technical Equipment Support Center, Lanzhou 730020, China

Abstract: For graph $G(p, q)$, vertex-magic total labeling means that the sum of the labeling values of any vertex v and its incident edges is equal to the constant k , where the mapping of labeling values are: $\{1, 2, \dots, p+q\}$. In this paper, a vertex magic-total labeling optimization algorithm is designed and used to obtain the labeling of simple connected graph within finite vertices. By analyzing and summarizing the labeling results of sun-graphs S_n , GS_n and general sun graph $S_{n,m}$ and graphs $P(n, 1)$, the labeling rules for these graphs are found, some theorems are summed up and proved as well.

Key words: vertex-magic total labelings; optimization algorithm; sun-graphs; labeling rules

图的标号来源于 1967 年 Rosa 提出的优美树猜想, 它的出现使得很多生活中的实际问题得到解决, 如优美图可应用在密码设计、通讯网络编址、交通物流控制、雷达脉冲编码及 X 射线密码技术等^[1-4]. 由于图形能够直观有效地解决实际生活中的一些难以解决的问题, 所以衍生了图论的一系列应用. 因此, 研究图的标号不仅能丰富图论的研究成果, 而且能更广泛地应用于实际生活中的问题.

① 收稿日期: 2021-07-18

作者简介: 席晓慧, 助理工程师, 研究生, 主要从事智能优化算法的研究.

通信作者: 王遂缠, 高级工程师.

文献[4]提出了顶点魔幻全标号,之后该标号被越来越多的学者关注和研究.通过文献[4-9]可知,在满足一定的条件下,特殊图圈图 C_n 、路图 P_n 、 $K_{m,m}$ 、 $K_{m,m}-e$ 以及 K_n 存在顶点魔幻全标号.该标号的研究成果主要集中在特殊图,针对一般图的结果较少,研究方法绝大多数都是传统方法,利用计算机算法来研究的文献非常少见.

太阳图常被用来刻画环形网络,该网络在网络设计、网络建设中有着重要应用,标号理论是研究环形网络的方法之一.文献[7]指出图 $G-\text{sun}G^*$ 在 $e > (-1 + \sqrt{1+8n^2})/2$ 时不存在顶点魔幻全标号,其中图 G 是任意 n 阶图.文献[10-11]给出了当 $n \geq 3$ 且 $1 \leq m \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ 时,图 $p(n, m)$ 存在魔幻常数 $k = 9n + 2, 10n + 2, 11n + 2$ 的顶点魔幻全标号.通过文献[12]可知,太阳图存在 $\{a, d\}$ -点反魔幻边标号,其中 $d = \{1, 4\}$.

本文利用顶点魔幻全标号优化算法得到有限点内的随机图标号,进一步研究太阳图 S_n 、 GS_n 、 $S_{n,m}$ 以及图 $P(n, 1)$ 的顶点魔幻全标号.通过分析算法结果,发现上述几类太阳图的标号特性,总结出若干定理并给出证明.

1 基础知识

图 $G(p, q)$ 表示的是包含 p 个顶点, q 条边,且顶点集合为 $V(G)$,边集合为 $E(G)$ 的简单连通图.顶点 v 的度记为 $d(v)$; C_n 指的是 n 个顶点的圈图.

定义 1^[3] 对于给定的图 $G(p, q)$,如果存在常数 k 和一一映射 $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$,使得对每个顶点 $v \in V(G)$ 都满足 $f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k$,其中 $N(v)$ 表示与顶点 v 所关联的顶点的集合, k 为魔幻常数,则称 f 是图 $G(p, q)$ 的顶点魔幻全标号(vertex-magic total labeling),简称 VMTL 图.

定义 2^[3] 太阳图 S_n 是由 n 个顶点的 C_n 和 n 片叶子组成,其中 C_n 的每一顶点只能与一片叶子邻接,如图 1(a)所示.在太阳图 S_n 的每一个叶子节点悬挂一个点构成的图记为图 GS_n ,如图 1(b)所示.

定义 3^[3] C_n 的每个顶点 $v_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ 连接 m 个顶点 $u_i (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ 所构成的图记为图 $S_{n,m}$,如图 1(c)所示.

定义 4^[3] 将太阳图 S_n 的每个叶子相连构成的图记为图 $p(n, 1)$,如图 1(d)所示.

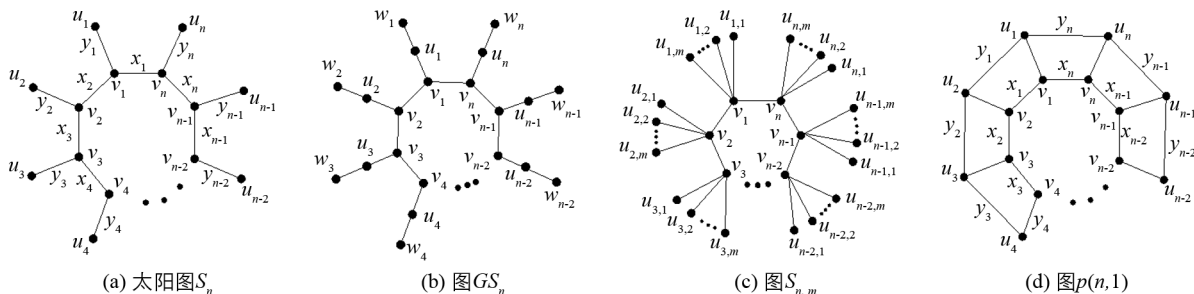


图 1 示例图

顶点魔幻全标号算法基于解空间的递归搜索算法,为了方便介绍算法步骤,下面给出优化前的解空间的定义.

定义 5 对于度序列 $\{d(v_i)\} (i = 1, 2, \dots, p)$, 相同的一类图 $G(p, q)$ 都存在一个表(如表 1), 设 $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$, 映射 $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$, 满足 $f(v), f(uv) \in [1, p+q]$, $f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k$, 其中 $N(v)$ 指顶点 v 的关联点, 则称表 1 为图 $G(p, q)$ 的 VMTL 解空间.

表 1 VMTL 解空间 $\theta(p, q, k)$

$d(v)$	点 v 及关联边标号			
1	$1, k-1$	$2, k-2$	$\cdots$	$p+q, k-p+q$
2	$1, 2, k-3$	$1, 3, k-4$	$\cdots$	$p+q-1, p+q,$ $k-2p-2q+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p-1$	$1, 2, \cdots, p-1,$ $k-(p-1)p/2$	$1, 3, \cdots, p,$ $k-p(p+1)/2-2$	$\cdots$	$q+2, q+3, \cdots, p+q,$ $k-(p-1)(p+2q+2)/2$

2 顶点魔幻全标号优化算法

对于图 G , 当图 G 满足 VMTL 时, 存在映射: $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$, 即所有的标号总和 C 为

$$C = S_p + S_q = \sum_{i=1}^{p+q} i$$

其中, S_p 和 S_q 分别表示顶点和边的标号值总和.

图 G 的每个顶点满足

$$f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k$$

当图 G 满足 VMTL 时, 魔幻常数 k 的取值范围为

$$\left(\sum_{i=1}^e i + c\right) / p \leq k \leq \left(\sum_{i=v+1}^{v+e} i + c\right) / p \tag{1}$$

根据公式(1) 及定义 5 实现 VMTL 算法, 并在算法中增加判断函数对解空间进行优化, 删除不满足判断函数条件的解空间, 减少算法的时间复杂度, 判断函数如公式(2) 所示:

$$\begin{cases} |f(v) \mid \cup \mid \sum_{u \in N(v)} f(uv) \mid \geq \mid d(v) + 1 \mid \\ |f(v) \mid \cap \mid \sum_{u \in N(v)} f(uv) \mid = \emptyset \end{cases} \tag{2}$$

其中优化算法为

解空间优化算法
Require 初始化解空间, 图 G 的度序列及相同 $d(v)$ 的个数
Repeat
从训练集解空间中选择标号值样本 $\{(1, k-1), (2, k-2), \cdots, (p+q, k-p+q)\}$;
参数更新 $ d(v_i) + 1 \leftarrow$ 符合条件的样本个数
Until 样本集筛选完成

- 顶点魔幻全标号优化算法实现的主要思路如下:
- (i) 由文献[12] 中的非同构图算法生成有限点内的所有非同构图;
 - (ii) 获取图 G 的度序列、魔幻常数, 同时结合定义 5 得到解空间;
 - (iii) 利用解空间优化算法对解空间进行优化, 将不可用的解空间删除;
 - (iv) 搜索解空间得到满足条件的标号值.

顶点魔幻全标号优化算法实现如下:

VMTL 算法

Input 图 $G(p, q)$ 的邻接矩阵

Output 标号结果

Begin

1. $C \leftarrow (p + q)(p + q + 1)/2$
2. for $i \leftarrow 1$ to $p + q$
3. $k \leftarrow (i + C)/p$
4. 利用算法 1 得到当前 k 值下的解空间 $\varphi(p, q, k)$
5. if($|\varphi| < p$)
6. continue;
7. else
8. Search for a combination of labels $\varphi(p, q)$
9. if $\varphi(p, q)$ satisfies the VMTL conditions
10. return VMTL matrix
11. end if
12. end Search
13. end if
14. end for
15. if(图 G 存在 VMTL)
16. output(VMTL 结果矩阵)
17. else
18. output(输出该图的邻接矩阵)
19. end if

End

3 算法结论及证明

利用算法得到了图 $S_n, GS_n, S_{n,m}$ 及图 $P(n, 1)(3 \leq n \leq 6)$ 的 VMTL 标号, 经过分析得到以下标号结论:

定理 1 对于太阳图 S_n , 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 5n + 3$ 的顶点魔幻全标号.

证 太阳图 S_n 的顶点集合

$$V(S_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

边集合为

$$E(S_n) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

即

$$\begin{aligned} |V(S_n)| &= 2n & |E(S_n)| &= 2n \\ f(v) \cup f(e) &= \{1, 2, \cdots, 4n\} \end{aligned}$$

对于太阳图 $S_n(n \geq 3)$, 根据算法执行结果, 分析得到该图存在以下标号:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \begin{cases} i & i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ n+1 & i = n \end{cases} \\ f(v_i) &= \begin{cases} 3n-i+1 & i = 1, 2, \cdots, n-2 \\ n+2 & i = n-1 \\ n & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3n+i+2 & i=1, 2, \dots, n-2 \\ 3n+2 & i=n-1 \\ 2n+2 & i=n \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2n-i+1 & i=1, 2, \dots, n-2 \\ 2n+1 & i=n-1 \\ 3n+1 & i=n \end{cases}$$

太阳图 S_n 的顶点和边标号集合分别为

$$f(v) = \sum_{i=1}^n (f(v_i) + f(u_i)) \quad f(e) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(y_i))$$

由 $f(v_i)$ 和 $f(u_i)$ 的标号可知 $f(v_i)$ 和 $f(u_i)$ 两两互不相交, 且为顶点集 $f(v)$ 到数集 $\{n, n+2, 2n+2, 2n+3, 2n+4, \dots, 3n, 3n+2, 3n+3, \dots, 4n\}$ 的一一映射. 同理, $f(x_i)$ 和 $f(y_i)$ 两两互不相交, 且为边集 $f(e)$ 到数集 $\{1, 2, \dots, n-1, n+1, 2n+1, 2n, 2n-1, \dots, n+3, 3n+1\}$ 的一一映射. 则 $f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 4n\}$, 对于图中任意点 v_i , w 为 v_1 的关联点, 魔幻常数 k 满足以下公式:

$$k = f(v_1) + \sum_{w \in N(v_1)} f(wv_1) = f(v_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(y_1) = 3n - 2 + 1 + 2 + 2n = 5n + 3$$

所以, f 是太阳图 S_n 的顶点魔幻全标号, 使得太阳图 S_n 为魔幻常数 $k=5n+3$ 的顶点魔幻全标号图, 即定理 1 成立. 以图 S_{15} 为例, 将标号结论应用到图标号中, 得到图 S_{15} 的 VMTL 标号如图 2(a) 所示.

定理 2 对于图 GS_n , 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k=8n+2$ 的顶点魔幻全标号.

证 设图 GS_n 的顶点集合为

$$V(GS_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

边集合为

$$E(GS_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n-1}, v_1v_n, u_1w_1, u_2w_2, \dots, u_nw_n, u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$$

即

$$f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 6n\}$$

对于图 $GS_n (n \geq 3)$, 根据算法执行结果, 分析得到该图存在以下标号:

$$\begin{aligned} f(u_iv_i) &= 2j-1 & i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n \\ f(u_i) &= 2j-1 & i=1, 2, \dots, n; j=n+1, n+2, \dots, 2n \\ f(v_i) &= 2j-1 & i=2, 3, \dots, n, 1; j=2n+1, 2n+2, \dots, 3n \\ f(v_1v_n, v_nv_{n-1}, v_{n-1}v_{n-2}, \dots, v_3v_2, v_2v_1) &= 2j & j=1, 2, \dots, n \\ f(w_i) &= 2j & i=1, 2, \dots, n; j=n+1, n+3, n+5, \dots, 3n-1 \\ f(u_iw_i) &= 2j & i=n, n-1, n-2, \dots, 1; j=n+2, n+4, \dots, 3n \end{aligned}$$

对于图 GS_n , 有

$$f(v) = \sum_{i=1}^n (f(v_i) + f(u_i) + f(w_i))$$

$$f(e) = \sum_{i=1}^n (f(w_iu_i) + f(u_iv_i)) + f(v_1v_n) + \dots + f(v_2v_1)$$

可知 $f(v_i), f(u_i)$ 和 $f(u_iv_i)$ 两两互不相交, 且为 $f_1 \longrightarrow \{1, 3, 5, \dots, 6n-1\}$ 的一一映射; $f(w_i), f(u_iw_i)$ 和 $f(v_1v_n), f(v_nv_{n-1}), \dots, f(v_2v_1)$ 为 $f_2 \longrightarrow \{2, 4, 6, \dots, 6n\}$ 的一一映射. 使得

$$f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 6n\}$$

对于图中任意点 v_i , k 满足公式

$$k = f(v_n) + \sum_{w \in N(v_n)} f(wv_n) = 8n + 2$$

即定理 2 成立, 以图 GS_{10} 为例, 将标号结论应用到图标号中, 得到图 GS_{10} 的 VMTL 标号如图 2(b) 所示.

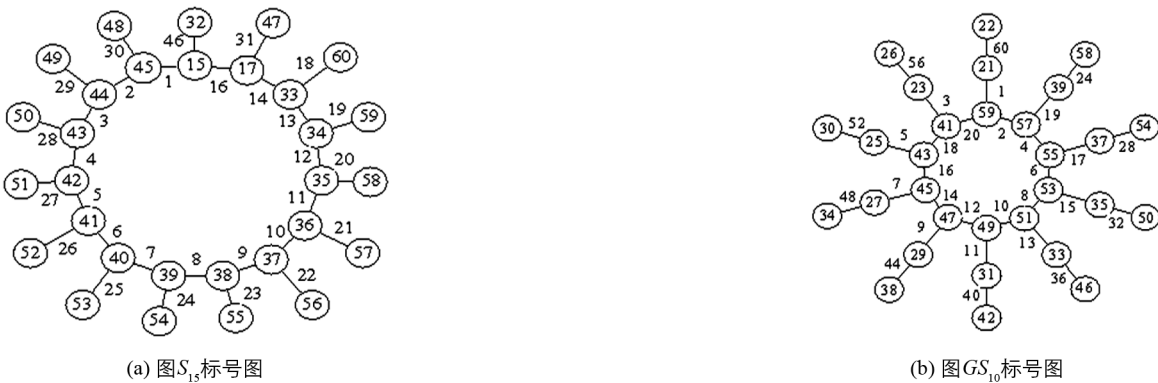


图 2 VMTL 示例图

定理 3 广义太阳图 $S_{n,m}$ ($n \geq 3, m > 1$) 不存在顶点魔幻全标号.

证 由顶点魔幻全标号优化算法可知图 $S_{n,m}$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 不存在标号, 即算法输出为图的邻接矩阵. 设图 $S_{n,m}$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 的顶点集合为

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,m}, u_{2,1}, \dots, u_{n,m}\}$$

边集合为

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n-1}\} \cup \{v_1v_n, u_{1,1}v_1, u_{1,2}v_1, \dots, u_{1,m}v_1\} \cup \\ \{u_{2,1}v_2, u_{2,2}v_2, \dots, u_{2,m}v_2\} \cup \dots \cup \{u_{n,1}v_n, u_{n,2}v_n, \dots, u_{n,m}v_n\}$$

如图 1(c) 所示. 即 $|V| = n + mn, |E| = n + mn$, 如果图 $S_{n,m}$ 存在顶点魔幻全标号, 由定义 1 可知标号集合为

$$f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 2n(m+1)\}$$

由图 $S_{n,m}$ 可知

$$d(v_1) = d(v_2) = \dots = d(v_n) = m + 2 \quad d(u_{1,1}) = d(u_{1,2}) = \dots = d(u_{1,m}) = 1$$

由文献[8]的定理 5 可以得到 k 取最小值时, 图中 $d(v) = m + 2$ 的顶点及其关联边取标号集合 $\{1, 2, \dots, 2n + mn\}$, 且顶点集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 两顶点之间的关联边取标号集合 $\{1, 2, \dots, n\}$. k 取最大值时, $d(v) = 2$ 的顶点集合 $u = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{n,m}\}$ 取标号值 $\{2n + 1, 2n + 2, \dots, 2n + 2mn\}$. 即

$$nk_{\min} = \sum_{i=1}^n [f(v_i) + \sum_{w \in N(v_i)} f(wv_i)] = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^{2n+mn} i \tag{3}$$

$$mnk_{\max} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [f(u_{i,j}) + \sum_{w \in N(u_{ij})} f(wu_{ij})] = \sum_{i=2n+1}^{2n+2mn} i \tag{4}$$

当图 $S_{n,m}$ 满足顶点魔幻全标号时, 有 $k_{\min} \leq k_{\max}$, 结合公式(3)和(4), 当图 $S_{n,m}$ 存在顶点魔幻全标号时, n 和 m 满足 $m^2n + m - 3n + 1 \leq 0$. 通过分析可知, 当 $n \geq 3, m = 1$ 时有解, 该图为太阳图, 其标号规律如定理 1; 而当 $n \geq 3, m > 1$ 时无解, 因此不存在顶点魔幻全标号. 定理 3 成立.

定理 4 对于图 $P(n, 1)$, 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 10n + 1$ 的顶点魔幻全标号.

证 设图 $P(n, 1)$ 的顶点集合为

$$V(P(n, 1)) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

边集合为

$$E(P(n, 1)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n\}$$

即 $V|P(n, 1)| = 2n, E|P(n, 1)| = 3n$, 所以 $f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 5n\}$. 对于图 $P(n, 1)$ ($n \geq 3$), 根据算法执行结果, 分析得到该图存在以下标号:

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 5(n-2) & i=1 \\ 5(n-1) & i=2 \\ 5n & i=3 \\ 5(i-3) & i=4,5,\dots,n \end{cases} \\
 f(x_{n-i}) &= \begin{cases} 1 & i=n-2 \\ 6 & i=n-1 \\ 1+5(i+2) & i=0,1,\dots,n-3 \end{cases} \\
 f(y_{n-i}) &= \begin{cases} 2+5(i+1) & i=0,1,2,\dots,n-2 \\ 2 & i=n-1 \end{cases} \\
 f(u_i) &= \begin{cases} 3+5(n-1) & i=1 \\ 3+5(i-2) & i=2,3,\dots,n \end{cases} \\
 f(u_i v_i) &= \begin{cases} 4+5(i-3) & i=3,4,\dots,n \\ 4+5(n-2) & i=1 \\ 4+5(n-1) & i=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对于图 $p(n, 1)$, 其顶点和边的集合分别为

$$f(v) = \sum_{i=1}^n (f(v_i) + f(u_i)) \quad f(e) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(y_i) + f(u_i v_i))$$

$f(v_i)$ 和 $f(u_i)$ 两两互不相交, 且点标号为 $f(v) \longrightarrow \{3, 8, 13, 18, \dots, 3+5(n-1), 5, 10, 15, \dots, 5n\}$ 的一一映射. $f(x_i)$ 和 $f(y_i)$ 两两互不相交, 且边标号为 $f(e) \longrightarrow \{1, 6, 11, \dots, 1+5(n-1), 2, 7, 12, \dots, 2+5(n-1), 4, 9, 14, \dots, 4+5(n-1)\}$ 的一一映射. 使得 $f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 5n\}$, k 满足公式 $k = f(v_1) + \sum_{w \in N(v_1)} f(wv_1) = 10n + 1$.

综上所述, 定理 4 成立. 以图 $P(9, 1)$ 为例, 由标号结论得到图 $P(9, 1)$, $k=91$ 的 VMTL 标号如图 3(a) 所示.

定理 5 对于图 $P(n, 1)$, 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 10n + 2$ 的顶点魔幻全标号.

证 由定理 4 可知图 $P(n, 1)$ 的 $f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 5n\}$, 由算法可知图 $P(n, 1)$ ($n \geq 3$) 存在以下标号:

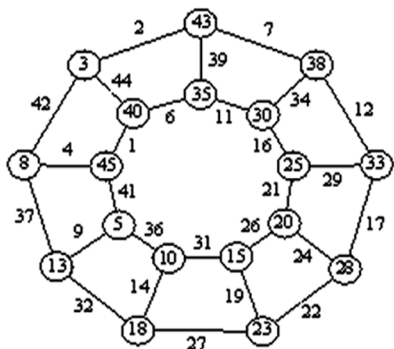
$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= \begin{cases} 5(n-2) & i=1 \\ 5(n-1) & i=2 \\ 5n & i=3 \\ 5(i-3) & i=4,5,\dots,n \end{cases} \\
 f(x_{n-i}) &= \begin{cases} 2 & i=n-2 \\ 7 & i=n-1 \\ 2+5(i+2) & i=0,1,\dots,n-3 \end{cases} \\
 f(y_{n-i}) &= \begin{cases} 4+5(i+1) & i=0,1,2,\dots,n-2 \\ 4 & i=n-1 \end{cases} \\
 f(u_i) &= \begin{cases} 1+5(n-1) & i=1 \\ 1+5(i-2) & i=2,3,\dots,n \end{cases} \\
 f(u_i v_i) &= \begin{cases} 3+5(i-3) & i=3,4,\dots,n \\ 3+5(n-2) & i=1 \\ 3+5(n-1) & i=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

同定理 4, 点标号为 $f(v) \longrightarrow \{1, 6, 11, 16, \dots, 1+5(n-1), 5, 10, 15, \dots, 5n\}$ 的一一映射. 边

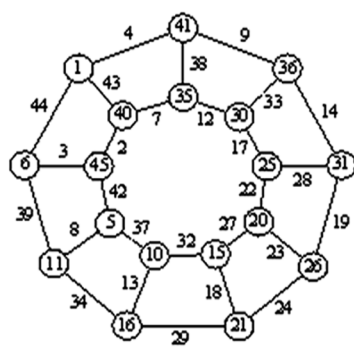
集合为 $f(e) \longrightarrow \{2, 7, 12, \dots, 2+5(n-1), 3, 8, 13, \dots, 3+5(n-1), 4, 9, 14, \dots, 4+5(n-1)\}$ 的一一映射, 使得 $f(v) \cup f(e) = \{1, 2, \dots, 5n\}$, k 满足公式

$$k = f(v_n) + \sum_{w \in N(v_n)} f(wv_n) = 10n + 2$$

定理 5 成立. 以图 $P(9, 1)$ 为例, 由标号结论得到图 $P(9, 1)$, $k = 92$ 的 VMTL 标号如图 3(b) 所示.



(a) 图 $P(9, 1)$ 的 $k=91$ 标号图



(b) 图 $P(9, 1)$ 的 $k=92$ 标号图

图 3 广义 Petersen 图的 VMTL

4 结束语

本文利用 VMTL 算法得到有限点内的 VMTL 图集, 通过对标号集合分析得到: 太阳图 S_n 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 5n + 3$ 的顶点魔幻全标号; 图 GS_n 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 8n + 2$ 的顶点魔幻全标号; 图 $P(n, 1)$ 当 $n \geq 3$ 时存在魔幻常数 $k = 10n + 1$ 和 $k = 10n + 2$ 的顶点魔幻全标号. 同时得到广义太阳图 $S_{n,m}$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 不存在顶点魔幻全标号, 并证明了结论的正确性.

参考文献:

- [1] ROSA A. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph [J]. Theory of Graphs, 1967, 1967: 349-355.
- [2] 魏众德, 李敬文, 武永兰. 双圈图的优美性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2019, 57(1): 42-48.
- [3] 唐保祥, 任韩. 3 类图的优美标号 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(12): 20-24.
- [4] GALLIAN J A. A Dynamic Survey of Graph Labeling [J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2014, 17: 1-41.
- [5] KUMAR R V, VIJAYALAKSHMI D. Vertex Magic Total Labeling of Middle and Total Graph of Cycle [J]. Communications Faculty of Science University of Ankara Series Mathematics and Statistics, 2019, 68(2): 1335-1340.
- [6] UMA J, BHAVANI E M. Vertex-Magic Total Labeling on Complete and Corona Graph [J]. AIP Conference Proceedings, 2019, 2112(1): 020046.
- [7] CICHACZ S, FRONCEK D, SINGGIH I. Vertex Magic Total Labelings of 2-Regular Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2017, 340(1): 3117-3124.
- [8] MACDOUGALL J A, MILLER M, WALLIS W D. Vertex-Magic Total Labelings of Graphs [J]. Utilitas Mathematica, 2002, 61: 3-21.
- [9] 杨笑蕊, 强会英, 纳仁花, 等. 两类特殊图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(2): 29-35.
- [10] BAC C M, MILLER M. Vertex-Magic Total Labelings of Generalized Petersen Graphs [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2022, 79(12): 1259-1264.
- [11] MARR A M, WALLIS W D. Vertex-Magic Total Labelings [M]. Boston: Birkhäuser, 2013.
- [12] MCKAY B D, PIPERNO A. Practical Graph Isomorphism, II [J]. Journal of Symbolic Computation, 2014, 60: 94-112.