

具有非线性出生率和医院容纳量的传染病模型^①

刘单, 刘贤宁

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 该文建立并分析了一类具有非线性出生率和医院容纳量的传染病模型. 首先, 得到了模型解的非负性和有界性. 其次, 计算基本再生数, 并得到了无病平衡点的稳定性. 再次, 讨论了地方病平衡点的存在情况, 并得到了模型发生后向分支的参数条件. 分析该参数条件可知, 医院收治病人能力越大, 后向分支发生的可能性越小. 最后, 通过数值模拟验证了所得理论结果.

关键词: 医院容纳量; 非线性出生率; 后向分支; Lyapunov 稳定

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)07-0035-09

An Epidemic Model with a Nonlinear Birth Rate and Hospital Capacity

LIU Dan, LIU Xianning

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, an infectious disease model with nonlinear birth rate and hospital capacity has been established and analyzed. Firstly, the nonnegativity and boundedness of the model solutions have been obtained. Secondly, the basic reproduction number has been calculated, and the stability of the disease-free equilibrium point has been obtained. Thirdly, the existence of the endemic point has been discussed, and the parameter condition for the occurrence of backward bifurcation of the model has been obtained. Analysis of the parameter conditions shows that the greater the hospital's ability to admit patients, the less likely the backward bifurcation will occur. Finally, the obtained theoretical results are verified via numerical simulations.

Key words: hospital capacity; nonlinear birth rate; backward bifurcation; Lyapunov stable

传染病是由各类病原体引起的能在人与人、动物与动物或者人与动物之间传播的一类疾病. 传染病的爆发可能会对人类的公共卫生安全和生命健康造成重大伤害, 故传染病的监督防治一直是人类重视的工作内容. 数学动力学模型是用来分析传染病传播和控制问题的重要工具之一. 文献[1]将人群分为易感者(S)、感染者(I)、康复者(R), 建立了著名的 SIR 仓室模型来研究传染病. 此后, 仓室模型得到了广泛地研究^[2-16]. 特别地, 文献[2-4]考虑了医院治疗有限的因素, 采用了以下不同的治疗函数:

$$g(I) = \frac{\gamma I}{1 + \alpha I}$$

① 收稿日期: 2022-01-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071382).

作者简介: 刘单, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者: 刘贤宁, 教授.

或者

$$h(I) = \begin{cases} kI, & 0 \leq I \leq I_0 \\ m, & I > I_0 \end{cases}$$

考虑到人口规模非恒定,且生存资源有限,用指数增长来描述人口增长不太符合实际情况.基于此,文献[5,11,12]中的传染病模型里采用了非线性出生率函数.文献[11]在没有疾病的情况下,假设人口增长的方程:

$$\frac{dN}{dt} = \bar{b}(N)N - dN$$

其中, d 是死亡率常数, $\bar{b}(N)N$ 是出生率函数,且 $\bar{b}(N)$ 必须满足 3 个条件:

- (1) $\bar{b}(N) > 0$;
- (2) $\bar{b}(N)$ 是连续可微的,且 $\bar{b}'(N) < 0$;
- (3) $\bar{b}(0^+) > d > \bar{b}(\infty)$.

并提出 $\bar{b}(N)$ 可以采取的一种形式为: $\bar{b}(N) = \frac{A}{N} + c$, $A > 0$, $d > c > 0$.

当传染病在传播时,自由活动的人群中会有患病者和易感者,病人中的一部分会去医院,患病者的另一部分在未察觉到自身患病时会感染他人.所以,本文将人群分为易感者(S)、感染者(I)、住院者(H)、康复者(R).传染病爆发时,由于医院的物资、空间、医护人员都是有限的,病人数目过多时,医院不可能接受全部病人.另外,医院的医疗资源紧张程度也会对感染者是否选择去就医产生一定影响.鉴于此,考虑非线性出生率 $\bar{b}(N) = \frac{A}{N} + B$, ($B < \mu$) 和医院容纳量,建立了如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \left(\frac{A}{N} + B\right)N - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta SI - rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \gamma_1 I - \epsilon_1 I - \mu I \\ \frac{dH(t)}{dt} = rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \gamma_2 H - \epsilon_2 H - \mu H \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 H - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

其中: $S(t), I(t), H(t), R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、感染者、住院者以及康复者的数量, N 表示总人口数量, $N = S + I + H + R$, A 表示人口输入数量, B 和 μ 分别是出生率和自然死亡率, ϵ_1 和 ϵ_2 分别是感染者与住院者的因病死亡率, β 是感染率, γ_1 是感染者的自愈率, γ_2 是住院者的治愈率, r 是已感染的人去医院就医的转移率, K 表示医院所能收治的病人最大数目.

1 解的非负性和有界性

定理 1 当初始值满足 $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $H(0) > 0$, $R(0) > 0$ 时,模型(1)的解($S(t), I(t), H(t), R(t)$)对于任意 $t > 0$ 是正的且一致有界的.

证 首先证明对于任意的 $t > 0$,有 $I(t) > 0$.由模型(1)的第二个方程可得

$$I(t) = I(0)e^{\int_0^t (\beta S(\eta) - r + r\frac{H(\eta)}{K} - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu) d\eta}$$

因此对于任意 $t > 0$,有 $I(t) > 0$.

再证明对于任意的 $t > 0$, $H(t) > 0$ 成立.否则,存在 $t_1 > 0$ 是使得 $H(t) = 0$ 成立的最小时刻.因为 $H(0) > 0$,故当 $t \in [0, t_1)$ 时,有 $H(t) > 0$.根据模型(1)的第三个方程,得

$$\left. \frac{dH}{dt} \right|_{t=t_1} = rI(t_1) > 0$$

从而存在 $\delta_1 > 0$,使得 $t \in (t_1 - \delta_1, t_1)$,有 $H(t) < 0$.这与当 $t \in [0, t_1)$ 时, $H(t) > 0$ 矛盾.故对于任意的 $t > 0$, $H(t) > 0$.

由模型(1)的第 4 个方程可得

$$R(t) = \left[R(0) + \int_0^t (\gamma_2 H(\eta) + \gamma_1 I(\eta)) e^{\mu\eta} d\eta \right] e^{-\mu t}$$

由 $t > 0$, $H(t) > 0$, $I(t) > 0$ 可知, 对于任意 $t > 0$, $R(t) > 0$.

最后, 证明对于任意 $t > 0$, $S(t) > 0$ 成立. 否则, 存在 $t_2 > 0$ 是使得 $S(t) = 0$ 成立的最小时刻. 因为 $S(0) > 0$, 故当 $t \in [0, t_2)$ 时, 有 $S(t) > 0$. 根据模型(1)的第一个方程有

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=t_2} = A + B(I(t_2) + H(t_2) + R(t_2)) > 0$$

故存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $t \in (t_2 - \delta_2, t_2)$ 时 $S(t) < 0$. 这与当 $t \in [0, t_2)$ 时 $S(t) > 0$ 矛盾. 所以, 对任意 $t > 0$, $S(t) > 0$.

接下来证明解的一致有界性. 令 $N(t) = S(t) + I(t) + H(t) + R(t)$, 由模型(1)可得

$$\frac{dN(t)}{dt} = A + BN(t) - \mu N(t) - \epsilon_1 I(t) - \epsilon_2 H(t) \leq A - (\mu - B)N(t)$$

则有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu - B}$$

即模型(1)的解是一致有界的.

由定理(1)可知, $\mathbb{R}_+^4$ 的内部是关于模型(1)的正不变集. 类似地, 也可证明 $\mathbb{R}_+^4$ 是模型(1)的正不变集. 因此, 我们可在可行域:

$$G = \left\{ (S(t), I(t), H(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4 : S(t), I(t), H(t), R(t) \geq 0; S(t) + I(t) + H(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu - B} \right\}$$

内对模型(1)进行研究.

2 基本再生数和无病平衡点的稳定性

利用文献[6]中的下一代矩阵方法, 计算出模型的基本再生数:

$$R_0 = \frac{\beta A}{(\mu - B)(r + \gamma_1 + \epsilon_1 + \mu)}$$

令模型(1)中右端的 4 个方程等于 0, 可得模型的无病平衡点: $\mathbf{E}_0 = \left(\frac{A}{\mu - B}, 0, 0, 0 \right)$.

定理 2 若 $R_0 < 1$, 则模型(1)无病平衡点 $\mathbf{E}_0$ 局部渐近稳定; 若 $R_0 > 1$, 则 $\mathbf{E}_0$ 不稳定.

证 模型(1)在平衡点 $\mathbf{E}_0$ 处的雅可比矩阵:

$$\begin{bmatrix} B - \mu & B - \frac{\beta A}{\mu - B} & B & B \\ 0 & \frac{\beta A}{\mu - B} - r - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & r & -\gamma_2 - \epsilon_2 - \mu & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

其特征方程:

$$\begin{vmatrix} \lambda - (B - \mu) & -B + \frac{\beta A}{\mu - B} & -B & -B \\ 0 & \lambda - \frac{\beta A}{\mu - B} + r + \gamma_1 + \epsilon_1 + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -r & \lambda + \gamma_2 + \epsilon_2 + \mu & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = B - \mu, \lambda_2 = \frac{\beta A}{\mu - B} - r - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu, \lambda_3 = -\gamma_2 - \epsilon_2 - \mu, \lambda_4 = -\mu$$

显然 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ 都小于 0, 当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_2 < 0$. 所以, 若 $R_0 < 1$, 无病平衡点 E_0 局部渐近稳定.

当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_2 > 0$, 此时, E_0 不稳定.

定理 3 当 $\frac{\beta A}{(\mu - B)(\mu + \epsilon_1 + \gamma_1)} < 1$ 时, E_0 全局渐近稳定.

证 对 V 函数

$$V(t) = I(t) + H(t)$$

沿着模型(1)的解轨线求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \beta SI - rI \left(1 - \frac{H}{K}\right) - (\mu + \epsilon_1 + \gamma_1)I + rI \left(1 - \frac{H}{K}\right) - (\mu + \epsilon_2 + \gamma_2)H = \\ &\quad \beta SI - (\mu + \epsilon_1 + \gamma_1)I - (\mu + \epsilon_2 + \gamma_2)H \leqslant \\ &\quad [\beta S - (\mu + \epsilon_1 + \gamma_1)]I \end{aligned}$$

在 G 内有 $S \leqslant \frac{A}{\mu - B}$. 当 $\frac{\beta A}{(\mu - B)(\mu + \epsilon_1 + \gamma_1)} < 1$ 时, $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. $\frac{dV}{dt} = 0$ 当且仅当 $I = 0, H = 0$. 所以,

$\{(S, I, H, R) \in G \mid \frac{dV}{dt} = 0\}$ 的最大不变集是 $\{E_0\}$. 由 LaSalle 不变集原理^[9] 可知, E_0 全局渐近稳定.

3 地方病平衡点存在性和后向分支

3.1 地方病平衡点的存在性

令模型(1)右边的 4 个方程等于 0, 得

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{N} + B\right)N - \beta S^* I^* - \mu S^* = 0 \\ \beta S^* I^* - rI^* \left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - \gamma_1 I^* - \epsilon_1 I^* - \mu I^* = 0 \\ rI^* \left(1 - \frac{H^*}{K}\right) - \gamma_2 H^* - \epsilon_2 H^* - \mu H^* = 0 \\ \gamma_1 I^* + \gamma_2 H^* - \mu R^* = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在方程组(2)中, 通过计算可得

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{A + B \left(I^* + H^* + \frac{\gamma_2}{\mu} H^* + \frac{\gamma_1}{\mu} I^* \right)}{\beta I^* + \mu - B} \\ H^* &= \frac{r I^*}{\frac{r}{K} I^* + \gamma_2 + \mu + \epsilon_2} \\ R^* &= \frac{\gamma_1}{\mu} I^* + \frac{\gamma_2}{\mu} H^* \end{aligned}$$

由方程组(2)中的第二个方程, 可得

$$\beta S^* - r + r \frac{H^*}{K} - \gamma_1 - \mu - \epsilon_1 = 0$$

将上述 S^*, H^* 的表达式代入, 得

$$\beta \frac{A + B \left(I^* + H^* + \frac{\gamma_2}{\mu} H^* + \frac{\gamma_1}{\mu} I^* \right)}{\beta I^* + \mu - B} + r \frac{H^*}{K} - r - \gamma_1 - \mu - \epsilon_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \beta \left[A \left(\frac{r}{K} I^* + \gamma_2 + \mu + \epsilon_2 \right) + B \left(I^* + \frac{\gamma_1}{\mu} I^* \right) \left(\frac{r}{K} I^* + \gamma_2 + \mu + \epsilon_2 \right) + B \left(1 + \frac{\gamma_2}{\mu} \right) r I^* \right] + \frac{r^2}{K} I^* (\beta I^* + \mu - B) - \\ (r + \gamma_1 + \epsilon_1 + \mu) (\beta I^* + \mu - B) \left(\frac{r}{K} I^* + \gamma_2 + \mu + \epsilon_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

合并计算, 得到一个关于 I^* 的一元二次方程

$$p(I^*)^2 + qI^* + M = 0 \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} p &= \beta B \left(1 + \frac{\gamma_1}{\mu}\right) \frac{r}{K} - (\gamma_1 + \mu + \epsilon_1) \frac{\beta r}{K} \\ q &= -(r + \gamma_1 + \epsilon_1 + \mu) \left[\beta(\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) + (\mu - B) \frac{r}{K} \right] + A \frac{\beta r}{K} + \\ &\quad \beta B \left(1 + \frac{\gamma_1}{\mu}\right) (\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) + \beta B \left(1 + \frac{\gamma_2}{\mu}\right) r + (\mu - B) \frac{r^2}{K} \\ M &= (\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) [\beta A - (r + \gamma_1 + \mu + \epsilon_1)(\mu - B)] \end{aligned}$$

因为 $B < \mu$, 所以

$$p = \beta B \left(1 + \frac{\gamma_1}{\mu}\right) \frac{r}{K} - (\gamma_1 + \mu + \epsilon_1) \frac{\beta r}{K} < \frac{\beta r}{K} (B - \mu - \epsilon_1) < 0$$

R_0 与 M 有如下等价关系

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow M > 0, R_0 = 1 \Leftrightarrow M = 0, R_0 < 1 \Leftrightarrow M < 0$$

若 $R_0 > 1$, 则有 $M > 0$, 又由于 $p < 0$, 此时方程(3)必存在一个正根. 当 $R_0 = 1$ 时, $M = 0$ 成立, 由于 $p < 0$, 若 $q > 0$, 此时方程(3)必存在一个正根; 若 $q < 0$, 方程(3)不存在正根. 当 $R_0 < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta &= q^2 - 4p(\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) [\beta A - (r + \gamma_1 + \mu + \epsilon_1)(\mu - B)] = \\ &\quad q^2 - 4p(\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) \beta A \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \end{aligned}$$

定义

$$R_0^c = \frac{4p\beta A(\gamma_2 + \mu + \epsilon_2)}{4p\beta A(\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) - q^2}$$

则有等价关系

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow R_0 = R_0^c, \Delta > 0 \Leftrightarrow R_0 > R_0^c, \Delta < 0 \Leftrightarrow R_0 < R_0^c$$

当满足 $R_0 < 1$ 且 $q > 0$ 时, 有

- 1) $R_0 = R_0^c \Leftrightarrow$ 方程(3)有一个正根;
- 2) $R_0 > R_0^c \Leftrightarrow$ 方程(3)有两个正根;
- 3) $R_0 < R_0^c \Leftrightarrow$ 方程(3)没有正根.

此外当 $R_0 < 1$ 且 $q < 0$, 方程(3)不存在正根.

综上所述, 有如下定理:

定理 4 对于模型(1), 有

- 1) 若 $R_0 > 1$, 存在唯一的地方病平衡点;
- 2) 若 $R_0 \leq 1$ 且 $q < 0$, 不存在地方病平衡点;
- 3) 若 $R_0 = 1$ 且 $q > 0$, 存在唯一的地方病平衡点;
- 4) 若 $R_0^c < R_0 < 1$ 且 $q > 0$, 存在两个地方病平衡点;
- 5) 若 $R_0 = R_0^c < 1$ 且 $q > 0$, 存在唯一的地方病平衡点;
- 6) 若 $R_0 < R_0^c < 1$ 且 $q > 0$, 不存在地方病平衡点.

3.2 后向分支

本节将利用如下引理来计算分析后向分支存在的参数条件.

引理 1^[10] 考虑如下具有一般参数 φ 的常微分系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi), f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{0}$ 是系统(4)的一个平衡点, 满足 $f(\mathbf{0}, \varphi) = \mathbf{0}$. 假设:

(A1) $\mathcal{A} = D_x f(\mathbf{0}, 0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, 0) \right)$ 是系统(4)在 $x = \mathbf{0}, \varphi = 0$ 时的线性化矩阵. 0 是 $\mathcal{A}$ 的单特征值,

且 $\mathcal{A}$ 的其他特征值具有负实部;

(A2) $\mathcal{A}$ 的 0 特征根有非负的右特征向量 $\mathbf{w}$ 和左特征向量 $\mathbf{v}$.

设 f_k 是 f 的第 k 个分量, 定义:

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{w}_i \mathbf{w}_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}, 0)$$

$$b = \sum_{k,i=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{w}_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \varphi}(\mathbf{0}, 0)$$

则系统(4) 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处的局部动力学性质完全由 a, b 决定:

1) 若 $a > 0, b > 0$. 当 $\varphi < 0, |\varphi| \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 局部渐近稳定, 且存在一个正的不稳定的平衡点; 当 $0 < \varphi \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是不稳定的, 且存在一个负的局部渐近稳定的平衡点;

2) 若 $a < 0, b < 0$. 当 $\varphi < 0, |\varphi| \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是不稳定的; 当 $0 < \varphi \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 局部渐近稳定, 且存在一个正的不稳定的平衡点;

3) 若 $a > 0, b < 0$. 当 $\varphi < 0, |\varphi| \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是不稳定的, 且存在一个局部渐近稳定的负平衡点; 当 $0 < \varphi \ll 1$ 时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是稳定的, 且存在一个正的不稳定的平衡点;

4) 若 $a < 0, b > 0$. 当 φ 从负变为正时, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的稳定性从稳定变为不稳定, 相应的一个负的不稳定的平衡点变为正的局部渐近稳定的平衡点.

由上述引理可以知道: 当 $a > 0, b > 0$ 时, 系统会在 $\varphi = 0$ 处出现后向分支. 若 $a < 0, b > 0$, 系统在 $\varphi = 0$ 有前向分支. 下面将运用引理 1 来找出模型(1) 中前向分支、后向分支的存在条件, 定义

$$R^* = \frac{K(r + \gamma_1 + \mu + \varepsilon_1)[B(\mu + \gamma_1)(\gamma_2 + \mu + \varepsilon_2) + Br\mu + Br\gamma_2] + A\mu r^2}{K\mu(r + \gamma_1 + \varepsilon_1 + \mu)^2(\gamma_2 + \varepsilon_2 + \mu)}$$

定理 5 若 $R^* > 1$, 模型(1) 在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支; 若 $R^* < 1$, 则模型(1) 在 $R_0 = 1$ 处有前向分支.

证 选择 β 作为分支参数, 当 $R_0 = 1$ 时, 有

$$\beta^* = \frac{(\mu - B)(r + \gamma_1 + \mu + \varepsilon_1)}{A}$$

下面验证模型(1) 在无病平衡点 $\mathbf{E}_0 = \left(\frac{A}{\mu - B}, 0, 0, 0\right)$ 处满足引理 1 中的 A1, A2 条件. 根据引理 1, 记

$\mathbf{x} = (S, I, H, R)$, 有

$$f(\mathbf{x}, \beta) = \begin{pmatrix} A + BN - \beta SI - \mu S \\ \beta SI - rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \gamma_1 I - \varepsilon_1 I - \mu I \\ rI\left(1 - \frac{H}{K}\right) - \gamma_2 H - \varepsilon_2 H - \mu H \\ \gamma_1 I + \gamma_2 H - \mu R \end{pmatrix}$$

f 在 $(\mathbf{E}_0, \beta^*)$ 处的线性化矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} B - \mu & B - \frac{\beta^* A}{\mu - B} & B & B \\ 0 & \frac{\beta^* A}{\mu - B} - r - \gamma_1 - \varepsilon_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & r & -\gamma_2 - \varepsilon_2 - \mu & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 的特征方程:

$$(\lambda + \mu)[\lambda - (B - \mu)]\left(\lambda - \frac{\beta^* A}{\mu - B} + r + \gamma_1 + \varepsilon_1 + \mu\right)(\lambda + \gamma_2 + \varepsilon_2 + \mu) = 0$$

显然 0 是 $\mathbf{A}$ 的特征单根, 且其他特征根都具有负实部. 引理 1 中的 A1 成立.

计算 $\mathbf{A}$ 的 0 特征根的右特征向量 $\mathbf{w}$, 有

$$\begin{pmatrix} B - \mu & B - \frac{\beta^* A}{\mu - B} & B & B \\ 0 & \frac{\beta^* A}{\mu - B} - r - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & r & -\gamma_2 - \epsilon_2 - \mu & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

结果为

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{r(\mu - B)} \left[\left(B - \frac{\beta^* A}{\mu - B} + \frac{B\gamma_1}{\mu} \right) (\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) + Br + \frac{Br}{\mu} \gamma_2 \right], \frac{\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu}{r}, 1, \frac{1}{r\mu} [\gamma_1(\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu) + r\gamma_2] \right)^T$$

同理计算左特征向量 $\mathbf{v}$:

$$(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \begin{pmatrix} B - \mu & B - \frac{\beta^* A}{\mu - B} & B & B \\ 0 & \frac{\beta^* A}{\mu - B} - r - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & r & -\gamma_2 - \epsilon_2 - \mu & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

可得

$$\mathbf{v} = (0, 1, 0, 0)$$

引理中的 A2 满足.

下面计算参数 a, b . 根据 a, b 的表达式和 $\mathbf{v}$ 可知, 只需计算 f_2 在 $(\mathbf{E}_0, \beta^*)$ 处的各项偏导数. 结果为

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \beta^*, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{r}{K}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \beta} = \frac{A}{\mu - B}$$

其余偏导数都为零. 由此可得:

$$\begin{aligned} a &= 2w_2v_2 \left(w_1\beta^* + w_3\frac{r}{K} \right) = \\ &= 2 \frac{\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu}{r} \left\{ \frac{\beta^*}{r(\mu - B)} \left[\left(B - \frac{\beta^* A}{\mu - B} + \frac{B\gamma_1}{\mu} \right) (\gamma_2 + \mu + \epsilon_2) + Br + \frac{Br}{\mu} \gamma_2 \right] + \frac{r}{K} \right\} \\ b &= v_2w_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \beta} = \frac{\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu}{r} \cdot \frac{A}{\mu - B} \end{aligned}$$

显然, $b > 0$ 是成立的. 接下来讨论 a 的情况, 将 β^* 的表达式代入 a , 可得

$$a = 2 \frac{\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu}{r} \left\{ \frac{r + \gamma_1 + \epsilon_1 + \mu}{Ar} \left[\left(B - r - \gamma_1 - \epsilon_1 - \mu + \frac{B\gamma_1}{\mu} \right) (\gamma_2 + \epsilon_2 + \mu) + Br + \frac{Br\gamma_2}{\mu} \right] + \frac{r}{K} \right\}$$

根据 R^* 的定义, 则有

$$a > 0 \Leftrightarrow R^* > 1, \quad a < 0 \Leftrightarrow R^* < 1$$

由引理 1 可知, 当 $R^* > 1$ 时, 模型(1) 在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支. 若 $R^* < 1$ 时, 模型(1) 在 $R_0 = 1$ 处出现前向分支.

4 数值模拟

下面对理论结果进行简单的数值模拟.

令 $A = 10, B = 0.001, \beta = 0.003, \mu = 0.1, r = 0.5, K = 200, \gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.2, \epsilon_2 = 0.1$. 此时, $R_0 = 0.303\ 03 < 1$, 其感染者(I) 的数量随时间变化见图 1(a), 可以看到无病平衡点局部渐近稳定.

令 $A = 20, B = 0.001, \beta = 0.03, \mu = 0.1, r = 0.5, K = 200, \gamma_1 = 0.2, \epsilon_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.8, \epsilon_2 = 0.1$. 这时, $R_0 = 6.060\ 6 > 1$. 在这种情况下, 无病平衡点不稳定, 存在一个地方病平衡点, 疾病不能被消灭(图 1(b)).

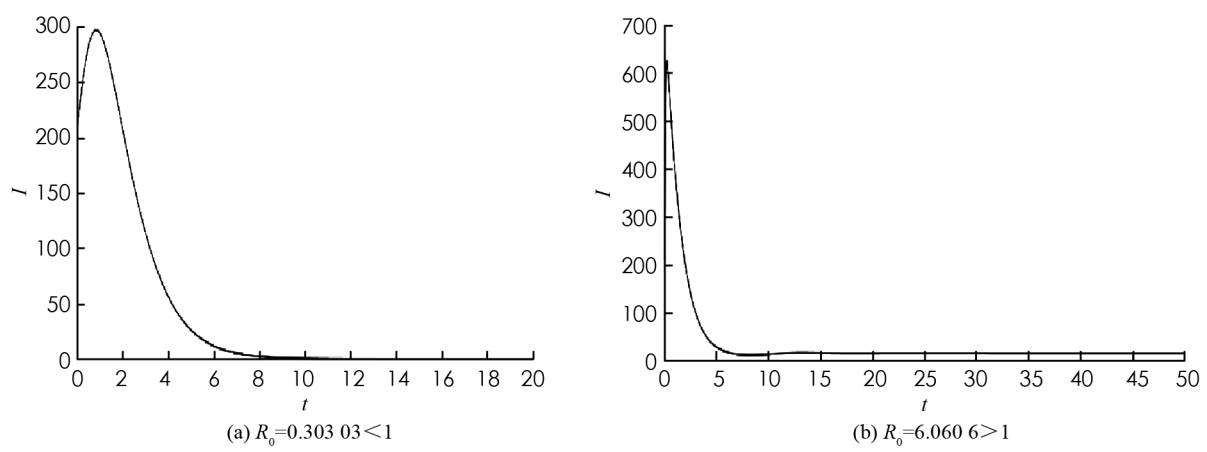


图 1 I 的时间序列图

由 R^* 的表达式可知, K 越大, R^* 越小, 模型(1) 出现后向分支的可能性越低. 选取参数值: $A=20$, $\mu=0.008$, $r=0.5$, $B=0.001$, $\gamma_1=0.1$, $\gamma_2=0.3$, $\epsilon_1=0.1$, $\epsilon_2=0.05$. K 分别取 5, 10, 20, 50, 对应的 R^* 分别为: 5.667 520 352, 2.881 267 908, 1.488 141 687, 0.652 265 954 5, 数值模拟得到图 2. 可以看到随着 K 的增大, R^* 在减小, 模型(1) 出现后向分支的区域越小. 当 K 增大到一定程度时, $R^* < 1$, 后向分支消失, 出现前向分支, 这与定理 5 的结论一致.

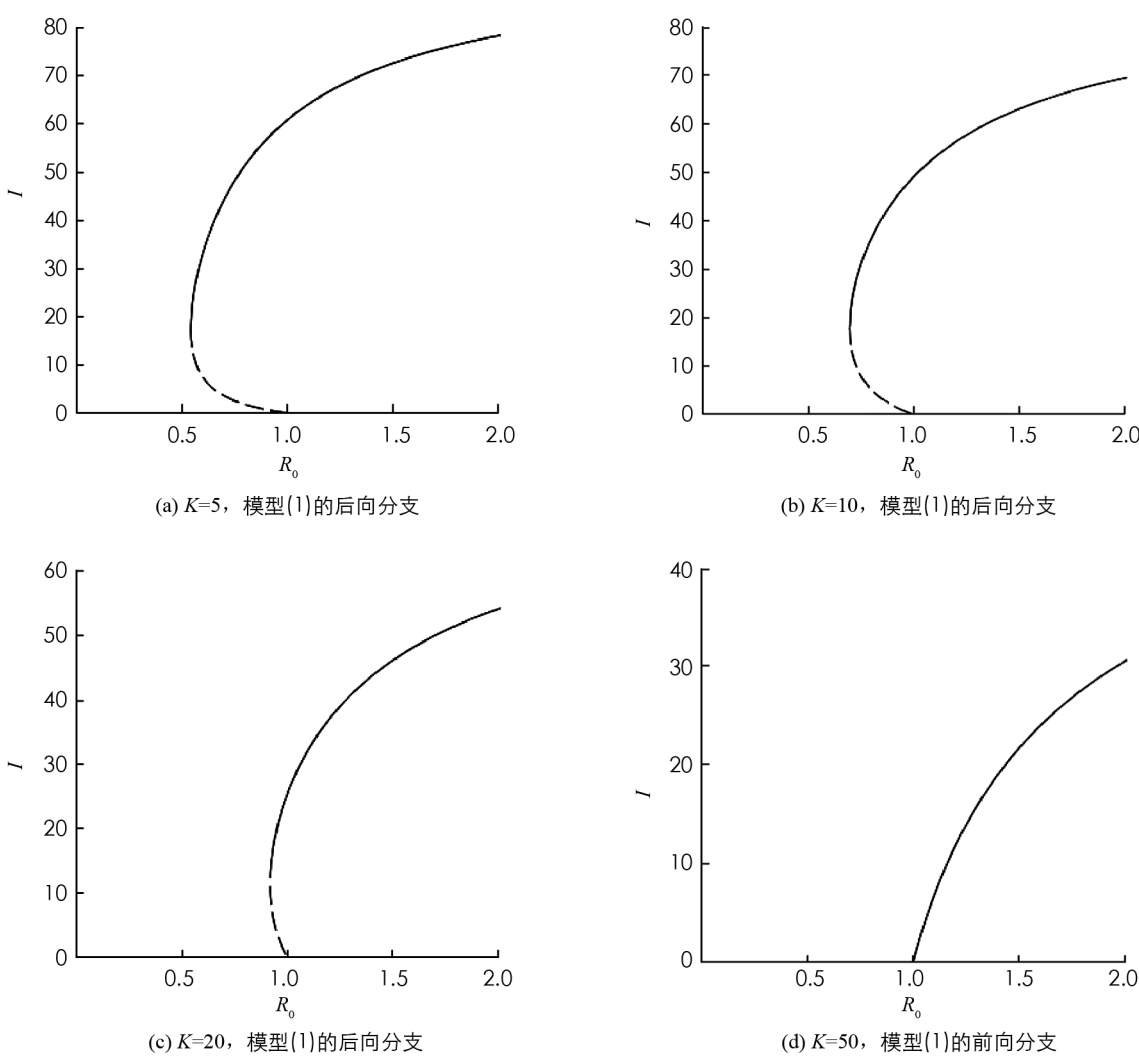


图 2 模型(1) 的分支

5 结语

本文将人群分为易感者(S)、感染者(I)、住院者(H)、康复者(R). 考虑到非线性出生率和医院收治能力有限, 本文建立了一类 SIHR 模型. 我们对模型的动力学性质进行了分析和讨论, 得到了: $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点局部渐近稳定. 同时定理 4 指出地方病平衡点的存在情况. 基于此, 运用文献[10]中的定理, 得到了后向分支的存在条件, 即: 当 $R^* > 1$, 模型会在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支. 分析定理 5 中的 R^* , 可知 K 与 R^* 成反比, 增大 K 会使得后向分支出现的可能性降低. 那么, 增大医院容纳量, 提高医疗条件, 尽可能收治病人, 有助于控制病情的传播. 另外, 本文未对地方病平衡点的稳定性进行探讨, 之后可以进一步讨论.

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MACKENDRICK A G. Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A-Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 115(772): 700-721.
- [2] ZHANG Y, FAN K G, GAO S J, et al. A Remark on Stationary Distribution of a Stochastic SIR Epidemic Model with Double Saturated Rates [J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 76: 46-52.
- [3] ZHANG X, LIU X N. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 348(1): 433-443.
- [4] XU Y L, LI L W. Globalexponential Stability of an Epidemic Model with Saturated and Periodic Incidence Rate [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, 39(13): 3650-3658.
- [5] ZHANG Y Y, JIA J W. Hopf Bifurcation of an Epidemic Model with a Nonlinear Birth in Population and Vertical Transmission [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 230: 164-173.
- [6] HEFFERNAN J M, SMITH R J, WAHL L M. Perspectives on the Basic Reproductive Ratio [J]. Journal of the Royal Society, Interface, 2005, 2(4): 281-293.
- [7] WEI F Y, CHEN F X. Stochastic Permanence of an SIQS Epidemic Model with Saturated Incidence and Independent Random Perturbations [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2016, 453: 99-107.
- [8] ZHAO D L, ZHANG T S, YUAN S L. The Threshold of a Stochastic SIVS Epidemic Model with Nonlinear Saturated Incidence [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2016, 443: 372-379.
- [9] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [10] CASTILLO-CHAVEZ C, SONG B J. Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 361-404.
- [11] COOKE K, VAN DEN DRIESSCHE P, ZOU X. Interaction of Maturation Delay and Nonlinear Birth in Population and Epidemic Models [J]. Journal of Mathematical Biology, 1999, 39(4): 332-352.
- [12] QIU Z P. Dynamical Behavior of a Vector-Host Epidemic Model with Demographic Structure [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2008, 56(12): 3118-3129.
- [13] 刘亭, 张国洪. 一个考虑信息负反馈和饱和治疗的传染病模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(1): 7-13.
- [14] D'ONOFRIO A, MANFREDI P. Information-Related Changes in Contact Patterns may Trigger Oscillations in the Endemic Prevalence of Infectious Diseases [J]. Journal of Theoretical Biology, 2009, 256(3): 473-478.
- [15] BUONOMO B, D'ONOFRIO A, LACITIGNOLA D. Globally Stable Endemicity for Infectious Diseases with Information-Related Changes in Contact Patterns [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(7): 1056-1060.
- [16] KUMAR A, SRIVASTAVA P K, TAKEUCHI Y. Modeling the Role of Information and Limited Optimal Treatment on Disease Prevalence [J]. Journal of Theoretical Biology, 2017, 414: 103-119.