

麻疹疫苗接种博弈的动力学模型及分析^①

葛静文, 王稳地

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 建立麻疹疫苗接种博弈模型, 在模型中引入分布时滞来反映自愿接种个体的决策具有信息依赖性. 分析了系统平衡点的存在性及稳定性态, 证明了 Hopf 分支的存在性, 研究结果表明: 当个体采纳的信息区间长度超过临界阈值时, 其决策可能会出现反复变化的情况, 并造成疾病的再次爆发.

关键词: 麻疹; 疫苗接种; 博弈论; 信息依赖; 分布时滞

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)07-0044-05

Dynamic Model and Analysis of Measles Vaccination Game

GE Jingwen, WANG Wendi

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A game model of measles vaccination has been established, in which the distributed time delay has been introduced to reflect the information dependence of the decision of the individual willing to be vaccinated. The existence and stability of equilibrium points of the system have been analyzed, and the existence of Hopf bifurcation been proved. The result shows that, when the length of the information interval adopted by an individual exceeds the critical threshold, its decision may change repeatedly, and the disease may break out again.

Key words: measles; vaccination; game theory; information dependence; distributed time delay

麻疹是一种传染性极强的呼吸道疾病, 多发生在儿童阶段. 疫苗是预防疾病最有效的措施, 可以有效降低易感个体感染的可能性以及死亡的可能性^[1]. 此外, 为消除麻疹, 各地区麻疹疫苗接种率需不低于 95%, 但我国仍未实现消除麻疹的目标^[2-4]. 分析原因可能是: 在实施强制接种疫苗的政策下, 部分地区因经济发展落后或常规免疫服务薄弱而导致疫苗覆盖率不足. 这表明, 部分个体可自愿选择是否接种, 而其接种行为影响着疾病的传播和控制.

文献[5]利用博弈理论, 将模仿动力学与麻疹传播动态结合建立疫苗博弈动态模型, 其中, 通过划分年龄组来研究个体接种的延迟策略. 就麻疹而言, 发病率变化和疫苗覆盖率变化之间出现延迟反映的就是延迟接种现象. 文献[6]在博弈动态模型中引入离散时滞来反映这一现象, 但作者建立的模型表明个体接种变化仅与过去某个时刻的疾病状态相关, 具有局限性. 实际上, 个体决策不仅与当前的疫苗风险和疾病状态

① 收稿日期: 2021-11-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071381).

作者简介: 葛静文, 硕士研究生, 主要从事生物数学研究.

通信作者: 王稳地, 教授, 博士研究生导师.

有关,还与过去一段时间内的疫苗风险和疾病信息相关,具有信息依赖性.另外,这些文章中假设整个种群中的个体都可进行自愿接种,与实际的麻疹疫苗接种政策不符.

本文假设个体采纳近期一段时间内的疫苗信息和疾病状态来进行决策,将信息依赖性应用到疫苗决策过程中,引入分布时滞,结合麻疹传播动态,在传染病模型中考虑强制接种和自愿接种,基于博弈论去分析个体接种行为变化,分析影响自愿接种个体行为的因素,为控制麻疹传播提出更好的建议.

1 模型的建立

首先分析麻疹传播动态.用 S, I, R, V 分别表示易感者、感染者、恢复者、有效接种者所占的比例.考虑强制接种和自愿接种相结合.种群中强制接种麻疹疫苗的个体比例为 ρ ,其余的个体可自愿接种,其接种比例为 x . σ 和 ϕ 分别表示疫苗效力和疫苗失效率, β 为疾病传播速率, γ 为恢复速率, μ 为出生率和死亡率.然后根据博弈理论分析个体的疫苗决策行为.这里假设个体根据过去一段时间内的策略收益差来进行决策.设接种疫苗所需的成本为 c_v (包括疫苗费用、路费等),未接种个体被感染后所需的成本为 c_i (包括治疗的费用、造成的损失等).另外,种群中的疾病发生率为 βI .由此,接种策略和不接种策略的期望收益可以分别表示为:

$$f_v = -c_v - (1 - \sigma)\beta I \cdot c_i - \sigma\phi\beta I \cdot c_i, f_n = -\beta I \cdot c_i \quad (1)$$

函数 $g(t) = f_v - f_n$ 是决策个体在当前状态下所获得的信息.另外,结合具有伽玛分布的指数记忆衰退函数 $\Gamma(t | 1, \alpha) = \alpha e^{-\alpha t}$,建立我们的信息函数:

$$M(t) = \int_{t-\tau}^t g(\eta) \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\eta)} d\eta$$

设 v 是个体模仿别人策略的速率,根据文献[7-8]中分析疫苗接种行为变化的过程来建立博弈动态模型.另外,考虑麻疹传播过程,变量 R 不影响其他变量的变化,所以接下来不再分析恢复者比例变化情况.那么,可以得到以下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu \cdot \rho\sigma - \mu(1 - \rho)\sigma x - \beta SI - \mu S + \phi V \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dV}{dt} = \mu \cdot \rho\sigma + \mu(1 - \rho)\sigma x - \mu V - \phi V \\ \frac{dx}{dt} = vx(1 - x)M(t) \\ M(t) = \int_{t-\tau}^t (-c_v + (1 - \phi)\beta\sigma I(\eta) \cdot c_i) \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\eta)} d\eta \end{cases} \quad (2)$$

2 平衡点的存在性及稳定性态

根据系统(2)的建立过程,感染个体的平均传染周期为 $\frac{1}{\gamma + \mu}$,疾病传播速率为 β ,所以,基本再生数 R_0 的表达式为:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} \quad (3)$$

因为时滞不影响平衡点的存在性,所以,令方程组中各个方程右端为 0,发现有 5 种可能情况.另外,由 $S + I + V + R = 1$ 及 x 的生物意义,需满足 $0 \leq S, I, V, x \leq 1$. 容易发现系统(2)一直存在两个无病平衡点:

$$E_1 = \left(\frac{\phi + \mu - \sigma\rho\mu}{\phi + \mu}, 0, \frac{\sigma\rho\mu}{\phi + \mu}, 0 \right), E_2 = \left(\frac{\phi + \mu - \sigma\mu}{\phi + \mu}, 0, \frac{\sigma\mu}{\phi + \mu}, 1 \right)$$

接着,记无病状态下种群中的易感者比例为 S_{DEF} ,一个感染者进入这个种群后,在其平均感染周期内可感染的易感者的数量为有效再生数.根据(3)式的生物意义得到有效再生数的表达式:

$$R_v = \frac{\beta}{\gamma + \mu} \cdot S_{DEF} \quad (4)$$

根据表达式(4), 可以写出无病平衡点 E_1, E_2 状态下的有效再生数, 分别记为:

$$R_v^0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} \cdot \frac{\phi + \mu - \sigma\rho\mu}{\phi + \mu}, R_v^1 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} \cdot \frac{\phi + \mu - \sigma\mu}{\phi + \mu} \quad (5)$$

下面考虑其余 3 种情形并利用(5) 式来分析平衡点的存在条件. 首先考虑 $x = 0, I \neq 0$ 的情形, 计算得到

$$S_3 = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, I_3 = \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)} - \frac{\sigma\rho\mu^2}{(\gamma + \mu)(\phi + \mu)}, V_3 = \frac{\sigma\rho\mu}{\phi + \mu}$$

显然,

$$S_3 > 0, V_3 > 0, I_3 = \frac{\mu}{\gamma + \mu}(1 - S_3 - V_3) < 1$$

如果 $S_3 > 1$ 或 $V_3 > 1$, 那么, $I_3 < 0$. 因此, $I_3 > 0$, 就有

$$S_3 < 1, V_3 < 1$$

成立. 另外, $I_3 > 0$ 等价于 $R_v^0 > 1$.

总结以上过程可知: 当 $R_v^0 > 1$ 时, 存在边界平衡点

$$E_3 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)} - \frac{\sigma\rho\mu^2}{(\gamma + \mu)(\phi + \mu)}, \frac{\sigma\rho\mu}{\phi + \mu}, 0 \right)$$

同理可证: 当 $R_v^1 > 1$ 时, 存在边界平衡点

$$E_4 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu(\beta - \gamma - \mu)}{\beta(\gamma + \mu)} - \frac{\sigma\mu^2}{(\gamma + \mu)(\phi + \mu)}, \frac{\sigma\mu}{\phi + \mu}, 1 \right)$$

最后, 用同样的方法分析 $x \neq 0, I \neq 0$ 的情况, 记

$$R_c = 1 + \frac{c_v}{(1 - \phi)\sigma\mu c_i}$$

可以证得: 当 $R_v^1 < R_c < R_v^0$ 时, 存在内部平衡点

$$E_5 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{c_v}{(1 - \phi)\beta\sigma c_i}, V_5, \frac{(\phi + \mu)V_5}{(1 - \rho)\sigma\mu} - \frac{\rho}{1 - \rho} \right), V_5 = 1 - \frac{\gamma + \mu}{\beta} \cdot R_c$$

接下来分析系统(2) 各平衡点的稳定性. 记系统(2) 的平衡点为 $E_n = (S_n, I_n, V_n, x_n)$. 在平衡点附近作线性化变换, 分析得到其特征方程为:

$$\begin{vmatrix} -\beta I_n - \mu - \lambda & -\beta S_n & \phi & -\mu(1 - \rho)\sigma \\ \beta I_n & \beta S_n - \gamma - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi - \mu - \lambda & \mu(1 - \rho)\sigma \\ 0 & F_1(n) & 0 & F_2(n) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

其中:

$$F_1(n) = \frac{\nu x_n(1 - x_n)(1 - \phi)\beta\sigma c_i \alpha}{\lambda + \alpha} \cdot (1 - e^{-(\lambda + \alpha)\tau})$$

$$F_2(n) = \nu(1 - 2x_n) \int_{t-\tau}^t [-c_v + (1 - \phi)\beta\sigma I_n] \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\eta)} d\eta, n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

经分析, 有以下定理成立:

定理 1 系统(2) 的边界平衡点的稳定性如下:

(i) 当 $R_v^0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_1 局部渐近稳定.

(ii) 无病平衡点 E_2 一直不稳定.

(iii) 边界平衡点 E_3 局部渐近稳定的条件是:

$$1 < R_v^0 < R_c \quad (7)$$

(iv) 当 $R_v^1 > R_c$ 时, 边界平衡点 E_4 局部渐近稳定.

证 以平衡点 E_3 为例, 分析边界平衡点的稳定性. 这里不再分析平衡点 E_1, E_2, E_4 的局部稳定性. 将平衡点 E_3 的值代入特征方程(6), 可以得到特征根有如下关系:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= F_2(3), \lambda_2 = -\phi - \mu < 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= -\beta I_3 - \mu < 0, \lambda_3 \lambda_4 = \beta(\gamma + \mu) I_3 > 0.\end{aligned}$$

可以知道, $\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$. 若 $\lambda_1 < 0$, 即

$$R_v^0 < R_c$$

另外, $R_v^0 > 1$ 时, 平衡点 E_3 存在. 所以, 当(7)式成立时, 边界平衡点 E_3 局部渐近稳定. 证毕.

下面分析时滞 τ 对内部平衡点 E_5 稳定性的影响并证明 Hopf 分支的存在. 当 $\tau > 0$ 时, 将其代入方程(6), 可整理为

$$\lambda^5 + f_1 \lambda^4 + f_2 \lambda^3 + f_3 \lambda^2 + f_4 \lambda + f_5 + (f_6 \lambda + f_7) e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned}f_1 &= \alpha + \beta I_5 + 2\mu + \phi \\ f_2 &= \alpha(\beta I_5 + 2\mu + \phi) + \beta I_5(\gamma + \mu) + (\beta I_5 + \mu)(\phi + \mu) \\ f_3 &= (\gamma + \mu)(\phi + \mu + \alpha)\beta I_5 + (\beta I_5 + \mu)(\phi + \mu)\alpha \\ f_4 &= (\beta I_5 + \mu)(\phi + \mu)\alpha + \beta^2 I_5 \sigma^2 (1 - \phi) \mu c_i \alpha (1 - \rho) v x_5 (1 - x_5) \\ f_5 &= \beta^2 I_5 \sigma^2 (1 - \phi) \mu^2 c_i \alpha (1 - \rho) v x_5 (1 - x_5) \\ f_6 &= -e^{-\sigma \tau} \beta^2 I_5 \sigma^2 (1 - \phi) \mu c_i \alpha (1 - \rho) v x_5 (1 - x_5) \\ f_7 &= \mu f_6\end{aligned}$$

在方程(8)中令 $\lambda = i\omega$, 并分离实部和虚部, 得到下面两个超越方程:

$$\begin{aligned}f_1 \omega^4 - f_3 \omega^2 + f_5 &= -(f_6 \omega \sin \omega \tau + f_7 \cos \omega \tau) \\ \omega^5 - f_2 \omega^3 + f_4 \omega &= -(f_6 \omega \cos \omega \tau - f_7 \sin \omega \tau)\end{aligned} \quad (9)$$

将超越方程两边分别平方, 并将两个超越方程相加, 令 $z = \omega^2$, 可以得到:

$$h(z) = z^5 + g_1 z^4 + g_2 z^3 + g_3 z^2 + g_4 z + g_5 = 0 \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned}g_1 &= f_1^2 - 2f_2, g_2 = f_2^2 + 2f_4 - 2f_1 f_3 \\ g_3 &= f_3^2 - 2f_2 f_4 + 2f_1 f_5, g_4 = f_4^2 - 2f_3 f_5 - f_6^2, g_5 = f_5^2 - f_7^2 > 0\end{aligned}$$

如果方程(10)满足 Routh-Hurwitz 判据^[9], 即

$$\begin{cases} H_1 = g_1 > 0 \\ H_2 = g_1 g_2 - g_3 > 0 \\ H_3 = g_1 g_5 - g_1^2 g_4 + g_3 H_2 > 0 \\ H_4 = g_2 g_3 g_5 + g_1 g_4 g_5 - g_1 g_2^2 g_5 - g_5^2 + g_4 H_3 > 0 \\ H_5 = g_5 H_4 > 0 \end{cases} \quad (11)$$

则方程(10)不存在正实根, 即不存在满足超越方程(9)的正 ω . 总结以上过程, 可以得到以下定理:

定理 2 当 $\tau > 0$ 时, 如果(11)式成立, 那么系统(2)的内部平衡点 E_5 是局部渐近稳定的.

下面分析 Hopf 分支的存在性, 需说明特征方程(8)存在纯虚根并满足横截条件. 参考文献[10]可知(10)式正根存在的条件. 假设方程(10)有正根 z , 那么 $\omega = \sqrt{z}$. 由(9)式可以得到:

$$\tau^{(j)} = \frac{1}{\omega} \left[\arctan \left\{ \frac{f_6 \omega (f_1 \omega^4 - f_3 \omega^2 + f_5) - f_7 (\omega^5 - f_2 \omega^3 + f_4 \omega)}{f_7 (f_1 \omega^4 - f_3 \omega^2 + f_5) + f_6 \omega (\omega^5 - f_2 \omega^3 + f_4 \omega)} \right\} + (j-1)\pi \right], j=1, 2, \dots$$

那么, 当 $\tau = \tau^{(j)}$ 时, $\pm i\omega$ 是特征方程(8)的一对纯虚根.

设

$$\tau_0 = \min\{\tau^{(j)}\}, z^* = \omega_0^2$$

由 Butler 引理^[11]可知, 当 $\tau < \tau_0$ 时, 特征方程(8)的所有根都有负实部, 平衡点 E_5 局部渐近稳定.

接下来判断当 τ 经过 τ_0 时, 是否满足横截条件 $\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau_0))}{d\tau} \neq 0$. 方程(8)两边关于 τ 求导,

$$\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau_0))}{d\tau} = \operatorname{Re}\left\{\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right\}\bigg|_{\lambda=i\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{X^2 + Y^2} h'(z^*)$$

其中:

$$X = 5\omega_0^4 - 3f_2\omega_0^2 + f_4 + f_6\cos\omega_0\tau_0 - \tau_0(f_7\cos\omega_0\tau_0 + f_6\omega_0\sin\omega_0\tau_0)$$

$$Y = -4f_1\omega_0^3 + 2f_3\omega_0 - f_6\sin\omega_0\tau_0 - \tau_0(f_6\omega_0\cos\omega_0\tau_0 - f_7\sin\omega_0\tau_0)$$

那么, 若 $h'(z^*) \neq 0$, 则横截条件成立, 系统(2) 在 $\tau = \tau_0$ 处发生 Hopf 分支. 总结以上过程, 有以下定理成立:

定理 3 如果方程(10) 有正根且 $h'(z^*) \neq 0$, 那么在 $\tau = \tau_0$ 处系统(2) 发生 Hopf 分支. 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 平衡点 E_5 局部渐近稳定; 当 $\tau > \tau_0$ 且在 τ_0 附近时, 系统(2) 不稳定, 存在从平衡点 E_5 分支出来的周期解.

取参数 $\sigma = 0.8, \mu = 0.1, \beta = 0.5, \gamma = 0.1, \rho = 0.6, \phi = 0.01, c_v = 10, c_i = 2\,000, \nu = 0.01, \alpha = 0.4$, 这时, 存在内部平衡点 $E_5 = (0.4, 0.012\,6, 0.574\,7, 0.475\,7)$. 另外可以得到 $\tau = 1.18$ 时, 方程(10) 有正根, 即特征方程(8) 有纯虚根且有 $z^* = 0.024\,5, h'(z^*) = 1.43 \times 10^{-5} \neq 0$, 由定理 3 可知, 系统在 $\tau = \tau_0 = 1.18$ 处发生 Hopf 分支.

3 总结

本文建立麻疹疫苗接种博弈的动力学模型来分析个体的疫苗接种行为. 其中, 我们考虑影响个体决策的是过去一段时间内的疾病信息和疫苗信息. 分析得到了有效再生数 R_v 的表达式, 分析了系统的平衡点并证明了其局部稳定性, 还得到了 Hopf 分支的存在性. 观察模型(2) 和策略收益的表达式(1), 基于博弈论分析自愿接种比例 x 随信息参数和时间的变化时, 疫苗效力 σ 的增大、疫苗失效率 ϕ 的减小和疫苗接种风险成本 c_v 的降低都会增大接种策略的收益, 这也就有利于提高自愿接种意愿, 即提高自愿接种个体的疫苗水平 x , 进而更好地控制麻疹的传播. 另外, 根据内部平衡点 E_5 稳定的条件(11), 模仿率 ν 越大, 平衡点越趋于不稳定状态, 即个体决策在接种和不接种之间来回切换. 依据 Hopf 分支周期解的存在性分析, 当个体采纳的信息区间长度 $\tau > \tau_0$ 时, 系统存在不稳定的情况, 个体决策会出现反复, 疾病可能会再次爆发.

参考文献:

- [1] 余连兵. 一类具有接种的麻疹模型的动力学分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(7): 12-16.
- [2] 赵丽旋, 李鹏媛, 郭中敏, 等. 麻疹流行现况和免疫策略进展 [J]. 热带医学杂志, 2020, 20(12): 1646-1650.
- [3] 方海旭, 赵继军. 近 20 年中国麻疹的流行与防控 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2018, 15(1): 86-93.
- [4] 黄晓玉, 牙晓艳, 危国强. 中国消除麻疹进展研究 [J]. 疾病监测与控制, 2015, 9(5): 309-315.
- [5] BHATTACHARYYA S, BAUCH C T. A Game Dynamic Model for Delayer Strategies in Vaccinating Behaviour for Pediatric Infectious Diseases [J]. Journal of Theoretical Biology, 2010, 267(3): 276-282.
- [6] BAUCH C T, BHATTACHARYYA S. Evolutionary Game Theory and Social Learning can Determine how Vaccine Scars Unfold [J]. PLoS Computational Biology, 2012, 8(4): e1002452.
- [7] BAUCH C T. Imitation Dynamics Predict Vaccinating Behaviour [J]. Proceedings Biological Sciences, 2005, 272(1573): 1669-1675.
- [8] BAUCH C T, EARN D J D. Vaccination and the Theory of Games [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2004, 101(36): 13391-13394.
- [9] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] ZHANG T L, JIANG H J, TENG Z D. On the Distribution of the Roots of a Fifth Degree Exponential Polynomial with Application to a Delayed Neural Network Model [J]. Neurocomputing, 2009, 72(4-6): 1098-1104.
- [11] FREEDMAN H I, RAO V S H. The Trade-off between Mutual Interference and Time Lags in Predator-Prey Systems [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1983, 45(6): 991-1004.