

# 非线性 ODE-PDE 耦合系统边界控制的局部镇定<sup>①</sup>

何翠华, 王科, 甯懿楠

成都工业学院 大数据与人工智能学院, 成都 611730

**摘要:** 主要考虑利用边界控制解决线性常微分方程(ODE)与非线性偏微分方程(PDE)耦合系统的局部镇定问题. 通过含有核函数和向量值函数的 Backstepping 变换设计出控制律, 同时给出了闭环系统局部指数镇定的证明. 对线性常微分方程与非线性偏微分方程耦合系统进行仿真, 结果表明该反馈控制律是可行的.

**关键词:** 耦合系统; 非线性; 边界控制

**中图分类号:** O231.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2022)07-0077-09

## Local Stabilization of Boundary Control for Nonlinear ODE-PDE Coupled System

HE Cuihua, WANG Ke, NING Yinan

School of Big Data and Artificial Intelligence, Chengdu Technological University, Chengdu 611730, China

**Abstract:** In this paper, local stabilization has been considered of a boundary control system consisting of a linear ordinary differential equations(ODE) and a nonlinear partial differential equations(PDE). Backstepping transformation with a kernel function and a vector-valued function have been referenced to design control law. Local exponential stabilization method for closed-loop systems has been illustrated. A system coupled by linear ODE and nonlinear PDE has been simulated, the result show that the feedback control law is feasible.

**Key words:** coupled system; nonlinear; boundary control

耦合的 ODE-PDE 系统广泛存在于工程问题中. 近年来, 大量文献采用 Backstepping 变换方法来解决常微分方程和偏微分方程之间的耦合问题. 为满足工程需要, 我们利用边界条件设计控制律来控制这些耦合的 ODE-PDE 系统使其稳定在平衡状态. 边界控制律是由 PDE Backstepping 控制发展而来<sup>[1-4]</sup>.

ODE-PDE 耦合系统边界控制大多是线性的<sup>[5-15]</sup>, 然而非线性现象在应用数学和物理中广泛存在. 耦合的线性常微分方程和非线性偏微分方程系统具有丰富的工程应用价值, 但由于非线性在数学上是极具挑战性的问题, 故关于非线性偏微分方程系统镇定的结果较少<sup>[15-22]</sup>. 利用边界控制来稳定非线性 ODE-PDE 耦合系统是一个很有意义的研究领域.

① 收稿日期: 2021-12-31

基金项目: 四川省科技厅重点研发项目(2021YFS0045).

作者简介: 何翠华, 硕士研究生, 从事偏微分方程系统控制的研究.

通信作者: 王科, 副教授.

本文对非线性 ODE-PDE 耦合系统的控制设计类似于文献[7], 主要贡献是基于边界反馈控制的方法处理一类包含反应项是不确定的非线性偏微分方程与线性微分方程的耦合系统的局部指数稳定的问题.

因此, 本文考虑以下非线性耦合系统的边界控制

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(0, t) \quad (1)$$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), x \in (0, 1) \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha(u(0, t) - \mathbf{C}^T \mathbf{X}(t)) \quad (3)$$

$$u(1, t) = U(t) \quad (4)$$

其中: 向量  $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n$  是装置的一个信号;  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  是可控制矩阵对 ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ ); 标量  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  是装置的热量; 在  $x=0$  处, 满足 Neumann 边界条件,  $\alpha$  是傅里叶常数, 它取决于装置的材料和导热性,  $\mathbf{C}^T \mathbf{X}(t)$  是温度装置 ( $\mathbf{C}^T \in \mathbb{R}^n$ );  $U(t)$  是边界控制输入.  $f(u(x, t))$  是非线性函数, 对于这个系统, 非线性  $f(u)$  引用文献[15] 假定条件.

**假定 1** 对于系统(2) 中的  $f(u)$ , 存在  $\delta > 0$  和  $\beta > 1$ , 使得

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \|f(u)\| &\leq \delta \|u\|^\beta \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\|\cdot\|$  将在后面详细说明.

假定 1 中的第一项表示 0 是系统(1)–(4) 在零输入下的平衡态, 第二项意味着  $f(u)$  的增长速度并不比  $u$  的幂函数快.

系统(1)–(4) 代表了一类广泛的耦合非线性 ODE-PDE 方程, 本文主要贡献是基于 Backstepping 变换的边界控制方法使一类包含不确定反应项的非线性偏微分方程与线性微分方程的耦合系统达到局部指数稳定. 对于 ODE-PDE 耦合系统 Backstepping 边界控制律设计方法是可行的<sup>[1,6-7]</sup>. 通过引入具有理想稳定性的目标系统, PDE Backstepping 变换将系统转化为由核函数和向量值函数耦合的方程. 然后根据目标系统的边界条件得到控制律. 研究 PDE Backstepping 变换解决耦合 ODE-PDE 的控制系统是很有价值的.

本文令

$$\|u(\cdot, t)\|_2 = \left( \int_0^1 u(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\|\mathbf{X}(t)\| = (\|\mathbf{X}_1(t)\|^2 + \|\mathbf{X}_2(t)\|^2 + \cdots + \|\mathbf{X}_n(t)\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

## 1 控制律

### 1.1 Backstepping 变换

引入以下 Backstepping 变换

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) \quad (8)$$

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t)dy - \phi(x)\mathbf{X}(t) \quad (9)$$

其中  $k(x, y)$  与  $\phi(x)$  是待定的.

将目标系统取为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}w(0, t) \quad (10)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + H(w(x, t)), x \in (0, 1) \quad (11)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad (12)$$

$$w(1, t) = 0 \quad (13)$$

其中:

$$H(w(x, t)) = f(u(x, t)) - \int_0^x k(x, y)f(u(y, t))dy$$

选择向量  $\mathbf{K}^T \in \mathbb{R}^n$  使得  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  是 Herwitz 矩阵.

现在用变换  $(\mathbf{X}(t), u(x, t)) \longrightarrow (\mathbf{X}(t), w(x, t))$ , 将(1)–(4) 的解转换为(10)–(13) 的解, 导出

函数  $k(x, y)$  和  $\phi(x)$ , 得到控制律.

利用(3),(9) 式对  $w(x, t)$  关于  $x$  和  $t$  求导

$$\begin{aligned}
 w_{xx}(x, t) &= u_{xx}(x, t) - (k'(x, x) + k_x(x, x))u(x, t) - k(x, x)u_x(x, t) - \\
 &\quad \phi''(x)\mathbf{X}(t) - \int_0^x k_{xx}(x, y)u(y, t)dy \\
 w_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)) - k(x, x)u_x(x, t) + k(x, 0)u_x(0, t) + \\
 &\quad k_y(x, x)u(x, t) - k_y(x, 0)u(0, t) - \int_0^x k_{yy}(x, y)u(y, t)dy - \\
 &\quad \int_0^x k(x, y)f(u(x, y))dy - \phi(x)\mathbf{A}\mathbf{X}(t) - \phi(x)\mathbf{B}u(0, t) \\
 w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) &= 2k'(x, x)u(x, t) + (ak(x, 0) - k_y(x, 0) - \phi(x)\mathbf{B})u(0, t) + \\
 &\quad (\phi''(x) - ak(x, 0)\mathbf{C}^T - \phi(x)\mathbf{A})\mathbf{X}(t) + \\
 &\quad \int_0^x (k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y))u(y, t)dy + \\
 &\quad f(u(y, t)) - \int_0^x k(x, y)f(u(y, t))dy = \\
 &\quad H(w(x, t))
 \end{aligned} \tag{14}$$

再令

$$\begin{aligned}
 k'(x, x) &= 0 \\
 k_y(x, 0) - ak(x, 0) + \phi(x)\mathbf{B} &= 0 \\
 \phi''(x) - ak(x, 0)\mathbf{C}^T - \phi(x)\mathbf{A} &= 0 \\
 k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

接着控制律被设计为

$$U(t) = \int_0^1 k(1, y)u(y, t)dy + \phi(1)\mathbf{X}(t) \tag{16}$$

通过边界条件(13) 获得.

## 1.2 核方程的解

为了方便, 引用文献[14] 直接给出(15) 式的解. 令

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^T) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\alpha\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵.

$$\Gamma(0) = (\mathbf{K}, -\alpha\mathbf{C}^T, \mathbf{K}\mathbf{A} + \alpha^2\mathbf{C}^T)$$

核函数  $k(x, y)$  和  $\phi(x)$  分别为

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \Gamma(0)e^{Dx}\mathbf{J} \\
 k(x, y) &= e^{-\alpha(x-y)} \left( \alpha + \Gamma(0) \int_0^{x-y} e^{Dz}\mathbf{J}\mathbf{B}e^{az}dz \right)
 \end{aligned}$$

## 1.3 逆变换

同样我们给出逆变换

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) \tag{17}$$

$$u(x, t) = w(x, t) + \int_0^x n(x, y)w(y, t)dy + \Psi(x)\mathbf{X}(t) \tag{18}$$

令

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵.

$$\Theta(0) = (\mathbf{K}, \alpha(\mathbf{K} - \mathbf{C}^T))$$

核函数  $\Psi(x)$  和  $n(x, y)$  分别为

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Theta(0) e^{\Omega x} \mathbf{F} \\ n(x, y) &= \alpha + \Theta(0) \int_0^{x-y} e^{\Omega z} \mathbf{F} \mathbf{B} dz\end{aligned}$$

## 2 稳定性

为得到稳定性定理, 首先给出几个引理.

**引理 1** 函数  $w(x, t)$  由(6) 式定义,  $(\mathbf{P}\mathbf{B})^T$  和  $\mathbf{X}(t)$  由(7) 式定义, 有以下不等式成立

$$w(0, t)(\mathbf{P}\mathbf{B})^T \mathbf{X}(t) \leq 4 \|w_x(t)\|_2^2 \|\mathbf{P}\mathbf{B}\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{X}(t)\|^2 \quad (19)$$

**证** 现在利用 Schwartz's 不等式和 Young's 不等式来估计, 可得

$$\begin{aligned}w(0, t)(\mathbf{P}\mathbf{B})^T \mathbf{X}(t) &\leq |w(0, t)| |(\mathbf{P}\mathbf{B})^T \mathbf{X}(t)| \leq \\ &|w(0, t)| \|\mathbf{P}\mathbf{B}\| \|\mathbf{X}(t)\| \leq \\ &w(0, t)^2 \|\mathbf{P}\mathbf{B}\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{X}(t)\|^2\end{aligned}$$

接着根据  $w(1, t) = 0$  与 Agmon's 不等式, 有

$$\begin{aligned}w(0, t)^2 &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |w(x, t)|^2 \leq \\ &w(1, t)^2 + 2 \|w(t)\|_2 \|w_x(t)\|_2 = \\ &2 \|w(t)\|_2 \|w_x(t)\|_2\end{aligned}$$

然后利用 Poincare 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|w(x, t)\|_2 &= \left( \int_0^1 w(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\left( 2w(1, t)^2 + 4 \int_0^1 w_x(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \|w_x(t)\|_2\end{aligned}$$

因此, 不等式(19) 成立.

**引理 2** 根据变换(9) 与逆变换(18), 可得

$$\begin{aligned}\|w(x, t)\|_2 &\leq (1+s) \|u(t)\|_2 + \|\phi\|_2 \|\mathbf{X}(t)\| \\ \|u(x, t)\|_2 &\leq (1+t) \|w(t)\|_2 + \|\Psi\|_2 \|\mathbf{X}(t)\|\end{aligned} \quad (20)$$

其中:

$$s = \left( \int_0^1 \int_0^1 k(x, y)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\phi\|_2^2 = \int_0^1 \|\phi(x)\|^2 dx \quad (21)$$

$$t = \left( \int_0^1 \int_0^1 n(x, y)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\Psi\|_2^2 = \int_0^1 \|\Psi(x)\|^2 dx \quad (22)$$

**证** 由变换(9), 可以获得

$$\|w(x, t)\|_2 \leq \|u(x, t)\|_2 + \left\| \int_0^x k(x, y) u(y, t) dy \right\|_2 + \|\phi(x) \mathbf{X}(t)\|_2$$

由 Holder's 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^x k(x, y) u(y, t) dy \right\|_2^2 &= \int_0^1 \left( \int_0^x k(x, y) u(y, t) dy \right)^2 dx \leq \\ &\int_0^1 \left( \int_0^x k(x, y)^2 dy \int_0^x u(y, t)^2 dy \right) dx \leq \\ &\int_0^1 \int_0^1 k(x, y)^2 dy dx \cdot \int_0^1 \int_0^1 u(y, t)^2 dy dx = \\ &s^2 \|u(t)\|_2^2\end{aligned}$$

其中:

$$s = \left( \int_0^1 \int_0^1 k(x, y)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

接着根据 Schwartz's 不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\mathbf{X}(t)\|_2^2 &= \int_0^1 \|\phi(x)\mathbf{X}(t)\|^2 dx \leq \int_0^1 \|\phi(x)\|^2 \|\mathbf{X}(t)\|^2 dx = \\ &\|\mathbf{X}(t)\|^2 \int_0^1 \|\phi(x)\|^2 dx = \\ &\|\phi\|_2^2 \|\mathbf{X}(t)\|^2 \end{aligned}$$

其中:

$$\|\phi\|_2^2 = \left( \int_0^1 \|\phi(x)\|^2 dx \right)$$

因此

$$\|\mathbf{w}(x, t)\|_2 \leq (1+s) \|\mathbf{u}(t)\|_2 + \|\phi\|_2 \|\mathbf{X}(t)\|$$

同理可估计

$$\|\mathbf{u}(x, t)\|_2 \leq (1+t) \|\mathbf{w}(t)\|_2 + \|\Psi\|_2 \|\mathbf{X}(t)\|$$

其中  $t$  和  $\|\Psi\|^2$  由(22) 式定义, 则(20) 式成立.

**引理 3**  $H(\mathbf{w}(x, t))$  由(11) 式定义, 可得

$$a \int_0^1 H(\mathbf{w}(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx \leq \xi \left( \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{X}(t)\|^2 \right)^\beta + 2 \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2 \quad (24)$$

其中:

$$m = \max \left( \frac{2(1+t)^2}{a}, \frac{\|\Psi\|_2^2}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \right) \quad \xi = a^2 s^2 \delta^2 2^\beta m^\beta + a^2 \delta^2 2^\beta m^\beta \quad (25)$$

证

我们令

$$a \int_0^1 H(\mathbf{w}(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx = I_1 + I_2$$

其中:

$$I_1 = a \int_0^1 f(u(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx$$

$$I_2 = -a \int_0^1 \mathbf{w}(x, t) dx \int_0^x k(x, y) f(u(y, t)) dy$$

利用 Holder 不等式 与 Young's 不等式, 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= a \int_0^1 f(u(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx \leq \\ &a \left( \int_0^1 \|f(u(x, t))\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^1 \|\mathbf{w}(x, t)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &a^2 \|f(u(x, t))\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{w}(x, t)\|_2^2 \end{aligned}$$

通过利用(5) 式与(20) 式来估计  $\|f(u(x, t))\|_2^2$

$$\begin{aligned} \|f(u(x, t))\|_2^2 &\leq \delta^2 \|\mathbf{u}(x, t)\|_2^{2\beta} \leq \\ &\delta^2 ((1+t) \|\mathbf{w}(t)\|_2 + \|\Psi\|_2 \|\mathbf{X}(t)\|)^{2\beta} = \\ &\delta^2 ((1+t)^2 \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 \|\mathbf{X}(t)\|^2 + 2(1+t) \|\Psi\|_2 \|\mathbf{w}(t)\|_2 \|\mathbf{X}(t)\|)^{\beta} \leq \\ &\delta^2 2^\beta ((1+t)^2 \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 \|\mathbf{X}(t)\|^2)^{\beta} \leq \\ &\delta^2 2^\beta m^\beta \left( \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{X}(t)\|^2 \right)^\beta \end{aligned}$$

其中:

$$m = \max\left(\frac{2}{a}(1+t)^2, \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \|\Psi\|_2\right)$$

由此可得

$$I_1 \leq a^2 \delta^2 2^\beta m^\beta \left( \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{X}(t)\|_2^2 \right)^\beta + \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2$$

同理可估计

$$I_2 \leq a^2 s^2 \delta^2 2^\beta m^\beta \left( \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{X}(t)\|_2^2 \right)^\beta + \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2$$

其中  $s$  来自(23) 式.

然后

$$a \int_0^1 H(\mathbf{w}(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx \leq \xi \left( \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{X}(t)\|_2^2 \right)^\beta + 2 \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2$$

其中  $\xi$  是如(25) 式所示的常数.

接下来证明目标系统(10) – (13) 是局部稳定的.

**定理 1** 存在一个正常数  $\gamma$  且任意的初始条件满足  $\|\mathbf{X}(0), \mathbf{w}(0)\|_2 \leq \gamma$ , 有下列不等式成立

$$\|\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)\|_2 \leq \mu \|\mathbf{X}(0), \mathbf{w}(0)\|_2 e^{-\frac{1}{8}t} \quad (26)$$

其中

$$\mu = \sqrt{\frac{\max\left\{\lambda_{\max}(\mathbf{P}), \frac{a}{2}\right\}}{\min\left\{\lambda_{\min}(\mathbf{P}), \frac{a}{2}\right\}}} \quad (27)$$

则目标系统(10) – (13) 在  $\|\cdot\|_2$  意义下是局部指数稳定的.

证

考虑以下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \mathbf{X}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{X}(t) + \frac{a}{2} \|\mathbf{w}(t)\|_2^2 \quad (28)$$

其中矩阵  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  满足

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} = -\mathbf{I} \quad (29)$$

且参数  $a > 0$  是待定的.

矩阵  $\mathbf{P}$  是(29) 式的解, 因此

$$\min\left\{\lambda_{\min}(\mathbf{P}), \frac{a}{2}\right\} \|\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)\|_2^2 \leq V(t) \leq \max\left\{\lambda_{\max}(\mathbf{P}), \frac{a}{2}\right\} \|\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)\|_2^2 \quad (30)$$

其中  $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$  与  $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$  是矩阵  $\mathbf{P}$  的最小和最大的特征值.

对(28) 式关于  $t$  求导, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\mathbf{X}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{X}}(t) + a \int_0^1 \mathbf{w}_t(x, t) \mathbf{w}(x, t) dx = \\ &= \mathbf{X}(t)^T ((\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})) \mathbf{X}(t) + \mathbf{w}(0, t)^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{X}(t) + \\ &+ \mathbf{X}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{w}(0, t) + a \int_0^1 (\mathbf{w}_{xx}(x, t) + H(\mathbf{w}(x, t))) \mathbf{w}(x, t) dx = \\ &= -\mathbf{X}(t)^T \mathbf{X}(t) + 2\mathbf{w}(0, t)(\mathbf{P}\mathbf{B})^T \mathbf{X}(t) + a \mathbf{w}_x(x, t) \mathbf{w}(x, t) \Big|_0^1 - \\ &- a \int_0^1 \mathbf{w}_x(x, t)^2 dx + a \int_0^1 H(\mathbf{w}(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx = \\ &= -\|\mathbf{X}(t)\|_2^2 + 2\mathbf{w}(0, t)(\mathbf{P}\mathbf{B})^T \mathbf{X}(t) - a \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2 + \\ &+ a \int_0^1 H(\mathbf{w}(x, t)) \mathbf{w}(x, t) dx \end{aligned}$$

代入(19), (20) 和(24) 式可以得到

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2} \|\mathbf{X}(t)\|^2 + (8 \|\mathbf{PB}\|^2 - a + 2) \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2 + \xi V^\beta(t)$$

令  $a = 8 \|\mathbf{PB}\|^2 + 3$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2} \|\mathbf{X}(t)\|^2 - \|\mathbf{w}_x(x, t)\|_2^2 + \xi V^\beta(t) \leq \\ &-\frac{1}{2} (\|\mathbf{X}(t)\|^2 + \|\mathbf{w}(x, t)\|_2^2) + \xi V^\beta(t) \leq \\ &-\frac{1}{2} V(t) + \xi V^\beta(t) \end{aligned}$$

其中  $\xi$  由 (25) 式定义.

根据文献[17] 定理, 如果  $V(0) \leq \sigma \gamma^2$ , 其中  $\sigma = \max\left\{\lambda_{\max}(\mathbf{P}), \frac{a}{2}\right\}$  则

$$V(t) \leq V(0) e^{-\frac{1}{4}t} \quad (31)$$

选取  $\|\mathbf{X}(0), \mathbf{w}(0)\|_2 \leq \gamma$ , 则  $V(0) \leq \sigma \gamma^2$ , 因此不等式 (31) 成立. 利用 (30) 和 (31) 式, 可以推出

$$\|\mathbf{X}(t), \mathbf{w}(t)\|_2^2 \leq \mu^2 \|\mathbf{X}(0), \mathbf{w}(0)\|_2^2 e^{-\frac{1}{4}t}$$

其中  $\mu$  由 (27) 式定义, 因此不等式 (26) 成立. 证毕.

### 3 仿真设计

系统 (1) – (4) 的模拟仿真

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(0, t) \\ u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), \quad x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) &= 5(u(0, t) - \mathbf{C}^T \mathbf{X}(t)) \\ u(1, t) &= U(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

其中:

$$f(u(x, t)) = 12u^2(x, t)$$

同时

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 2 & 1.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们令

$$\mathbf{K} = (-0.7, -9.2)$$

可以验证矩阵  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$  是 Hurwitz 矩阵. 因此, 系统满足 (5) 式, 容易得到

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \gamma(0) e^{\mathbf{D}_x \mathbf{J}} \\ k(1, y) &= e^{-5(x-y)} (5 + \gamma(0) \int_0^{x-y} e^{\mathbf{D}_z \mathbf{J} \mathbf{B} e^{5z}} dz) \end{aligned}$$

其中:

$$\Gamma(0) = (-0.7, -9.2, 0, -5, -18.75, 13.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则控制律为

$$U(t) = \int_0^1 k(1, y)u(y, t)dy + \phi(1)X(t) \quad (32)$$

仿真结果见图 1—4. 图 1 开环系统是不稳定的. 图 2 和图 3 显示在控制(32)输入下, 闭环系统的信号在时间趋近于无穷时趋近于零. 图 4 显示控制(32)是有界的.

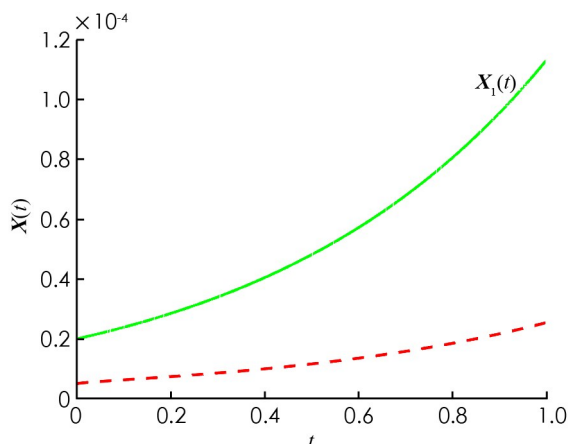


图 1 开环系统下的  $X(t)$

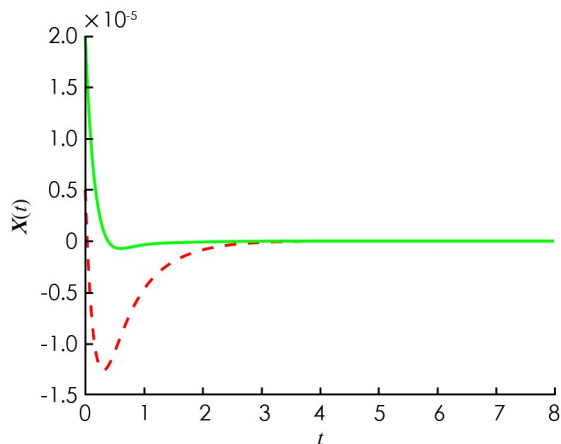


图 2 闭环系统下的  $X(t)$

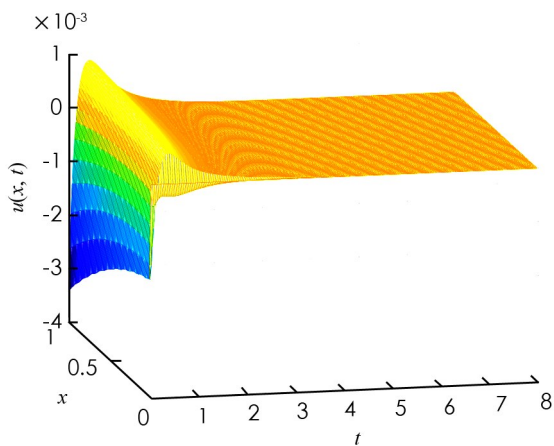


图 3 闭环系统下的  $u(x, t)$

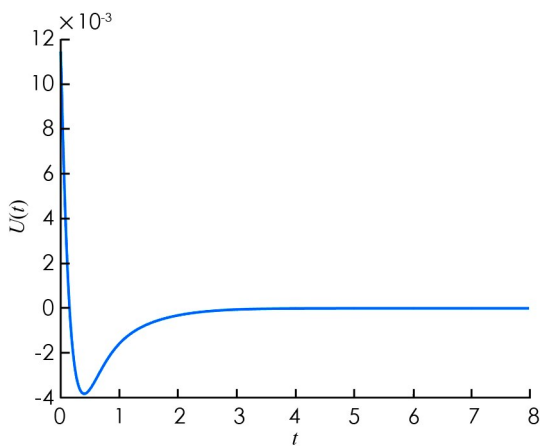


图 4  $U(t)$  的输入

## 参考文献:

- [1] LASIECKA I. Mathematical Control Theory of Coupled PDEs [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [2] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [3] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Adaptive Control of Parabolic PDEs [M]. Princeton: Princeton University Press, 2010.
- [4] ANTONIO S G, KRSTIC M. Control of PDE-ODE Cascades with Neumann Interconnections [J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 284-314.
- [5] HE C H, XIE C K, ZHEN Z Y. Explicit Control Law of a Coupled Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(5): 2087-2101.
- [6] TANG S X, XIE C K. Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2142-2155.
- [7] ZHEN Z Y, XIE C K, SI Y C, et al. Stabilization of the Second Order Parabolic System by Boundary Control [J]. Control Theory Applications, 2018, 35: 859-867.



[8] TANG S X, XIE C K. State and Output Feedback Boundary Control for a Coupled PDE-ODE System [J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(8): 540-545.

[9] ZHOU Z C, GUO C L. Stabilization of Linear Heat Equation with a Heat Source at Intermediate Point by Boundary Control [J]. Automatica, 2013, 49(2): 448-456.

[10] LIU X L, XIE C K. Control Law in Analytic Expression of a System Coupled by Reaction-Diffusion Equation [J]. Systems & Control Letters, 2020, 137: 104643.

[11] LEI Y, LIU X L, XIE C K. Stabilization of an ODE-PDE Cascaded System by Boundary Control [J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9248-9267.

[12] 祝晶, 刘星岚, 谢成康. 圆柱体温度稳定的一种新方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(5): 45-50.

[13] BACCOLI A, PISANO A, ORLOV Y. Boundary Control of Coupled Reaction-Diffusion Processes with Constant Parameters [J]. Automatica, 2015, 54: 80-90.

[14] ZHAO A L, XIE C K. Stabilization of Coupled Linear Plant and Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(2): 857-877.

[15] SI Y C, XIE C K, ZHEN Z Y, et al. Local Stabilization of Coupled Nonlinear Parabolic Equations by Boundary Control [J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(13): 5592-5612.

[16] CAVALCANTI M M, FERNNDEZ-CARA E, FERREIRA A L. Null Controllability of some Nonlinear Degenerate 1D Parabolic Equations [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(14): 6405-6421.

[17] YU X, XU C, CHU J. Local Exponential Stabilization of Fisher's Equation Using the Backstepping Technique [J]. Systems & Control Letters, 2014, 74: 1-7.

[18] WU H N, WANG J W, LI H X. Fuzzy Boundary Control Design for a Class of Nonlinear Parabolic Distributed Parameter Systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(3): 642-652.

[19] HASAN A, AAMO O M, FOSS B. Boundary Control for a Class of Pseudo-Parabolic Differential Equations [J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(1): 63-69.

[20] HASAN A, AAMO O M, KRSTIC M. Boundary Observer Design for Hyperbolic PDE-ODE Cascade Systems [J]. Automatica, 2016, 68: 75-86.

[21] HASAN A, TANG S X. Local Exponential Stabilization of a Coupled Burgers' PDE-ODE System [C]//IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2017: 2479-2484.

[22] NIKDEL P, SHEIKHOLESLAM F, ZEKRI M, et al. Backstepping Boundary Control Design for a Cascaded Viscous Hamilton-Jacobi PDE-ODE System [J]. IET Control Theory & Applications, 2021, 15(14): 1832-1848.

责任编辑 张枸