DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.08.003

交换折叠超立方体的 2-外连通度①

蔡学鹏， 刘梦瑶， 杜濛雨

新疆农业大学 数理学院，乌鲁木齐 830052

摘要：利用 2-外连通度作为评价可靠性的重要度量，对交换折叠超立方体网络 $EFH(s, t)$ 的可靠性进行分析，得到了交换折叠超立方体网络的 2-外连通度. 证明了 $EFH(s, t)$ 的 2-外连通度等于 $3s+1(5\leqslant s\leqslant t)$. 这个结果意味着，为了使 $EFH(s, t)$ 不连通且每个分支都至少包含 3 个顶点，至少有 $3s+1$ 个点要同时发生故障.

关 键 词：交换折叠超立方体；g-外连通度；互连网络

中图分类号：O157.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1000－5471(2022)08－0016－08

On 2-Extra Connectivity of Exchanged Folded Hypercubes

CAI Xuepeng， LIU Mengyao， DU Mengyu

School of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China

Abstract: The 2-extra connectivity, which is an important measure in evaluating the reliability, is utilized to analyze the reliability of exchanged folded hypercube interconnection network. Then 2-extra connectivity of exchanged folded hypercube interconnection network $EFH(s, t)$ is obtained. We show that the 2-extra connectivity of $EFH(s, t)$ is equal to $3s+1$ for $5\leqslant s\leqslant t$, which implies that at least $3s+1$ vertices are removed to get a disconnected graph without isolated vertices(resp. edges).

Key words: exchanged folded hypercube; g-extra connectivity; interconnection network

在本文中，术语图和网络可以互换使用. 所有的图都认为是无向的简单连通图，对于未说明的图论符号和术语，可参见文献[1-3].

设 $G=(V(G), E(G))$ 是一个图. 对于图 G 中的任意顶点 $u\in V(G)$，设集合 $\{v\in V(G)\setminus\{u\}: (u, v)\in E(G)\}$ 和集合 $\{(u, v)\in E(G): v\in V(G)\setminus\{u\}\}$ 分别表示顶点 u 的邻点集和邻边集，记作 $N_G(u)$ 和 $NE_G(u)$. $d_G(u)=|N_G(u)|$ 称为图 G 中顶点 u 的度. 对于图 G 的子图 K，设

① 收稿日期：2021－11－14
基金项目：新疆自然科学基金项目(2021D01A98)；新疆青年科学基金项目(2019D01B17)；新疆农业大学大学生创新项目(S202110758043).
作者简介：蔡学鹏，讲师，硕士，主要从事图论及其应用的研究.

$$N_G(K)=\bigcup_{u\in K}N_G(u)-V(K)\qquad NE_G(K)=\bigcup_{u\in K}NE_G(u)-E(K)$$

分别表示子图 K 在 G 中的邻点集和邻边集.

图 G 的经典连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 是衡量网络可靠性和容错性的两个重要参数[4-5]. 连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 越大，网络的可靠性就越高. 但是，这两个参数有明显的不足之处，比如，在互连网络的实际应用当中，与一个处理器相连接的所有处理器(链路)同时发生故障的可能性较低，所以用这两个参数衡量网络可靠性和容错性是不精确的. 为克服这些不足之处，可以通过对 G-S 的每一个分支强加一些限制条件来推广图 G 的经典连通度(边连通度)，这里 $S\subset V(G)(S\subset E(G))$. 文献[6] 首次考虑了这个问题并且提出了图 G 的条件连通度(边连通度) 的概念.

设 $\wp$ 是图 G 所具有的一种性质. 文献[6] 定义了图 G 的条件连通度(边连通度)：如果 G 中存在某种点子集(边子集)，使得 G 删除这种点子集(边子集) 后得到的图不连通，且每个连通分支都具有性质 $\wp$，则所有这种点子集(边子集) 中基数最小的点子集(边子集) 的基数称为图 G 的条件连通度(边连通度)，记为 $\kappa(G:\wp)(\lambda(G:\wp))$. 随后，文献[6-7] 研究了下面所述的一种条件连通度(边连通度)：

设 $S\subset V(G)(S\subset E(G))$ 且 g 是非负整数，如果 G-S 是不连通的，且 G-S 的每个连通分支中至少有 $g+1$ 个顶点，则称 S 是 G 的一个 R_g- 割(R_g- 边割). 若 G 存在 R_g- 割(R_g- 边割)，则 G 的所有 R_g- 割(R_g- 边割) 中基数最小的 R_g- 割(R_g- 边割) 的基数称为 G 的 g- 外连通度(g- 外边连通度)，记为 $\kappa_g(G)(\lambda_g(G))$. 明显地，如果 G 不是完全图，则 $\kappa_0(G)=\kappa(G)$ 且 $\lambda_0(G)=\lambda(G)$. 因此，g- 外连通度(g- 外边连通度) 可以认为是经典连通度(边连通度) 的一种推广形式，并且能更加精确地衡量大型并行处理系统的可靠性和容错性. 网络(图) 的 g- 外连通度(g- 外边连通度) 已被许多学者研究，详细结果可参见文献[6-16] 及相关文献.

在平行计算系统中，n 维超立方体 Q_n[17]、n 维折叠超立方体 FQ_n[16] 和交叉超立方体 $EH(s,t)$[18] 是 3 个重要的互连网络. 基于这 3 个网络，文献[19] 提出了一个新的网络交换折叠超立方体 $EFH(s,t)$，$EFH(s,t)$ 是在 $EH(s,t)$ 的基础上增加了一些边获得的，并且这些边称为补边. 交换折叠超立方体有许多重要的特性，比如它有短的直径和低消费因子.

文献[20-21] 探究了交换折叠超立方体 $EFH(s,t)$ 的连通度和边连通度，并且证明了

$$\kappa(EFH(s,t))=\lambda(EFH(s,t))=s+2\qquad 1\leqslant s\leqslant t$$

文献[22] 证明了

$$\lambda_2(EFH(s,t))=3s+2\qquad 6\leqslant s\leqslant t$$

本文将探讨交换折叠超立方体 $EFH(s,t)$ 的 2- 外连通度，最终确定了

$$\kappa_2(EFH(s,t))=3s+2\qquad 5\leqslant s\leqslant t$$

1　预备知识

一个 n 元二进制字符串 $x=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$ 的第 i 个字符记为 $x[i]$，$0\leqslant i\leqslant n-1$.

记 $x[i:j]=x_ix_{i-1}\cdots x_j$. $\bar{x}=\bar{x}_{n-1}\bar{x}_{n-2}\cdots\bar{x}_0$，其中 $\bar{x}_i=1-x_i$. 设 $y=y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$. $H(x,y)=\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-y_i|$ 称为 $x=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$ 与 $y=y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_0$ 的哈明距离.

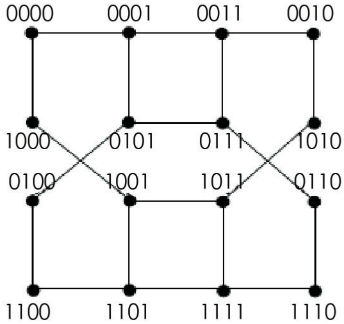
定义 1[19]　设交换超立方体 $EH(s,t)=G(V,E)$，s，t 是正整数. 交换超立方体的点集 $V(EH(s,t))=\{a_{s-1}a_{s-2}\cdots a_1a_0b_{t-1}b_{t-2}\cdots b_1b_0c: a_i,b_j,c\in\{0,1\},0\leqslant i\leqslant s-1,0\leqslant j\leqslant t-1\}$，交换超立方体的边集 $E(EH(s,t))=\{(u,v):(u,v)\in V(EH(s,t))\times V(EH(s,t))\}$ 由 3 种类型的边 E_1，E_2，E_3 构成. 其中

$E_1: u[s+t:1]=v[s+t:1],\ u[0]\neq v[0]$

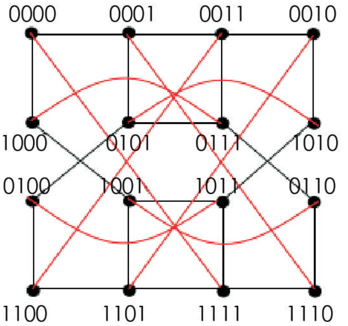
$E_2: u[t:1]=v[t:1],\ H(u[s+t:t+1],\ v[s+t:t+1])=1,\ u[0]=v[0]=0$

$E_3: u[s+t:t+1]=v[s+t:t+1],\ H(u[t:1],\ v[t:1])=1,\ u[0]=v[0]=1$

定义 2[23] 交换折叠超立方体记为 $EFH(s,t)$,它是由交换超立方体 $EH(s,t)$ 中的任意两个互补的点 $u=a_{s-1}a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}b_{t-2}\cdots b_0 c$ 和 $\bar{u}=\bar{a}_{s-1}\bar{a}_{s-2}\cdots\bar{a}_0\bar{b}_{t-1}\bar{b}_{t-2}\cdots\bar{b}_0\bar{c}$ 增加一条边后得到的. 这些新增加的边称为 $EFH(s,t)$ 的补边,补边构成的集合记为 $\overline{M}$. $EFH(s,t)-\overline{M}$ 中的边称为交叉 $EH(1,2)$ 和 $EFH(1,2)$ 的图(图 1).



(a) $EH(1,2)$



(b) $EFH(1,2)$

图 1 $EH(1,2)$ 和 $EFH(1,2)$

设任意一条边 $(u,v)\in E(EFH(s,t)-\overline{M})$,则存在唯一确定的 $i\in\{0,1,2,3,\cdots,s+t\}$,使得 $u[i]\neq v[i]$ 且 $u[j]=v[j]$, $j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,s+t$,此时称边 (u,v) 是 i-边. 如果 $EFH(s,t)-\overline{M}$ 中两个点 u 和 v 通过 i-边相邻,则称 u 和 v 沿维数 i 相邻,我们也称 u 是 v 的 i-邻点,记作 $v=u_i$. 由定义可知 u_{ij} 是 u_i 的 j-邻点,明显地,$u_{ii}=u$.

设 $u\in V(EFH(s,t))$. 通过定义 2,如果 $u[0]=0$,则 $d(u)=s+2$,否则 $d(u)=t+2$.

下面给出 $EH(s,t)$ 和 $EFH(s,t)$ 的一些结论,主要结果的证明将会用到这些结论.

引理 1[4] $\kappa(EH(s,t))=\lambda(EH(s,t))=s+1,\ 1\leqslant s\leqslant t$.

引理 2[10] $\kappa_1(EH(s,t))=\lambda_1(EH(s,t))=2s,\ 1\leqslant s\leqslant t$.

引理 3[10] $EH(s,t)$ 同构于 $EH(t,s)$.

引理 4[23] $EFH(s,t)$ 同构于 $EFH(t,s)$.

通过引理 3 和引理 4,可以在下面讨论中设 $s\leqslant t$,则 $\delta(EH(s,t))=s+1$ 且 $\delta(EFH(s,t))=s+2$.

引理 5[10] $EH(s,t)$ 可分解成两个 $EH(s-1,t)$ 或两个 $EH(s,t-1)$.

根据 $EFH(s,t)$ 的定义容易得出 $EFH(s,t)$ 具有下面性质:

性质 1 交换折叠超立方体网络 $EFH(s,t)$ 可以分解成两个子图 L 和 R,其中

$$V(L)=\{0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c:\ a_i,b_j,c\in\{0,1\},\ 0\leqslant i\leqslant s-2,\ 1\leqslant j\leqslant t-1\}$$

$$V(R)=\{1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c:\ a_i,b_j,c\in\{0,1\},\ 0\leqslant i\leqslant s-2,\ 1\leqslant j\leqslant t-1\}$$

L 和 R 分别是由点集 $V(L)$ 和 $V(R)$ 诱导的子图. 明显地,L 和 R 都同构于 $EH(s-1,t)$,并且 L 和 R 之间的边是由 E_2 中的边和 $\overline{M}$ 构成的,记作 $EFH(s,t)=L\oplus R$. 令 $u\in V(L)$(或 $u\in V(R)$),则 u 在 R(或 L)中通过交叉边的邻点记作 u_L(或 u_R). 明显地 $u_{s+t}=u_L$(或 $u_{s+t}=u_R$).

文献[14]证明了折叠超立方体 $FQ_n(n\geqslant 4)$ 中不含 3 圈,并且任何不相邻的两个点的共同邻点的个数不超过 2. 因此容易得到下面的引理:

引理 6　交换折叠超立方体 $EFH(s,t)$ 中不含 3 圈，并且任何不相邻的两个点的共同邻点的个数不超过 2.

引理 7　若 P 为 $EFH(s,t)$ 中任意一条长度是 2 的路，则 $|N_{EFH(s,t)}(P)| \geqslant 3s+1$.

证　由 $EFH(s,t)$ 的定义及引理 7，容易证明 $|N_{EFH(s,t)}(P)| \geqslant 3s+1$.

引理 8[10]　设 $K \subset V(EH(s,t))$ 并且 $|K| < 2s$，$s \geqslant 2$. 则 $EH(s,t)-K$ 满足下面两种情形之一：

(i) $EH(s,t)-K$ 是连通的；

(ii) $EH(s,t)-K$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立点.

2　交换折叠超立方体网络的 2-外连通度

定理 1　设 $EFH(s,t)=L\oplus R$，对于任意的 $F\subseteq V(EFH(s,t))$. 令 $F_L=F\cap V(L)$，$F_R=F\cap V(R)$. 如果 $|F|\leqslant 3s$ 并且 $EFH(s,t)-F$ 中既无孤立点也无孤立边，则 $R-F_R$（或 $L-F_L$）中每一个顶点均与 $L-F_L$（或 $R-F_R$）中的一个顶点连通.

证　对于任意的顶点 $u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0c\in V(R-F_R)$，分以下两种情形进行讨论：

情形 1　$u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$.

如果 $u_L=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_L$ 或 $\bar{u}\notin F_L$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $u_L\in F_L$，$\bar{u}\in F_L$. 如果 $u_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F_R$，$u_{0i'}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\notin F_R$，$u_{0i'0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_R$ 且 $u_{0i'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots \bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_L$（或 $u_0\notin F_R$，$\bar{u}_0\notin F_L$），那么从 u 出发，总存在路径 $u\to u_0\to u_{0i'}\to u_{0i'0}\to u_{0i'0(s+t)}$（或 $u\to u_0\to \bar{u}_0$）使其连接至 $L-F_L$，则定理 1 得证. 因此我们假设 $u_0\in F_R$. 令

$$A=\{u_i,\ u_{i(s+t)}(\bar{u}_i):t+1\leqslant i\leqslant s+t-1\}\cap F$$

如果 $|A|<s-1$，那么存在某个 i，使得 $u_i=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_R$ 且 $u_{i(s+t)}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_L$（或 $\bar{u}_i\notin F_L$），则定理 1 得证. 因此假设 $|A|\geqslant s-1$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立顶点，因此可令 $v=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$，使得 $(u,v)\in E(R-F_R)$. 如果 $v_L=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_L$（或 $\bar{v}\notin F_L$），则定理 1 得证. 否则可知 $v_L\in F_L$，$\bar{v}\in F_L$. 如果存在 $v_0=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\notin F_R$，$v_{0i'}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\notin F_R$，$v_{0i'0}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_R$，$v_{0i'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_R$（或 $\bar{v}_0\notin F$），那么存在路径 $v\to v_0\to v_{0i'}\to v_{0i'0}\to v_{0i'0(s+t)}$（或 $v\to v_0\to\bar{v}_0$），使得 u（或 v）通过这条路径连接至 $L-F_L$. 否则可假设 $v_0\in F_R$. 令

$$B=\{v_j,\ v_{j(s+t)}(\bar{v}_j):t+1\leqslant j\leqslant t+s-1,\ j\neq i\}\cap F$$

如果 $|B|<s-2$，那么存在某个 j，使得 $v_j=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_R$ 且 $v_{j(s+t)}=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_L$（或 $\bar{v}_j\notin F_L$），则定理 1 得证. 因此可知 $|B|\geqslant s-2$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立边，我们令

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_R\qquad i\neq j$$

使得 $(v,w)\in E(R)$. 可以构造连接 w 至 $L-F_L$ 的点不交路径，即路径如下：

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\to w_L=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$$

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\to\bar{w}$$

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\rightarrow w_0=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\rightarrow$$

$$w_{0j'}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 1\rightarrow w_{0j'0}=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\rightarrow$$

$$w_{0j'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$$

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\rightarrow w_0=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1\rightarrow\bar{w}_0$$

$$w=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\rightarrow w_k=1a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots\bar{a}_k\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\rightarrow$$

$$w_{k(s+t)}=0a_{s-2}\cdots\bar{a}_i\cdots\bar{a}_j\cdots\bar{a}_k\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0$$

令 $C=\{w_k, w_{k(s+t)}(\bar{w}_k): t+1\leqslant k\leqslant t+s-1, k\neq i,j\}$，$D=\{u_L, \bar{u}, u_0, v_L, \bar{v}, v_0, w_L, \bar{w}, w_0\}\subset F$. 由于

$$|F-(A\cup B\cup D)|=|F|-|A|-|B|-|D|\leqslant 3s-(s-1)-(s-2)-9=s-6$$

但是在 C 中存在 $s-3$ 对顶点使得 u 到 $L-F_L$ 是连通的，因此至少存在一个常数 $k(k\neq i,j)$ 使得 $w_k\notin F_R$，$w_{k(s+t)}\notin F_R$(或 $w_k\notin F_R$，$\bar{w}_k\notin F_R$). 那么 u 与 $L-F_L$ 中的一个顶点相连接，定理 1 得证.

情形 2　$u=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 1$.

由于 $N_{EFH(s,t)}(u)\cap V(L)=\{\bar{u}\}$. 如果 $\bar{u}\notin F_L$，则定理 1 得证. 因此我们可假设 $\bar{u}\in F_L$. 如果 $u_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_R$，$u_{0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots b_0 0\notin F_R$(或 $\bar{u}_0\notin F_R$)，则存在一条路径，使得 u 连通至 $L-F_L$，否则 $u_0\in F_R$. 令 $A'=\{u_{i'}, u_{i'0}, u_{i'0(s+t)}(\bar{u}_{i'}): 1\leqslant i'\leqslant t\}\cap F$(或 $A'=\{u_{i'}, \bar{u}_{i'}: 1\leqslant i'\leqslant t\}\cap F$)，其中 $u_{i'}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1$，$u_{i'0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$，$u_{i'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0$. 如果 $|A'|<t$，则必定存在某一 i'，使得 $u_{i'}\notin F_R$，$u_{i'0}\notin F_R$，$u_{i'0(s+t)}\notin F_L$(或 $u_{i'}\notin F_R$，$\bar{u}_{i'}\notin F_L$)，使得 u 连通至 $L-F_L$. 否则 $|A'|\geqslant t$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立点，不妨令 $v=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 1\notin F_R$，$1\leqslant i'\leqslant t$.，使得 $(u,v)\in E(EFH(s,t)-F)$. 如果 $\bar{v}\notin F_L$，则定理 1 得证. 否则 $\bar{v}\in F_L$. 若 $v_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_R$，$v_{0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots b_0 0\notin F_L$(或 $\bar{v}_0\notin F_L$)，则存在一条路径，使得 u 连通至 $L-F_L$，否则 $v_0\in F_R$. 令 $B'=\{v_{j'}, v_{j'0}, v_{j'0(s+t)}(\bar{v}_{j'}): 1\leqslant j'\leqslant t, j'\neq i'\}\cap F$(或 $B'=\{v_{j'}, \bar{v}_{j'}: 1\leqslant j'\leqslant t, j'\neq i'\}\cap F$)，其中

$$v_{j'}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 1$$

$$v_{j'0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$$

$$v_{j'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$$

若 $|B'|<t-1$，同理可得 u 连通至 $L-F_L$. 否则，$|B'|\geqslant t-1$.

因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立边，令 $w=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 1\notin F_R$，使得 $(v,w)\in E(R)$，则 u 通过 w 可构造通向 $L-F_L$ 的路径为

$$w\rightarrow w_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\rightarrow w_{0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0$$

$$w\rightarrow w_0=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 0\rightarrow\bar{w}_0$$

$$w\rightarrow 1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots b_0 1\rightarrow w_{k'}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 1\rightarrow$$

$$w_{k'0}=1a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0\rightarrow$$

$$w_{k'0(s+t)}=0a_{s-2}\cdots a_0b_{t-1}\cdots\bar{b}_{i'}\cdots\bar{b}_{j'}\cdots\bar{b}_{k'}\cdots b_0 0$$

其中 $1 \leqslant k' \leqslant t$ 且 $k' \neq i', j'$.

令 $C' = \{u_0, \bar{u}, v_0, \bar{v}\}$，由于

$$|F-(A' \cup B' \cup C')| \leqslant 3s-t-(t-1)-4 \leqslant s-3$$

而 u 通过 w 可构造 $t-1$ 条路径，因此至少存在 1 条路径使得 u 与 $L-F_L$ 中的一个顶点相连接，定理 1 得证.

定理 2　$k_2(EFH(s, t))=3s+1$，其中 $s \geqslant 5$.

证　设 P 为 $EFH(s, t)$ 中一条长度为 2 的路径，由引理 7 可知 $|N_{EFH(s, t)}(P)| \geqslant 3s+1$. 通过 $EFH(s, t)$ 的定义，$EFH(s, t)-(N_{EFH(s, t)}(P) \cup V(P))$ 既不包含孤立顶点也不包含孤立边，因此 $N_{EFH(s, t)}(P)$ 是 $EFH(s, t)$ 的一个 R_2-外割，进一步可知 $k_2(EFH(s, t)) \leqslant 3s+1$.

接下来只需证明 $k_2(EFH(s, t)) \geqslant 3s+1$，即证明对于任意的顶点集 $F \subseteq V(EFH(s, t))$，当 $|F|=3s$ 且不存在孤立顶点也不存在孤立边时，$EFH(s, t)-F$ 是连通的. 设 $EFH(s, t)=L \oplus R$.

方便起见，我们设

$$F_L=F \cap V(L) \qquad F_R=F \cap V(R)$$

不失一般性，令 $|F_L| \leqslant |F_R|$，那么可知 $|F_L| \leqslant \dfrac{3s}{2}<2s-2$，$s \geqslant 5$. 通过引理 8，我们可知 $L-F_L$ 满足下面两种情形之一：$L-F_L$ 是连通的；$L-F_L$ 有两个分支，其中一个分支是一个孤立顶点. 现在考虑下面两种情形.

情形 1　$L-F_L$ 是连通的.

由定理 1，可知 $R-F_R$ 中任意一顶点与 $L-F_L$ 中一顶点连通. 因此 $EFH(s, t)-F$ 是连通的.

情形 2　$L-F_L$ 有两个连通分支，其中一个是孤立点.

设 $u=0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c$ 是 $L-F_L$ 中的一个孤立点，此时有 $|F_L| \geqslant |N_L(u)| \geqslant s$. 接下来证明 $EFH(s, t)-F$ 中的 u 与 $L-F_L-\{u\}$ 是连通的. 考虑下面两种情形：

情形 2.1　若 $u=0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 1$，我们有 $N_{EFH(s, t)}(u) \cap V(R)=\{\bar{u}\}$. 如果 $\bar{u} \in F_R$，则 u 为 $EFH(s, t)-F$ 中的孤立点，这与 $EFH(s, t)-F$ 不存在孤立点矛盾，因此 $\bar{u} \notin F_R$. 方便起见，令 $v=\bar{u}$. 如果 $v_{s+t} \notin F_L$，则定理 2 成立. 因此假设 $v_{s+t} \in F_L$. 如果 $v_0 \notin F_R$，$v_{0i'} \notin F_R$，$v_{0i'0} \notin F_R$，$v_{0i'0(s+t)} \notin F_L$（或 $v_0 \notin F_R$，$\bar{v}_0 \notin F_L$），则定理 2 得证. 因此假设 $v_0 \in F_R$. 设

$$A=\{v_i, v_{i(s+t)}(\bar{v}_i): t+1 \leqslant i \leqslant s+t-1\} \cap F$$

如果 $|A|<s-1$，则存在某个 i，使得 $v_i, v_{i(s+t)} \notin F$（或 $v_i, \bar{v}_i \notin F$），则定理 2 得证. 因此假设 $|A| \geqslant s-1$.

因为 $EFH(s, t)-F$ 不存在孤立边，因此存在某个 i，使得 $(v, v_i) \in E(EFH(s, t)-F)$，则 u 通过 v_i 可构造连接 u 到 $L-\{u\}$ 的路径：$v_i \rightarrow v_{ij} \rightarrow v_{ij(s+t)}$，其中 $t+1 \leqslant j \leqslant s+t-1$，$j \neq i$；$v_i \rightarrow v_{i0} \rightarrow v_{i0i'} \rightarrow v_{i0i'0} \rightarrow v_{i0i'0(s+t)}$，其中 $1 \leqslant i' \leqslant t$；$v_i \rightarrow v_{i0} \rightarrow \bar{v}_{i0}$；$v_i \rightarrow v_{i(s+t)}$.

由于

$$|F-(N_L(u) \cup A \cup \{v_0, v_{s+t}\})| \leqslant 3s-s-(s-1)-1=s$$

且 u 通过 v_i 可构造 $s+1$ 条通向 $L-\{u\}$ 的路径，故至少存在一条路径使得 u 与 $L-F_L-\{u\}$ 连通，定理 2 得证.

情形 2.2　若 $u=0a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 0$，因为 $EFH(s, t)-F$ 中不存在孤立点，故 $u_R=1a_{s-2}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 0 \notin F$ 或者 $\bar{u} \notin F$.

若 $u_R, \bar{u} \notin F$. 由 $EFH(s, t)$ 的定义可知 u_R 和 $\bar{u}$ 在 R 中没有共同的邻点. 方便起见，设 $v=u_R$，$w=\bar{u}$，

通过引理6，可知 $v(=u_R)$ 和 $w(=\bar{u})$ 在 L 中有两个共同的邻点，即 $N_L(v)\cap N_L(w)=\{u,\bar{v}(=w_R)\}$. 如果 $\bar{v}(=w_R)\notin F$，则定理2得证. 因此假设 $\bar{v}(=w_R)\in F$. 我们可构造 $s+t$ 条连接 v(或 w)至 $L-F_L-\{u,\bar{v}(=w_R)\}$ 的路径. 即：$v(=u_R)\rightarrow v_i\rightarrow v_{i(s+t)}$，其中 $t+1\leqslant i\leqslant s+t-1$；$v(=u_R)\rightarrow v_0\rightarrow v_{0i'}\rightarrow v_{0i'0}\rightarrow v_{0i'0(s+t)}$，其中 $1\leqslant i'\leqslant t$；$w(=\bar{u})\rightarrow w_0\rightarrow w_{0(s+t)}$；$w(=\bar{u})\rightarrow w_{j'}\rightarrow w_{j'0}\rightarrow w_{j'0(s+t)}$，其中 $1\leqslant j'\leqslant t$.

由于

$$|F-(N_L(u)\cup\{u,\bar{v}\})|\leqslant 3s-s-2=2s-1$$

且 u 通过 v(或 w)可构造 $s+t(\geqslant 2s)$ 条通向 $L-\{u\}$ 的路径，故至少存在一条路径使得 u 与 $L-F_L-\{u\}$ 连通，定理2得证.

若 $u_R\notin F$，$\bar{u}\in F$ 或者 $u_R\in F$，$\bar{u}\notin F$. 不失一般性，假设 $u_R\notin F$，$\bar{u}\in F$. 如果 $\bar{u}_R\notin F$，则定理2得证. 因此假设 $\bar{u}_R\in F$. 如果 $u_{R0}\notin F$，$u_{R0i'}\notin F$，$u_{R0i'0}\notin F$，$u_{R0i'0(s+t)}\notin F$(或 $u_{R0}\notin F$，$\bar{u}_{R0}\notin F$)，则定理2得证. 假设 $u_{R0}\in F$. 因为 $EFH(s,t)-F$ 中不存在孤立边，所以 u_R 在 R 中存在不属于 F 的邻点. 假设 $u_{Ri}\notin F$，其中 $t+1\leqslant i\leqslant s+t-1$. 对于任意的点 $v\in N_R(\{u_R,u_{Ri}\})$，设 $D=\{v,v_L:(v,v_L)\in E(EFH(s,t))\}$(或 $D=\{v,\bar{v}:(v,\bar{v})\in E(EFH(s,t))\}$)，并且 $|D|=2s-2$. 可知 $D\not\subset(N_L(u)\cup\{\bar{u},\bar{u}_R,u_{R0}\})$. 由于

$$|F-(N_L(u)\cup\{\bar{u},\bar{u}_R,u_{R0}\})|\leqslant 3s-s-3=2s-3$$

所以 F 中至多有 $2s-3$ 个点在 D 中. 因此在 D 中至少存在一对点不属于 F. 即 u 与 $L-F_L-\{u\}$ 连通.

3　小结

本文在交换折叠超立方体网络经典连通度和超连通度的基础上深入研究，进一步研究了其2-外连通度，证明了：当 $t\geqslant s\geqslant 5$ 时，$k_2(EFH(s,t))=3s+1$. 也就是说，$EFH(s,t)$ 中至少删除 $3s+1$ 个顶点，才能得到不包含孤立顶点和孤立边的非连通图.

参考文献：

[1] BONDY J A，MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London：Macmillan Education U K，1976.

[2] 唐保祥，任韩. 2类图完美对集数的计算公式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(10)：13-15.

[3] 刘秀丽. 几类特殊图的 Mycielski 图的(2，1)-全标号 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：100-104.

[4] MA M J. The Connectivity of Exchanged Hypercubes [J]. Discrete Mathematics，Algorithms and Applications，2010，2(2)：213-220.

[5] HARARY F. Conditional Connectivity [J]. Networks，1983，13(3)：347-357.

[6] FÀBREGA J，FIOL M A. Extraconnectivity of Graphs with Large Girth [J]. Discrete Mathematics，1994，127(1/2/3)：163-170.

[7] FÀBREGA J，FIOL M A. On the Extraconnectivity of Graphs [J]. Discrete Math，1996，155(1/2/3)：49-57.

[8] CAI X P，VUMAR E. The Super Connectivity of Folded Crossed Cubes [J]. Information Processing Letters，2019，142：52-56.

[9] 蔡学鹏，杨伟. 折叠交叉立方体的2-外边连通度 [J]. 中国科学技术大学学报，2020，50(2)：94-99.

[10] MA M J，ZHU L Y. The Super Connectivity of Exchanged Hypercubes [J]. Information Processing Letters，2011，111(8)：360-364.

[11] MA M J，LIU G Z，XU J M. The Super Connectivity of Augmented Cubes [J]. Information Processing Letters，2008，

106(2)：59-63.

[12] NING W T. The Super Connectivity of Exchanged Crossed Cube [J]. Information Processing Letters，2016，116(2)：80-84.

[13] XU J M，ZHU Q，HOU X M，et al. On Restricted Connectivity and Extra Connectivity of Hypercubes and Folded Hypercubes [J]. Journal Shanghai Jiaotong University(Science)，2005，10(2)：203-207.

[14] ZHU Q，XU J M，HOU X M，et al. On Reliability of the Folded Hypercubes [J]. Information Sciences，2007，177(8)：1782-1788.

[15] CHANG N W，TSAI C Y，HSIEH S Y. On 3-Extra Connectivity and 3-Extra Edge Connectivity of Folded Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Computers，2014，63(6)：1594-1600.

[16] 梁家荣，白杨，王新阳. 评估交换超立方体网络可靠性的一种新方法 [J]. 电子与信息学报，2015，37(3)：693-699.

[17] SAAD Y，SCHULTZ M H. Topological Properties of Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Computers，1988，37(7)：867-872.

[18] EL-AMAWY A，LATIFI S. Properties and Performance of Folded Hypercubes [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems，1991，2(1)：31-42.

[19] LOH P K K，HSU W J，PAN Y. The Exchanged Hypercube [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems，2005，16(9)：866-874.

[20] 蔡学鹏，杨伟，任佰通，等. 交换折叠超立方体的连通度 [J]. 井冈山大学学报(自然科学版)，2019，40(4)：8-11.

[21] NING W T. The Connectivity of Exchanged Folded Hypercube [J]. Parallel Processing Letters，2020，30(1)：1-5.

[22] 蔡学鹏. 交换折叠超立方体的 2 -额外边连通度 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(6)：20-26.

[23] QI H，LI Y，LI K Q，et al. An Exchanged Folded Hypercube-Based Topology Structure for Interconnection Networks [J]. Concurrency and Computation：Practice and Experience，2015，27(16)：4194-4210.

责任编辑　廖坤