第 47 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 8 月
Vol. 47 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.08.005

一类含平均曲率算子的拟线性微分方程 Dirichlet 问题 3 个正解的存在性[①]

苗亮英， 冯登娟

青海民族大学 数学与统计学院，西宁 810007

摘要：利用锥上的不动点指数理论研究了欧氏空间中含平均曲率算子的拟线性微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)' = \lambda f(x, u) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

至少 3 个正解的存在性，其中 $\lambda > 0$ 为参数，$f \in C([0, 1] \times [0, \infty), [0, \infty))$ 并且 $f(x, s) > 0$，$s > 0$，$x \in [0, 1]$. 最后用一个例子验证了结果的正确性.

关 键 词：平均曲率；不动点指数；正解；多解性

中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2022)08-0032-06

Existence of 3 Positive Solutions for a Class of Dirichlet Problem of Quasilinear Differential Equation with Mean Curvature Operator

MIAO Liangying， FENG Dengjuan

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining 810007, China

Abstract: In this paper, by means of the fixed point index theorem, we have studied the existence of at least 3 positive solutions for Dirichlet problem of quasilinear differential equation with mean curvature operator in Euclidean space

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)' = \lambda f(x, u) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

where $\lambda > 0$ is parameter, $f \in C([0, 1] \times [0, \infty), [0, \infty))$ and $f(x, s) > 0$, $s > 0$, $x \in [0, 1]$. And, fi-

① 收稿日期：2021-10-03
基金项目：青海民族大学校级高层次人才基金项目(2021XJG10)；国家自然科学基金项目(12061064).
作者简介：苗亮英，博士，讲师，主要从事偏微分方程及其应用.

nally, an example has been given to verify the correctness of the main result.

Key words：mean curvature problem；fixed point index；positive solutions；multiplicity

近年来，许多学者[1-13] 研究了如下微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+\kappa\,|\,\nabla u\,|^2}}\right)=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性和多解性，并取得了许多深刻的结果. 这里 Ω 为 $\mathbb{R}^n$，$n\geqslant 2$ 空间中的有界区域. 值得注意的是，当 $\kappa=0$ 时，问题(1) 退化为半线性 Dirichlet 问题；而当 $\kappa\neq 0$ 时，上述问题为拟线性微分方程 Dirichlet 问题. 特别地，当 $\kappa=-1$ 时，问题(1) 退化为 Minkowski 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题；当 $\kappa=1$ 时，问题(1) 退化为 Euclidean 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题. 本文主要考察 $\kappa=1$ 的情形. 需要说明的是，当 $\kappa=1$ 时，给定平均曲率问题(1) 有重要的应用背景，例如可刻画可压缩流体的毛细现象以及人类角膜的几何形状[4-5].

研究 Euclidean 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题有很大的挑战性. 如文献[9-11] 中所示，当 $\kappa=1$ 时，问题(1) 为一类拟线性非一致椭圆问题，研究这类问题最大的障碍是缺乏梯度估计. 例如，即便在最简单的一维空间下，问题(1) 解的梯度也会出现爆破现象.

最近，一些学者[6-13] 分别利用变分法、上下解方法、时间映像法、不动点理论研究了一维给定平均曲率方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)'=\lambda f(u) & x\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性和多解性，其中 λ 为正参数，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 并且 $f(s)>0$，$s>0$. 据我们所知，这些文献并未研究问题(2) 至少 3 个正解的存在性. 注意到，问题(2) 是一维的自治问题，其解 $u(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处是对称的，因此可利用解的凹凸性来构造适当的锥. 自然地，当非线性项 f 不仅与 u 有关，还与 x 有关时，能否利用不动点理论研究问题(2) 至少 3 个正解的存在性呢？

受以上文献的启发，本文将利用锥上的不动点定理研究问题(2) 更为广泛的情形，确切地说，我们研究问题

$$\begin{cases} -(\phi(u'))'=\lambda f(x,u(x)) & x\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

至少 3 个正解的存在性. 这里 $\phi(s)=\dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}$，显然，$\phi:\mathbb{R}\longrightarrow(-1,1)$ 是奇的、递增的同胚并且满足 $\phi(0)=0$. 需要指出的是，在这种情况下，问题(3) 的解 $u(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处不具有对称性，因而利用不动点理论研究问题(3) 正解的个数时，首要任务是构造一个巧妙的锥.

令

$$f_0:=\lim_{u\to 0}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{f(x,u)}{\phi(u)},\quad f_\infty:=\lim_{u\to\infty}\min_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{f(x,u)}{\phi(u)}$$

本文总假定

(H) $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$ 且 $f(x,s)>0$，$s>0$，$x\in[0,1]$.

本文的主要结果

定理 1 假设 f 满足条件(H). 若 $f_0=f_\infty=0$，则存在 $\lambda_*,\lambda^*>0$ 使得当 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$ 时，问题(3)至少存在 3 个正解.

注 1 在文献[14]中，我们构造了一个合适的锥研究了 Minkowski 空间中一维给定平均曲率方程 Dirichlet 问题 3 个以及多个正解的存在性. 但据我们所知，还没有学者研究欧氏空间中给定平均曲率型方程 Dirichlet 问题 3 个正解的存在性.

1 预备知识

我们令

$$E=\{u\in C[0,1]\mid u(0)=u(1)=0\}$$

则 E 为装备了范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{x\in[0,1]}|u(x)|$ 的 Banach 空间.

引理 1[15] 设 E 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥. 对任意的 $r>0$，定义 $K_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$. 假设 $T:\overline{K}_r\longrightarrow K$ 是全连续的，使得对任意的 $x\in\partial K_r=\{x\in K:\|x\|=r\}$，$Tx\neq x$.

(i) 若 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in\partial K_r$，则 $i(T,K_r,K)=0$.

(ii) 若 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in\partial K_r$，则 $i(T,K_r,K)=1$.

引理 2[11] $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow(-1,1)$ 是奇的、递增的同胚并且满足 $\phi(0)=0$，此外 ϕ 与 $\phi^{-1}\left(\phi^{-1}=\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)$ 有如下性质

(i) ϕ 在$[0,\infty)$ 上是上凸的，ϕ^{-1} 在$[0,1)$ 上是上凸的；

(ii) 对任意的 $0<c\leqslant1$，存在 $B_c>c$ 使得 $\phi^{-1}(cs)\leqslant B_c\phi^{-1}(s)$，$\forall s\in(0,1)$. 对任意的 $c\geqslant1$ 满足 $-1<cs<1$，存在 $A_c\leqslant c$ 使得 $\phi^{-1}(cs)\geqslant A_c\phi^{-1}(s)$，$\forall s\in(0,1)$.

引理 3[11] 令 $h\in C([0,1],[0,\infty))$ 且 $\not\equiv0$. 假设 w 是

$$\begin{cases}-(\phi(u'))'=h(x) & x\in(0,1)\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

的解，则 $w(x)>0$，$x\in(0,1)$ 且 $\|w'\|_\infty\leqslant\phi^{-1}(M)$，其中 $M=\min\{1,\sup_{x\in[0,1]}|h(x)|\}$.

引理 3 表明，存在 $\tau_i\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$i=1,2$ 使得 $\min\limits_{[\tau_1,1-\tau_2]}w(x)\geqslant\sigma\|w\|_\infty$，其中 $0<\sigma<1$ 依赖于 τ_i. 定义 E 中的锥 P，其中

$$P=\{u\in E\mid u(x)\geqslant0,\ \min_{x\in[\tau_1,1-\tau_2]}u(x)\geqslant\sigma\|u\|_\infty\}$$

定义 $f^*(r)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant1,\,0\leqslant t\leqslant r}\{f(s,t)\}$，对任意的 $r>0$，令 $\Omega_r=\{u\in P\mid\|u\|_\infty<r\}$，$\partial\Omega_r=\{u\in P\mid\|u\|_\infty=r\}$.

引理 4[16] 对任意的 $h\in C[0,1]$，(4) 式存在唯一解 u，其中

$$u(x)=\int_0^x\phi^{-1}\left(C-\int_0^s h(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s=:T_h(u)(x)$$

这里 $0<C<\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ 满足 $u(1)=0$. 此外，算子 $T_h:E\longrightarrow E$ 是全连续算子.

用文献[11]的方法和引理 4 可知，问题(3)的解等价于证明

$$u(x)=\int_0^x\phi^{-1}\left(C_0-\lambda\int_0^s f(t,u(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s:=T_\lambda(u)(x)$$

存在不动点，其中 $0<C_0<\lambda\int_0^1 f(u(t))\mathrm{d}t$ 满足 $u(1)=0$. 由引理 4 可知 $T_\lambda:E\longrightarrow E$ 是全连续映射. 此外，对任意固定的 $u\in P$，我们有

$$T_\lambda(u)(x)=\int_0^x \phi^{-1}\left(C_0-\lambda\int_0^s f(t,u(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\geqslant 0,\ x\in[0,1]$$

且 $T_\lambda(u)(0)=T_\lambda(u)(1)=0$. 此外，由引理 3 可得 $T_\lambda(u)(x)>0$，$x\in(0,1)$ 并且存在 $\tau_i\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$i=1,2$，使得 $\min\limits_{x\in[\tau_1,1-\tau_2]} T_\lambda u\geqslant\sigma\|T_\lambda u\|_\infty$. 因此，$T_\lambda: P\longrightarrow P$ 为全连续算子.

引理 5　给定 $r>0$，若 $\varepsilon>0$ 足够小满足 $B_{\lambda\varepsilon}<1$ 且 $f^*(r)\leqslant\varepsilon\phi(r)$，则

$$\|T_\lambda u\|_\infty\leqslant B_{\lambda\varepsilon}\|u\|_\infty,\ u\in\partial\Omega_r$$

其中 $B_{\lambda\varepsilon}$ 如引理 2(ii) 所示.

证　由 T_λ 的定义，对任意的 $u\in\partial\Omega_r$，我们有

$$\begin{aligned}\|T_\lambda u\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\phi^{-1}\left(C_0-\lambda\int_0^s f(t,u(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\ \int_0^1\phi^{-1}\left(\lambda\int_s^1 f(t,u(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\leqslant\\ \int_0^1\phi^{-1}\left(\lambda\int_s^1 f^*(r)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\leqslant\\ \int_0^1\phi^{-1}(\lambda\varepsilon\phi(r))\mathrm{d}s\leqslant B_{\lambda\varepsilon}r\end{aligned}$$

引理 6　给定 $r>0$，若 $u\in\partial\Omega_r$，则

$$\|T_\lambda u\|_\infty\leqslant\phi^{-1}(\lambda M_r)$$

其中 $M_r=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant u\leqslant r} f(t,u)>0$.

证　对任意的 $u\in\partial\Omega_r$，则有 $f(u(x))\leqslant M_r$，$x\in[0,1]$，从而有

$$\|T_\lambda u\|_\infty\leqslant\int_0^1\phi^{-1}\left(\lambda\int_s^1 f(t,u(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\leqslant\phi^{-1}(\lambda M_r)$$

引理 7[11]　给定 $r>0$，若 $u\in\partial\Omega_r$，则

$$\|T_\lambda u\|_\infty\geqslant\sigma x_*\phi^{-1}(\lambda(1-\sigma)x_*m_r)$$

其中 $m_r=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1,\ \sigma r\leqslant u\leqslant r} f(x,u)>0$ 并且 $x_*=\min\{x_0,1-x_0\}$ 且 $u(x_0)=\max\limits_{x\in[0,1]}u(x)=\|u\|_\infty$.

2　主要结果的证明

定理 1 的证明　令 $\lambda^*>0$ 为 $\lambda\int_0^{\bar r}f(u)\mathrm{d}u=1$ 的解，其中 $\bar r:=u(x_0)=\|u\|_\infty$. 则当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时，

$$\lambda\int_0^{\bar r}f(u)\mathrm{d}u<1$$

选取正常数 r_i，$i=2,3,4,5$，使得 $0<r_2<r_3<r_4<r_5<\bar r$ 满足

$$\phi\left(\frac{r_i}{\sigma x_*}\right)<\frac{(1-\sigma)x_*m_{r_i}}{M_{\bar r}}\phi(\bar r),\ i=2,3,5$$

由引理 7 可知，存在

$$\lambda_*=\max\left\{\frac{\phi\left(\frac{r_2}{\sigma x_*}\right)}{(1-\sigma)x_*m_{r_2}},\ \frac{\phi\left(\frac{r_3}{\sigma x_*}\right)}{(1-\sigma)x_*m_{r_3}},\ \frac{\phi\left(\frac{r_5}{\sigma x_*}\right)}{(1-\sigma)x_*m_{r_5}}\right\}$$

并且

$$\lambda^*=\min\left\{\frac{\phi(r_4)}{M_{r_4}},\ \frac{\phi(\bar r)}{M_{\bar r}},\ \frac{1}{(1-\sigma)x_*m_{r_2}},\ \frac{1}{(1-\sigma)x_*m_{r_3}},\ \frac{1}{(1-\sigma)x_*m_{r_5}}\right\}=\min\left\{\frac{\phi(r_4)}{M_{r_4}},\ \frac{\phi(\bar r)}{M_{\bar r}}\right\}$$

使得对 $\lambda_*<\lambda<\lambda^*$，我们有

$$\| T_\lambda u \|_\infty > \| u \|_\infty, \ u \in \partial \Omega_{r_i}, \ i = 2, 3, 5$$

由引理 1 可知，$i(T_\lambda, \Omega_{r_i}, P) = 0$，$i = 2, 3, 5$.

对于给定常数 $r_4 > 0$. 由引理 6 可知，当 $0 < \lambda \leqslant \lambda^*$ 时，$\| T_\lambda u \|_\infty < \| u \|_\infty$，$u \in \partial \Omega_{r_4}$. 由引理 1 可知，$i(T_\lambda, \Omega_{r_4}, P) = 1$. 则

$$i(T_\lambda, \Omega_{r_5} \setminus \overline{\Omega}_{r_4}, P) = i(T_\lambda, \Omega_{r_5}, P) - i(T_\lambda, \Omega_{r_4}, P) = -1$$

$$i(T_\lambda, \Omega_{r_4} \setminus \overline{\Omega}_{r_3}, P) = i(T_\lambda, \Omega_{r_4}, P) - i(T_\lambda, \Omega_{r_3}, P) = 1$$

另一方面，若 $f_0 = 0$，利用文献[17]引理 2.8 相同的方法可证 $f_0^* = 0$. 这里，$f_0^* := \lim\limits_{u \to 0} \max\limits_{t \in [0,1]} \dfrac{f^*(u)}{u}$，$f^*(s) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant s} \{ f(x, t) \}$ 对一致的 $x \in [0, 1]$ 均成立. 选择 $r_1 \in \left(0, \dfrac{r_2}{2}\right)$ 使得 $f^*(r_1) \leqslant \varepsilon \phi(r_1)$，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小满足

$$B_{\lambda\varepsilon} < 1$$

由引理 5 可知，当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时，

$$\| T_\lambda u \|_\infty < \| u \|_\infty, \ u \in \partial \Omega_{r_1}$$

由引理 1 可得 $i(T_\lambda, \Omega_{r_1}, P) = 1$. 则

$$i(T_\lambda, \Omega_{r_2} \setminus \overline{\Omega}_{r_1}, P) = i(T_\lambda, \Omega_{r_2}, P) - i(T_\lambda, \Omega_{r_1}, P) = -1$$

最后，若 $f_\infty = 0$，$\lambda < \lambda^*$，则由引理 7 可知

$$\| T_\lambda u \|_\infty \leqslant \phi^{-1}(\lambda M_{\bar r}) < \| u \|_\infty, \ \forall u \in \partial \Omega_{\bar r}$$

即 $i(T_\lambda, \Omega_{\bar r}, P) = 1$. 则有

$$i(T_\lambda, \Omega_{\bar r} \setminus \overline{\Omega}_{r_5}, P) = i(T_\lambda, \Omega_{\bar r}, P) - i(T_\lambda, \Omega_{r_5}, P) = 1$$

因此，当 $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$ 时，T_λ 至少存在 3 个不同的不动点 u_i，$i = 1, 2, 3$ 使得 $u_1 \in \overline{\Omega}_{r_2} \setminus \Omega_{r_1}$，$u_2 \in \overline{\Omega}_{r_4} \setminus \Omega_{r_3}$，$u_3 \in \overline{\Omega}_{\bar r} \setminus \Omega_{r_5}$ 并且

$$r_1 \leqslant \| u_1 \|_\infty \leqslant r_2 < r_3 \leqslant \| u_2 \|_\infty \leqslant r_4 < r_5 \leqslant \| u_3 \|_\infty \leqslant \bar r$$

因此，问题(3)至少存在 3 个不同的正解.

例 1 考虑如下含平均曲率算子的拟线性微分方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)' = \lambda f(u) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

正解的存在性和多解性，其中

$$f(s) = \begin{cases} s^2, \ u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{2} s, \ s \in \left[\dfrac{1}{2}, 4\right) \\ \sqrt{s}, \ s \in [4, \infty) \end{cases}$$

显然，f 满足条件(H)且 $f_0 = f_\infty = 0$. 由定理 1 可知，问题(5)至少存在 3 个正解.

参考文献：

[1] CANO-CASANOVA S, LÓPEZ-GÓMEZ J, TAKIMOTO K. A Quasilinear Parabolic Perturbation of the Linear Heat Equation [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252(1): 323-343.

[2] COFFMAN C V, ZIEMER W K. A Prescribed Mean Curvature Problem on Domains without Radial Symmetry [J]. SI-

AM Journal on Mathematical Analysis，1991，22(4)：982-990.

[3] PAN H J，XING R X. Sub- and Supersolution Methods for Prescribed Mean Curvature Equations with Dirichlet Boundary Conditions [J]. Journal of Differential Equations，2013，254(3)：1464-1499.

[4] FINN R. On the Equations of Capillarity [J]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics，2001，3(2)：139-151.

[5] CORSATO C，DE COSTER C，OMARI P. The Dirichlet Problem for a Prescribed Anisotropic Mean Curvature Equation：Existence，Uniqueness and Regularity of Solutions [J]. Journal of Differential Equations，2016，260(5)：4572-4618.

[6] BONHEURE D，HABETS P，OBERSNEL F，et al. Classical and Non-Classical Solutions of a Prescribed Curvature Equation [J]. Journal of Differential Equations，2007，243(2)：208-237.

[7] HABETS P，OMARI P. Multiple Positive Solutions of a one-Dimensional Prescribed Mean Curvature Problem [J]. Communications in Contemporary Mathematics，2007，9(5)：701-730.

[8] KUSAHARA T，USAMI H. A Barrier Method for Quasilinear Ordinary Differential Equations of the Curvature Type [J]. Czechoslovak Mathematical Journal，2000，50(1)：185-196.

[9] PAN H J. One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equation with Exponential Nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2009，70(2)：999-1010.

[10] PAN H J，XING R X. Time Maps and Exact Multiplicity Results for One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equations [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2011，74(4)：1234-1260.

[11] LU Y Q，MA R Y，GAO H L. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equations [J]. Boundary Value Problems，2014，2014：120.

[12] CORSATO C，OMARI P，ZANOLIN F. Subharmonic Solutions of the Prescribed Curvature Equation [J]. Communications in Contemporary Mathematics，2016，18(3)：1550042.

[13] LÓPEZ-GÓMEZ J，OMARI P，RIVETTI S. Positive Solutions of a One-Dimensional Indefinite Capillarity-Type Problem：a Variational Approach [J]. Journal of Differential Equations，2017，262(3)：2335-2392.

[14] HE Z Q，MIAO L Y. Uniqueness and Multiplicity of Positive Solutions for One-Dimensional Prescribed Mean Curvature Equation in Minkowski Space [J]. AIMS Mathematics，2020，5(4)：3840-3850.

[15] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis [M]. Berlin：Springer，1985.

[16] MANÁSEVICH R，MAWHIN J. Boundary Value Problems for Nonlinear Perturbations of Vector P-Laplacian-Like Operators [J]. Journal of the Korean Mathematical Society，2000，37：665-685.

[17] WANG H Y. On the Number of Positive Solutions of Nonlinear Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2003，281(1)：287-306.

责任编辑　张枸