第 47 卷　第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 8 月
Vol. 47　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.08.006

一类 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的存在性和多重性①

孙歆，　段誉

贵州工程应用技术学院 理学院，贵州 毕节 551700

摘要：研究了一类含有参数且具有凹凸非线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的存在性和多重性. 当凸非线性项满足广义超线性条件时，利用变分方法获得了系统解的存在性和多重性结果，并对参数的综合影响做了准确分析，完善了此系统解的存在性的已有相关结果.

关　键　词：Klein-Gordon-Maxwell 系统；变分法；对偶喷泉定理；对称山路定理

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)08－0038－10

Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Klein-Gordon-Maxwell Systems

SUN Xin，　DUAN Yu

College of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie Guizhou 551700, China

Abstract: In this paper, the existence and multiplicity of solutions have been established for a class of Klein-Gordon-Maxwell system with parameters and concave-convex nonlinearities. When the convex nonlinearity is general superlinear, the existence and multiplicity of solutions for the system have been proved via variational methods and make accurate analysis on the combined effect of parameters. Our result completes some recent works concerning the existence of solutions of this system.

Key words: Klein-Gordon-Maxwell system; variational methods; dual fountain theorem; symmetric mountain pass theorem

① 收稿日期：2021－12－19
基金项目：国家自然科学基金项目(11661021)；贵州省普通高等学校科技拔尖人才项目(黔教合 KY 字[2019]065)；贵州省教育厅青年人才成长项目(黔教合 KY 字[2020]144).
作者简介：孙歆，硕士，副教授，主要从事非线性泛函分析和随机分析的研究.
通信作者：段誉，副教授.

研究如下 Klein-Gordon-Maxwell 系统：

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = \mu\alpha(x)|u|^{s-2}u + \lambda f(x,u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \Delta\phi = (\omega + \phi)u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\omega > 0$ 是一个常数；$1 < s < 2$，λ，μ 是参数；u，ϕ：$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$，$f$，$g$：$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. 系统(1) 起源于数学物理领域中的某些应用问题. 为了描述三维空间中非线性 Klein-Gordon 场与静电场之间相互作用所产生的孤立波问题，文献[1] 首次提出了如下 Klein-Gordon-Maxwell 系统模型：

$$\begin{cases} -\Delta u + [m_0^2 - (\omega + e\phi)^2]u = |u|^{q-2}u & x \in \mathbb{R}^3 \\ \Delta\phi = (e\omega + e^2\phi)u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $0 < \omega < m_0$，$4 < q < 6$，m_0 和 e 分别表示粒子的质量和电量，而 ω 表示相位.系统的未知因素是联系粒子的场 u 和电磁位势 ϕ. 有关系统(2) 物理方面的详述可参见文献[1-2]. 作为系统(2) 的一般情形，系统(1) 近年来受到了众多学者的关注(见文献[3-25]). 需特别提及的是：文献[15-16] 考虑了系统(1) 无穷多解的存在性问题，但其所考虑的凹凸非线性项均是特殊的非线性项，且凸非线性项满足超 4 次条件；文献[22] 在非线性项满足局部(AR) 条件时考虑了系统(1) 解的存在性和多重性.

本文的主要目的是当凸非线性项是不满足局部(AR) 条件的一般非线性项，且非线性项含有两个参数时，利用变分法讨论两个参数对系统(1) 解的存在性和多重性的具体影响. 本文的结论完善了已有文献的相关结果.

本文针对位势函数 V 及非线性项 α，f 做如下假设：

(V) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$，$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) > 0$，且对 $\forall M > 0$，有 $\mathrm{meas}\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) \leqslant M\} < \infty$；

(F_1) $f \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立；

(F_2) 存在常数 $C_1 > 0$ 及 $2 < p < 6$，满足 $|f(x,t)| \leqslant C_1(1 + |u|^{p-1})$，$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$；

(F_3) 存在常数 $\theta > 0$，$r_0 > 0$，使得 $\widetilde{F}(x,t) = f(x,t)t - 2F(x,t) \geqslant \theta|t|^p$，$\forall x \in \mathbb{R}^3$，$|u| \geqslant r_0$；

(F_4) $\lim\limits_{|t| \to \infty} \dfrac{F(x,t)}{|t|^2} = +\infty$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立，且 $f(x,t)t \geqslant 2F(x,t) \geqslant 0$，$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$；

(F_5) $f(x,-t) = -f(x,t)$，$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$；

(A) $\alpha(x) \in L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbb{R}^3)$，$1 < s < 2$，$\alpha(x) \geqslant 0$.

定理 1　假设 V，f，α 分别满足条件(V)，(F_1) $-$ (F_4) 及(A)，则：

(i) 对 $\forall \lambda > 0$，存在 $\overline{\mu}_\lambda > 0$，使得对 $\forall \mu \in (-\overline{\mu}_\lambda, \overline{\mu}_\lambda)$，系统(1) 至少有一个非平凡解；

(ii) 对 $\forall \lambda > 0$，存在 $\overline{\mu}_\lambda > 0$，使得对 $\forall \mu \in (0, \overline{\mu}_\lambda)$，系统(1) 至少有两个非平凡解；

(iii) 对 $\forall \mu > 0$，存在 $\overline{\lambda}_\mu > 0$，使得对 $\forall \lambda \in (0, \overline{\lambda}_\mu)$，系统(1) 至少有两个非平凡解.

定理 2　假设 V，f，α 分别满足条件(V)，(F_1) $-$ (F_5) 及(A)，则对 $\forall \lambda > 0$，$\mu \in \mathbb{R}$，系统(1) 有一列高能量解.

定理 3　假设 V，f，α 分别满足条件(V)，(F_1) $-$ (F_5) 及(A)，则对 $\forall \lambda > 0$，$\mu > 0$，系统(1) 有一列负能量解.

注 1　确实存在函数满足条件(F_1) $-$ (F_4)，但不满足(AR) 条件及超 4 次条件，如

$$F(x,t) = |t|^p + a(p-2)|t|^{p-2}\sin^2\left(\frac{|t|^\varepsilon}{\varepsilon}\right) \qquad 2 < p < 4,\ 0 < \varepsilon < p - 2$$

注 2　与文献[15-16] 的结论相比，本文在凸非线性项是一般非线性项，且不满足超 4 次条件下讨论了系统(1) 解的存在性和多重性.

与文献[22]的结论相比，本文从两个方面改进了其结果：

(i) 本文在非线性项不满足局部(AR)条件而满足更弱的超线性条件时给出了系统(1)解的存在性和多重性结果；

(ii) 本文在参数 μ 满足更大范围的限制性条件下仍获得了与其相同的结果：系统(1)有一个非平凡解和一列高能量解，且本文还讨论了一列负能量解的存在性问题.

因此本文完善了已有文献的相关结果.

令

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^6(\mathbb{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

表示 Sobolev 空间，其范数定义为

$$\|u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

$H^1(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$，其内积和范数分别定义为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+uv)\mathrm{d}x \qquad \|u\|_{H^1}=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

定义

$$H=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

由条件(V)，H 是 Hilbert 空间，其内积和范数分别定义为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x \qquad \|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$$

显然，在条件(V)下，对任意的 $2\leqslant p<6$，嵌入映射 $H\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 是紧映射，且对任意的 $2\leqslant p\leqslant 6$，存在$S_p>0$，使得

$$\|u\|_p\leqslant S_p\|u\| \qquad \forall u\in H \tag{3}$$

系统(1)具有变分结构，对$\forall(u,\phi)\in H\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，定义其能量泛函

$$J(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2-|\nabla\phi|^2-(2\omega+\phi)\phi u^2)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x$$

易知系统(1)的弱解$(u,\phi)\in H\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$对应着泛函 J 的临界点. 由于 J 是强不定的，为了克服这种困难，需要对泛函进行一些简化，将泛函 J 转化成只含有一个变量 u 的式子.

引理 1[3] 对$\forall u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的 $\phi=\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，满足

$$\Delta\phi=(\omega+\phi)u^2 \tag{4}$$

更进一步，映射 $\Phi:u\in H^1(\mathbb{R}^3)\longrightarrow\Phi[u]=\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是连续可微的，并且满足：

(i) 在集合$\{x:u(x)\neq 0\}$上，$-\omega\leqslant\phi_u\leqslant 0$；

(ii) $\|\phi_u\|_{D^{1,2}}\leqslant C\|u\|^2$，且$\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_u|u^2\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|^4$.

在(4)式左右两端同时乘以 ϕ_u，并分部积分，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^2u^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

结合(5)式及 J 的定义知，$I(u)=J(u,\phi_u)$ 可化简为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2-\omega\phi_u u^2)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x \qquad \forall u\in H$$

由条件(V)，(F_1)－(F_3) 及引理 1 易知，I 定义在空间 H 上是有意义的，且 $I \in C^1(H, \mathbb{R})$，其所对应的导数为

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv - (2\omega + \phi_u)\phi_u uv]\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}^3} \alpha(x) |u|^{s-2} uv\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} f(x, u)v\mathrm{d}x \qquad \forall u, v \in H$$

由文献[1] 的命题 3.5 知，u 是泛函 I 的临界点当且仅当 $(u, \phi) \in H \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是系统(1) 的解，并且 $\phi = \phi_u$. 因此，为了得到系统(1) 的非零解，我们只需寻找泛函 I 的非零临界点即可.

令

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\} \qquad B_R^C = \mathbb{R}^3 \backslash B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geqslant R\}$$

令 $\{e_i\}$ 为空间 H 的一组正交基. $X_i = \mathbb{R}e_i$，$Y_k = \bigoplus_{i=1}^k X_i$，$Z_k = \bigoplus_{i=k+1}^\infty X_i$，$k \in \mathbb{N}$. 为了证明定理 1－定理 3，我们给出以下几个引理：

引理 2[26]　设 $1 < s < 2 < r$，$A, B > 0$，令 $\Psi_{A,B}(t) = t^2 - At^s - Bt^r\ (t \geqslant 0)$. 则 $\max\limits_{t \geqslant 0} \Psi_{A,B}(t) > 0$ 当且仅当 $A^{r-2}B^{2-s} < d(r, s) = \dfrac{(r-2)^{r-2}(2-s)^{2-s}}{(r-s)^{r-s}}$. 若 $t = t_B = \left[\dfrac{2-s}{B(r-s)}\right]^{\frac{1}{r-2}}$，则有

$$\max_{t \geqslant 0} \Psi_{A,B}(t) = \Psi_{A,B}(t_B) = t_B^2\left[\frac{r-2}{r-s} - AB^{\frac{2-s}{r-2}}\left(\frac{r-s}{2-s}\right)^{\frac{2-s}{r-2}}\right] > 0$$

引理 3　假设条件(V)，(F_1)－(F_4) 及(A) 成立，则对 $\forall \lambda > 0$，$\mu \in \mathbb{R}$，I 在空间 H 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　设 $\{u_n\} \subset H$ 是泛函 I 的任一$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即

$$I(u_n) \to c \qquad I'(u_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

从而存在常数 $M > 0$，使得

$$|I(u_n)| \leqslant M \qquad \|I'(u_n)\| \leqslant M \tag{6}$$

首先证明：$(\mathrm{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}$ 有界.

下面采用反证法证明 $\|u_n\|$ 有界. 假设存在 $\{u_n\}$ 的一个子列(不失一般性，仍记此子列为 $\{u_n\}$)，使得 $\|u_n\| \to \infty$. 令 $\omega_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|\omega_n\| = 1$. 因为对任意的 $2 \leqslant p < 6$，嵌入映射 $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 是紧的，所以存在 $\{\omega_n\}$ 的一个子列(不失一般性，仍记之为 $\{\omega_n\}$) 和 $\omega_0 \in H$，使得

$$\begin{cases} \omega_n \rightharpoonup \omega_0 & u \in H \\ \omega_n \to \omega_0 & u \in L^p(\mathbb{R}^3) \\ \omega_n(x) \to \omega_0(x) & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

令 $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^3 : \omega_0(y) \neq 0\}$. 若 $\mathrm{meas}(\Omega) > 0$，则 $|u_n| = |\omega_n| \|u_n\| \to \infty$(a. e. $x \in \Omega (n \to \infty)$).

由条件(F_4) 和 Fatou 引理知

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x \geqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda\int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x \geqslant \lambda\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n)}{|u_n|^2} |\omega_n|^2 \mathrm{d}x = +\infty \tag{7}$$

而由引理 1(i) 及(6) 式知

$$\left|\lambda\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\right| = \left| -\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega\phi_{u_n}u_n^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x - \frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\alpha(x)|u_n|^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{\|u_n\|^2} + \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2}S_2^2 + \frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u_n\|^{s-2} \to \frac{1+\omega^2 S_2^2}{2} \qquad n \to \infty$$

这显然与(7)式是矛盾的，故 meas$(\Omega)=0$. 从而有 $\omega_0=0$，且在 $L^p(\mathbb{R}^3)(2\leqslant p<6)$ 中 $\omega_n\to 0$.

由条件$(\mathrm{F}_3)-(\mathrm{F}_4)$及引理1(i)知

$$
\begin{aligned}
c+o(1)=I(u_n)-\frac{1}{2}\langle I'(u_n),u_n\rangle= \\
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)\mid u_n\mid^s\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}^2u_n^2\mathrm{d}x+ \\
&\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\geqslant \\
&-\frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\mathrm{d}x+\mid\mu\mid\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^s+\lambda\int_{\mid u_n\mid\geqslant r_0}\frac{\theta}{2}\mid u_n\mid^p\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因在 $L^p(\mathbb{R}^3)(2\leqslant p<6)$ 中 $\omega_n\to 0$，则

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\mid u_n\mid\geqslant r_0}\frac{\mid u_n\mid^p}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=0 \tag{8}
$$

由条件$(\mathrm{F}_1)-(\mathrm{F}_2)$知，对$\forall\varepsilon>0$，存在$C_\varepsilon>0$，满足

$$
\mid f(x,u)\mid\leqslant\varepsilon\mid u\mid+C_\varepsilon\mid u\mid^{p-1}\qquad \mid F(x,u)\mid\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\mid u\mid^2+\frac{C_\varepsilon}{p}\mid u\mid^p \tag{9}
$$

故由条件$(\mathrm{F}_1)-(\mathrm{F}_3)$,(A),(6),(8),(9)式及引理1(i)知

$$
\begin{aligned}
\frac{M+1}{\|u_n\|}\geqslant\frac{\langle I'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|^2}= \\
&1-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(2\omega+\phi_{u_n})\phi_{u_n}u_n^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha(x)\mid u_n\mid^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x,u_n)u_n}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\geqslant \\
&1-\mid\mu\mid\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}-\lambda\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}\mid\omega_n\mid^2\mathrm{d}x-\lambda C_\varepsilon\int_{\mid u_n\mid\geqslant r_0}\frac{\mid u_n\mid^p}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x- \\
&\lambda C_\varepsilon r_0^{p-2}\int_{\mid u_n\mid<r_0}\mid\omega_n\mid^2\mathrm{d}x\to 1\qquad n\to\infty
\end{aligned}
$$

这显然是矛盾的，故序列$\{u_n\}$是有界的.

其次证明$\{u_n\}$在空间 H 中有一个强收敛的子列.

$$
\begin{aligned}
\|u_n-u\|^2=\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x+ \\
&\mu\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)(\mid u_n\mid^{s-2}u_n-\mid u\mid^{s-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x+2\omega\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\mathrm{d}x+ \\
&\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}^2u_n-\phi_u^2u)(u_n-u)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{10}
$$

由文献[14]中引理2.4的证明过程知

$$
\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle\to 0\qquad n\to\infty \tag{11}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty \tag{12}
$$

$$
2\omega\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty \tag{13}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}^2u_n-\phi_u^2u)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\qquad n\to\infty \tag{14}
$$

令

$$
\Gamma(u)=\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)(\mid u_n\mid^{s-2}u_n-\mid u\mid^{s-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x
$$

则

$$|\Gamma(u)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\alpha(x)|^{\frac{2}{2-s}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2-s}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(|u_n|^{s-2}u_n - |u|^{s-2}u)(u_n - u)|^{\frac{2}{s}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{2}} \leqslant$$

$$\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}(\|u_n\|_2^{s-1} + \|u\|_2^{s-1})\|u_n - u\|_2 \to 0 \qquad n \to \infty \tag{15}$$

故由(10)—(15)式知，在空间 H 中 $u_n \to u(n \to \infty)$.

引理 4　假设条件(V)，(F_1)—(F_4)及(A)成立，则泛函 $I(u)$ 满足如下山路结构：

(i) 对 $\forall\lambda > 0$，存在 $\overline{\mu}_\lambda > 0$，$\alpha > 0$，$\rho > 0$，使得对 $\forall\mu \in (-\overline{\mu}_\lambda, \overline{\mu}_\lambda)$，$I(u)|_{\|u\|=\rho} \geqslant \alpha > 0$，或对 $\forall\mu > 0$，存在 $\overline{\lambda}_\mu > 0$，$\alpha > 0$，$\rho > 0$，使得对 $\forall\lambda \in (0, \overline{\lambda}_\mu)$，$I(u)|_{\|u\|=\rho} \geqslant \alpha > 0$；

(ii) 对 $\forall\lambda > 0$，$\mu \in \mathbb{R}$，存在 $e \in H$ 满足 $\|e\| > \rho$，使得 $I(e) < 0$.

证　(i) 由(9)式及引理 1(i)知

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x - \frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1-\varepsilon\lambda S_2^2}{2}\|u\|^2 - \frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s - \lambda\frac{C_\varepsilon}{p}S_p^p\|u\|^p$$

取 $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2S_2^2\lambda}\right]$，则

$$I(u) \geqslant \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s - \lambda\frac{C_\varepsilon}{p}S_p^p\|u\|^p$$

令 $D = \dfrac{4}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s$，$E = \dfrac{4C_\varepsilon}{p}S_p^p$，取 $r = p$，则由引理 2 知，当 $A^{p-2}B^{2-s} < d(p,s)$ 时，有

$$I(u) \geqslant \frac{1}{4}\Psi_{A,B}(t_B) > 0$$

其中

$$A = |\mu|D > 0 \qquad B = \lambda E > 0 \qquad \|u\| = t_B = \left[\frac{2-s}{B(p-s)}\right]^{\frac{1}{p-2}}$$

$$d(p,s) = \frac{(p-2)^{p-2}(2-s)^{2-s}}{(p-s)^{p-s}}$$

即对 $\forall\lambda > 0$，当 $|\mu| < \dfrac{1}{D}(d(p,s)(\lambda E)^{s-2})^{\frac{1}{p-2}} = \overline{\mu}_\lambda$，或对 $\forall\mu > 0$，当 $\lambda < \dfrac{1}{E}(d(p,s)(\mu D)^{2-p})^{\frac{1}{2-s}} = \overline{\lambda}_\mu$ 时，$I(u) \geqslant \dfrac{1}{4}\Psi_{A,B}(t_B) > 0$. 令 $\alpha = \dfrac{1}{4}\Psi_{A,B}(t_B)$，$\rho = t_B$，则 $\alpha > 0$ 且 $I|_{\|u\|=\rho} \geqslant \alpha > 0$.

(ii) 因为

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x - \frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x$$

所以对 $\forall t > 0$，$u \in H\backslash\{0\}$，有

$$\frac{I(tu)}{t^2} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\omega^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s t^{s-2}\|u\|^s - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(x,tu)}{(tu)^2}u^2\mathrm{d}x$$

故由条件(F_4)及 Fatou 引理知

$$I(tu) \to -\infty \qquad t \to +\infty$$

因此存在 $t_0 > 0$，$e = t_0 u$，满足 $\|e\| > \rho$，使得 $I(e) < 0$.

引理 5 假设条件(V),(F_1)—(F_4)及(A)成立,则对$\forall\lambda>0$,$\mu\in\mathbb{R}$,有:

(i) 存在 $\alpha>0$,$\rho>0$,使得 $I|_{\partial B_\rho\cap Z_k}\geqslant\alpha$;

(ii) 对任意的有限维子空间 $\widetilde{E}\subset H$,存在 $R=R(\widetilde{E})>0$,使得 $I|_{\widetilde{E}\setminus B_R}\leqslant 0$.

证 (i) 在(9)式中取 $\varepsilon=\varepsilon_0>0$ 为某一给定的常数,则存在 $C_{\varepsilon_0}>0$,满足

$$|F(x,u)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}|u|^2+\frac{C_{\varepsilon_0}}{p}|u|^p \tag{16}$$

令 $\beta_k=\sup\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=1}\|u\|_p$,$2\leqslant p<6$,则 $\beta_k\to 0$,$k\to\infty$. 从而可知,存在 $k_1>1$,使得当 $k>k_1$ 时有

$$\|u\|_2^2\leqslant\frac{1}{2\lambda\varepsilon_0}\|u\|^2\qquad\forall u\in Z_k \tag{17}$$

因为 $1<s<2$,所以存在 $R_0>0$,使得当 $\|u\|\geqslant R_0$ 有

$$\frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s\leqslant\frac{1}{8}\|u\|^2 \tag{18}$$

由(16)—(18)式及引理1(i)知,$\forall u\in Z_k$,$\|u\|\geqslant R_0$,有

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\lambda\varepsilon_0}{2}\|u\|_2^2-\frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u\|^s-\frac{\lambda C_{\varepsilon_0}}{p}\|u\|_p^p\geqslant\\&\frac{1}{8}\|u\|^2-\frac{\lambda C_{\varepsilon_0}}{p}\beta_k^p\|u\|^p\end{aligned}$$

令 $\rho=(4\beta_k^p\lambda C_{\varepsilon_0})^{\frac{1}{2-p}}$,$\alpha=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4p}\right)\rho^2$,则 $\rho>0$,$\alpha>0$ 且 $\rho\to\infty$,$k\to\infty$. 从而存在 $k_2>1$,使得当 $k>k_2$ 时,$\rho>R_0$. 故当 $k>\max\{k_1,k_2\}$,$u\in Z_k$,$\|u\|=\rho$ 时,$I(u)\geqslant\alpha=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4p}\right)\rho^2>0$.

(ii) 设 $\widetilde{E}\subset H$ 是任一有限维子空间. 现利用反证法证明. 假设存在序列 $\{u_n\}\subset\widetilde{E}$ 满足 $\|u_n\|\to+\infty$,但 $I(u_n)>0$. 令 $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$,则 $\|v_n\|=1$. 因为 $\widetilde{E}\subset H$ 是有限维子空间,所以存在 $\{v_n\}$ 的一个子列(不失一般性,仍记之为 $\{v_n\}$)和 $v_0\in\widetilde{E}$,使得 $v_n\to v_0(x\in\widetilde{E})$,$\|v_0\|=1$. 故由条件($F_4$)及 Fatou 引理知

$$\begin{aligned}0<&\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2}=\\&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\omega\phi_{u_n}u_n^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha(x)|u_n|^s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}+\frac{\omega^2S_2^2}{2}-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x+\frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}=\\&\frac{1}{2}+\frac{\omega^2S_2^2}{2}-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^2}|v_n|^2\mathrm{d}x+\frac{|\mu|}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}S_2^s\|u_n\|^{s-2}\to-\infty\qquad n\to+\infty\end{aligned}$$

这显然是矛盾的,故存在 $R=R(\widetilde{E})>0$,使得 $I|_{\widetilde{E}\setminus B_R}\leqslant 0$.

引理 6 假设条件(V),(F_1)—(F_4)及(A)成立,则对$\forall\lambda>0$,$\mu>0$,存在 $k_0\in\mathbb{N}$,使得对每个 $k>k_0$,存在 $\rho_k>\gamma_k>0$ 且满足:

(i) $a_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=\rho_k}I(u)\geqslant 0$;

(ii) $b_k:=\max\limits_{u\in Y_k,\ \|u\|=\gamma_k}I(u)<0$;

(iii) $d_k := \inf_{u\in Z_k,\ \|u\|\leqslant\rho_k} I(u)\to 0,\ k\to+\infty$.

证　(i) 令 $\beta_k = \sup_{u\in Z_k,\ \|u\|=1}\|u\|_p,\ 2\leqslant p<6$，则 $\beta_k\to 0,\ k\to\infty$. 因为 $2<p<6$，所以存在 $R_1>0$，使得

$$\lambda\frac{C_\varepsilon S_p^p}{p}\|u\|^p\leqslant\frac{1}{4}\|u\|^2\qquad \|u\|\leqslant R_1 \tag{19}$$

由(3),(9),(19) 式及引理 1(i) 知，对 $\forall u\in Z_k$，有 $\|u\|\leqslant R_1$，

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1-\varepsilon\lambda S_2^2}{2}\|u\|^2-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\|u\|_2^s-\lambda\frac{C_\varepsilon}{p}S_p^p\|u\|^p\geqslant\\&\frac{1-2\varepsilon\lambda S_2^2}{4}\|u\|^2-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\end{aligned}$$

取 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{4S_2^2\lambda}\right]$，则

$$I(u)\geqslant\frac{1}{8}\|u\|^2-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s \tag{20}$$

令 $\rho_k=(8\beta_k^s\mu\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}})^{\frac{1}{2-s}}$，则 $\rho_k\to 0(k\to+\infty)$. 从而存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得当 $k>k_0$ 时，$\rho_k<R_1$. 故当 $k>k_0$，$u\in Z_k$，$\|u\|=\rho_k$ 时，

$$I(u)\geqslant\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8s}\right)\rho_k^2\geqslant 0$$

即(i) 成立.

(ii) 对 $\forall u\in Y_k$，$\delta>0$，令 $\Gamma_{\alpha,\delta}(u)=\{x\in\mathbb{R}^3:\alpha(x)|u|^s\geqslant\delta\|u\|^s\}$，由文献[4] 中定理 1.5 的证明过程可知，存在 $\varepsilon_1>0$ 使得 $\mathrm{meas}(\Gamma_{\alpha,\varepsilon_1}(u))\geqslant\varepsilon_1$.

故结合条件(F_4),(A),(9) 式及引理 1(i) 知，对 $\forall u\in Y_k$，有

$$\begin{aligned}I(u)=&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\,\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega\,\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{s}\int_{\Gamma_{\alpha,\varepsilon_1}(u)}\alpha(x)|u|^s\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1+\omega^2S_2^2}{2}\|u\|^2-\frac{\mu\varepsilon_1^2}{s}\|u\|^s\end{aligned}$$

因为 $1<s<2$，所以存在 $\gamma_k\in(0,\rho_k)$，使得当 $u\in Y_k$，$\|u\|=\gamma_k$ 时，$I(u)\leqslant 0$，即(ii) 成立.

(iii) 由(20) 式，对 $\forall u\in Z_k$，$\|u\|\leqslant\rho_k$，有

$$I(u)\geqslant\frac{1}{8}\|u\|^2-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\geqslant-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\|u\|^s\geqslant-\frac{\mu}{s}\|\alpha\|_{\frac{2}{2-s}}\beta_k^s\rho_k^s$$

因为 $\rho_k\to 0(k\to+\infty)$，所以 $\inf_{u\in Z_k,\ \|u\|\leqslant\rho_k} I(u)\to 0(k\to+\infty)$，即(iii) 成立.

定理 1 的证明　(i) 证明系统(1) 存在一个山路解. 由引理 4 知，对 $\forall\lambda>0$，存在 $\overline{\mu}_\lambda>0$，使得对 $\forall\mu\in(-\overline{\mu}_\lambda,\overline{\mu}_\lambda)$，泛函 I 满足山路定理的几何结构. 由引理 3 知，泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件. 因此由山路定理(见文献[27] 的定理 2.2) 知，存在 $u_0\in H$ 满足 $I'(u_0)=0$ 且 $I(u_0)>0$. 即系统(1) 存在一个山路解.

(ii) 首先证明系统(1) 存在一个山路解. 由引理 4 知，对 $\forall\lambda>0$，存在 $\overline{\mu}_\lambda>0$，使得对 $\forall\mu\in(0,\overline{\mu}_\lambda)$，泛函 I 满足山路定理的几何结构. 由引理 3 知，泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件. 因此由山路定理(见文献[27] 的定理

2.2) 知，存在 $u'_0 \in H$ 满足 $I'(u'_0)=0$ 且 $I(u'_0)>0$. 即系统(1) 存在一个山路解.

其次证明系统(1) 存在一个局部极小解. 由条件(A) 知，存在 $v \in H$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|v|^s \mathrm{d}x > 0$. 结合条件($F_4$) 及引理 1(i) 知，当 $\mu>0$，$t>0$ 充分小时，

$$I(tv) \leqslant \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + \frac{\omega^2 t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} v^2 \mathrm{d}x - \frac{\mu t^s}{s}\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|v|^s \mathrm{d}x < 0$$

因此 $c_0=\inf\{I(u): u \in \bar{B}_\rho\}<0$，其中 $B_\rho=\{u \in H: \|u\|<\rho\}$，$\rho$ 已由引理 4 给出. 利用 Ekeland 变分原理知，存在一个有界的极小化序列 $\{u_n\} \subset \bar{B}_\rho$，满足 $I(u_n) \to c_0$，$I'(u_n) \to 0 (n \to \infty)$. 故利用引理3知存在 $u_1 \in H$ 满足 $I'(u_1)=0$，$I(u_1)=c_0<0$.

(iii) 首先证明系统(1) 存在一个山路解. 由引理 4 知，对 $\forall \mu>0$，存在 $\bar{\lambda}_\mu>0$，使得对 $\forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}_\mu)$，泛函 I 满足山路定理的几何结构. 由引理 3 知，泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件. 因此由山路定理知，存在 $u''_0 \in H$ 满足 $I'(u''_0)=0$ 且 $I(u''_0)>0$. 即系统(1) 存在一个山路解.

其次证明系统(1) 存在一个局部极小解. 证明同(ii)，略去.

定理 2 的证明 由条件(F_5) 知泛函 I 是偶的. 结合引理 3 及引理 5 知，能量泛函 I 满足对称山路定理(见文献[27] 的定理 9.12) 的条件. 因此 I 有一列趋于 $+\infty$ 的临界值，即系统(1) 具有一列高能量解.

定理 3 的证明 由条件(F_5) 知泛函 I 是偶的. 结合引理 3 及引理 6 知，能量泛函 I 满足对偶喷泉定理(见文献[28] 的定理 3.18) 的条件. 故 I 有一列趋于 0 的负的临界值，即系统(1) 存在一列负能量解.

参考文献:

[1] BENCI V, FORTUNATO D F. Solitary Waves of the Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equations [J]. Reviews in Mathematical Physics, 2002, 14(4): 409-420.

[2] BENCI V, FORTUNATO D. The Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(9): 6065-6072.

[3] HE X M. Multiplicity of Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2014, 130(1): 237-250.

[4] LI L, TANG C L. Infinitely Many Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2014, 110: 157-169.

[5] DING L, LI L. Infinitely Many Standing Wave Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System with Sign-Changing Potential [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2014, 68(5): 589-595.

[6] CHE G F, CHEN H B. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with a Parameter [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2017, 54(3): 1015-1030.

[7] CHEN S T, TANG X H. Infinitely Many Solutions and Least Energy Solutions for Klein-Gordon-Maxwell Systems with General Superlinear Nonlinearity [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 75(9): 3358-3366.

[8] CHEN S J, LI L. Infinitely Many Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with Potentials Vanishing at Infinity [J]. Zeitschrift Für Analysis und Ihre Anwendungen, 2018, 37(1): 39-50.

[9] 张鲁豫. Klein-Gordon-Maxwell 系统的无穷多变号解 [J]. 应用数学学报, 2019, 42(6): 779-792.

[10] MOURA E L D, MIYAGAKI O H, RUVIARO R. Positive Ground State Solutions for Quasicritical Klein-Gordon-Maxwell Type Systems with Potential Vanishing at Infinity [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 2017(154): 1-11.

[11] MIYAGAKI O H, DE MOURA E L, RUVIARO R. Positive Ground State Solutions for Quasicritical the Fractional Klein-Gordon-Maxwell System with Potential Vanishing at Infinity [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2019,

64(2)：315-329.

[12] 段誉，孙歆，安育成. 具有变号位势的 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的多重性 [J]. 数学的实践与认识，2019，49(17)：219-226.

[13] XU L P，CHEN H B. Existence and Multiplicity of Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2015，2015(102)：1-12.

[14] SHI H X，CHEN H B. Multiple Positive Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Applied Mathematics and Computation，2018，337：504-513.

[15] 陈丽珍，李安然，李刚. 带有次线性项和超线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统多重解的存在性 [J]. 数学物理学报，2017，37(4)：663-670.

[16] 谢苏静，黄文念. 一类 Klein-Gordon-Maxwell 方程无穷多解的存在性 [J]. 高校应用数学学报(A 辑)，2018，33(3)：315-323.

[17] CHEN S J，SONG S Z. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations on $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2015，22：259-271.

[18] WANG L X，CHEN S J. Two Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell System with Sign-Changing Potential [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2018，2018(124)：1-21.

[19] LIU X Q，CHEN S J，TANG C L. Ground State Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with Steep Potential Well [J]. Applied Mathematics Letters，2019，90：175-180.

[20] GAN C L，XIAO T，ZHANG Q F. Improved Results of Nontrivial Solutions for a Nonlinear Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell System Involving Sign-Changing Potential [J]. Advances in Difference Equations，2020，167：1-16.

[21] WU D L，LIN H X. Multiple Solutions for Superlinear Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Mathematische Nachrichten，2020，293(9)：1827-1835.

[22] WEI C Q，LI A R. Existence and Multiplicity of Solutions for Klein-Gordon-Maxwell Systems with Sign-Changing Potentials [J]. Advances in Difference Equations，2019，72：1-11.

[23] 段誉，孙歆，安育成. 一般超线性项的 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的多重性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(12)：13-19.

[24] 廖坤，段春生，李麟，等. 具有变号位势的 Klein-Gordon-Maxwell 系统孤立波的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(5)：89-93.

[25] 陈尚杰，李麟. 一类 $\mathbb{R}^3$ 上非齐次 Klein-Gordon-Maxwell 方程解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(4)：35-39.

[26] DE FIGUEIREDO D G. Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems [M]. Berlin：Springer-Verlag，1982.

[27] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，1986.

[28] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston：Birkhauser，1996.

责任编辑　廖坤