DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.08.007

随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程的后向紧随机吸引子①

乔闪闪, 李扬荣

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要:本文主要研究非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程. 在外力是后向缓增的情况下,首先通过对解的估计,证明了 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程在空间 ℓ^2 上存在随机吸收集,从而推出后向一致吸收集的存在性. 其次,证明了格点方程在吸收集上是后向渐近紧的. 最后再利用吸引子的存在性定理,证明了非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程在空间 ℓ^2 上存在后向紧随机吸引子.

关 键 词:Kuramoto-Sivashinsky 格点方程;乘性噪音;后向紧随机吸引子

中图分类号:O193 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2022)08-0048-06

Backward Compact Random Attractors for Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Lattice Equation

QIAO Shanshan, LI Yangrong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: It is mainly used to study the non-autonomous random Kuramoto-Sivashinsky lattice equation in the case that the external force is backward slowly increasing. First, by estimating the solution, it is proved that the Kuramoto-Sivashinsky lattice equation has random absorption set on the space ℓ^2, then deduce the existence of the backward uniform absorption set. Secondly, it is proved that the lattice equation is asymptotically backward compact on the absorption set. Finally, by means of the existence theorem of the attractor, it is proved that the non-autonomous random Kuramoto-Sivashinsky lattice equation has a backward compact random attractor on the space ℓ^2.

Key words: Kuramoto-Sivashinsky lattice equations; multiplicative noise; backward compact random attractors

① 收稿日期:2021-12-10
基金项目:国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介:乔闪闪,硕士研究生,主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.
通信作者:李扬荣,博士生导师,教授.

文献[1-4]对 Kuramoto-Sivashinsky 方程的吸引子进行了研究，并建立了相对完善的理论体系. 文献[5-9]对非自治动力系统的拉回吸引子的存在性与后向紧性做了研究. 文献[10-11]研究了非自治格系统吸引子的后向紧性. 本文将研究具有乘性噪音的 Kuramoto-Sivashinsky 方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_i+[\upsilon(u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2})+(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+\\ u_i(u_{i+1}-u_i)+\lambda u_i+\beta\mid u_i\mid u_i]\mathrm{d}t=g_i(t)\mathrm{d}t+u_i\mathrm{d}W\\ u_i(\tau)=u_{0,i}\qquad i\in\mathbb{Z}\end{cases}\tag{1}$$

的空间离散化. 其中 $\mathbb{Z}$ 代表整数集，$\upsilon>0$，$\lambda>8$，$\beta>2$，W 是完备概率空间$(\Omega,\widetilde{\mathscr{F}},P)$上的双边实值 Wiener 过程，$\Omega=\{\omega\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}):\omega(0)=0\}$，$\widetilde{\mathscr{F}}$是由 Ω 的紧开拓朴生成的σ-代数，P 是在$(\Omega,\widetilde{\mathscr{F}})$上相应的 Wiener 测度. 对于非自治项 $g=(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，有如下假设条件：

(G) $g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\ell^2)$，且满足

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\gamma(r-s)}\parallel g(r)\parallel^2\mathrm{d}r<\infty\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R},\ \gamma>0\tag{2}$$

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\sum_{|i|\geqslant K}\mid g_i(r)\mid^2\mathrm{d}r=0\qquad\forall\,s,\tau\in\mathbb{R}\tag{3}$$

本文主要研究随机 Kuramoto-Sivashinsky 格方程的后向紧随机吸引子.

1　非自治随机动力系统

为了方便，定义 ℓ^2 上的有界算子

$$(Bu)_i=u_{i+1}-u_i\qquad(B^*u)_i=u_{i-1}-u_i\qquad(Au)_i=-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}\qquad\forall\,u\in\ell^2$$

其中涉及的三线性形式为

$$u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2\qquad v=(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2\qquad\omega=(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^2$$

$$b(u,v,\omega)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}u_i(Bv)_i\omega_i$$

微分方程(1)可整理为

$$\begin{cases}\mathrm{d}u+[\upsilon A^2u-Au+uBu+\lambda u+\beta\mid u\mid u]\mathrm{d}t=g(t)\mathrm{d}t+u\mathrm{d}w\\ u(\tau)=u_0\in\ell^2\end{cases}\tag{4}$$

下面证明方程(4)能生成随机动力系统.

做变量替换 $v(t)=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}u(t)$. 其中 $u(t)$ 是方程(4)的解，$z(\theta_t\omega)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{r}\theta_t\omega(r)\mathrm{d}r$ 是方程

$$\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t=\mathrm{d}W(t)$$

的稳态解. 由文献[10,12]可知，对任意 $\omega\in\Omega$，$z(\theta_t\omega)$关于 t 连续，且满足

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\mid z(\theta_t\omega)\mid}{\mid t\mid}=0\qquad\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\mid\omega(t)\mid}{\mid t\mid}=0\qquad\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=0\tag{5}$$

因此方程(4)可转化为关于 v 的随机微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\upsilon A^2v-Av+\mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}vBv+\lambda v+\beta\mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}\mid v\mid v=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}g+z(\theta_t\omega)v\\ v(\tau)=v_0\end{cases}\tag{6}$$

由文献[1]和 Galevkin 逼近法，容易证明对任意 $T>0$，$v_0\in\ell^2$，$\omega\in\Omega$，方程(6)存在唯一的解 $v(\cdot,\tau,\omega,v_0)\in C([\tau,+\infty),\ell^2)$，且依赖初值 v_0 连续. 因此方程(6)在$(\Omega,\mathscr{F},P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$上能生成一个连续的随机动力系统$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant0}$，即对 $v_0\in\ell^2$，$t\geqslant0$，$\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$，有

$$\Phi(t,\tau,\omega,v_0)=v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,v_0)$$

2　解的估计

在下文中，设 $\mathscr{D}_0$ 是 X 中所有缓增集构成的集合，$\mathscr{D}$ 是 X 中所有后向缓增集构成的集合. 若集合 D 满足

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} \sup_{s\leqslant\tau} \| D(s-t, \theta_{-t}\omega) \|_X^2 = 0 \qquad \forall \gamma > 0, \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega \tag{7}$$

则称集合 D 为后向缓增集.

引理 1 若条件(G)成立，则对任意后向缓增集 $D \in \mathscr{D}$，$\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，存在 $T = T(D, \tau, \omega) \geqslant 1$，使得 $t \geqslant T$ 且 $v_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-t}\omega)$，有

$$\sup_{s\leqslant\tau} \sup_{t\geqslant T} \| v(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2 \leqslant 1 + R(\tau, \omega) \tag{8}$$

成立，其中

$$R_0(\tau, \omega) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(r+s) \|^2 \mathrm{d}r$$

$$R(\tau, \omega) = \sup_{s\leqslant\tau} R_0(s, \omega) < +\infty \tag{9}$$

证 对任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$v_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-t}\omega)$，令

$$v(r) = v(r, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})$$

其中 $s \leqslant \tau$. $v(r)$ 与方程(6)做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\| v \|^2 + 2\nu \| Av \|^2 - 2\| Bv \|^2 + 2\lambda \| v \|^2 \leqslant 2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(vBv, v) - 2\beta \mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(|v|v, v) + 2\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-s}\omega)}(g, v) + 2z(\theta_{r-s}\omega)(v, v)$$

其中

$$2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(vBv, v) = 2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)} \sum_i ((v_i)^2(v_{i+1} - v_i)) \leqslant 4\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)} \| v \|_3^3 \tag{10}$$

$$2\beta \mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(|v|v, v) = 2\beta \mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)} \| v \|_3^3 \tag{11}$$

利用 Young 不等式，有

$$2\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-s}\omega)}(g, v) \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)} \| g \|^2 + \lambda \| v \|^2 \tag{12}$$

由文献[11]知 $\| Bv \| \leqslant 2\| v \|$，故 $2\| Bv \|^2 \leqslant 8\| v \|^2$. 又由(10),(11),(12)式以及 Young 不等式，整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\| v(r) \|^2 \leqslant (-\lambda + 8 + 2z(\theta_{r-s}\omega))\| v \|^2 + \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)} \| g \|^2 \tag{13}$$

对(13)式利用 Gronwall 不等式，计算可得

$$\begin{aligned}
\| v(s) \|^2 \leqslant{}& \mathrm{e}^{(-\lambda+8)t+2\int_{-t}^0 z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r} \| v_{s-t} \|^2 + \frac{1}{\lambda}\int_{s-t}^{s} \mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)+(\lambda-8)(r-s)+2\int_r^s z(\theta_{\sigma-s}\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(r) \|^2 \mathrm{d}r = \\
& \mathrm{e}^{-(\lambda-8)t+2\int_{-t}^0 z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r} \| v_{s-t} \|^2 + \frac{1}{\lambda}\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(r+s) \|^2 \mathrm{d}r \leqslant \\
& \mathrm{e}^{-(\lambda-8))t+2\int_{-t}^0 z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r} \| v_{s-t} \|^2 + \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} \| g(r+s) \|^2 \mathrm{d}r = \\
& \mathrm{e}^{-(\lambda-8)t+2\int_{-t}^0 z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r} \| v_{s-t} \|^2 + R_0(s, \omega)
\end{aligned} \tag{14}$$

对(14)式关于 $s \in (-\infty, \tau]$ 取上确界，由于 $v_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-t}\omega)(s \leqslant \tau)$，结合(5),(7)式可知，存在 $T = T(s, \omega, D) \geqslant 1$，使得当 $t \geqslant T$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant\tau} \mathrm{e}^{-(\lambda-8)t+2\alpha\int_{-t}^0 z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r} \| v_{s-t} \|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda-8)}{2}t} \sup_{s\leqslant\tau} \| D(s-t, \theta_{-t}\omega) \|^2 \leqslant 1 \tag{15}$$

因此可以得到

$$\sup_{s\leqslant\tau} \| v(s) \|^2 \leqslant 1 + \sup_{s\leqslant\tau} R_0(s, \omega) = 1 + R(\tau, \omega) \tag{16}$$

即(8)式得证.

命题 1 若条件(G)成立，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$(\tau, \omega, D) \in (\mathbb{R} \times \Omega \times \mathscr{D})$，$v_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-t}\omega)$，存在 $T(\varepsilon, \tau, \omega, D) > 0$，$K(\varepsilon, \tau, \omega, D) \geqslant 1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>K}|v_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})|^2<\varepsilon^2\qquad\forall t>T$$

证　构造光滑函数 ρ，满足 $0\leqslant\rho\leqslant 1$，且当 $|s|\leqslant 1$ 时 $\rho=0$，当 $|s|\geqslant 2$ 时 $\rho=1$. 假设存在常数 c_0，使得对任意 $s\in\mathbb{R}$，有 $|\rho'(s)|\leqslant c_0$. 令 K 是一个固定的整数，设

$$\psi=\left(\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)v_i(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\right)_{i\in\mathbb{Z}}$$

ψ 与方程(6) 做内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^2\leqslant-2\upsilon(A^2v,\psi)+2(Av,\psi)+2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(vBv,\psi)-2\lambda\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^2-$$
$$2\beta\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(|v|v,\psi)+2\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-s}\omega)}(g,\psi)+2z(\theta_{r-s}\omega)(v,\psi)$$

其中

$$2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(vBv,\psi)=2\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)v_i^2(v_{i+1}-v_i)\leqslant 4\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\|v\|_3^3\tag{17}$$

$$2\beta\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}(|v|v,\psi)=2\beta\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^3\leqslant 2\beta\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\|v\|_3^3\tag{18}$$

$$2\upsilon(A^2v,\psi)=$$
$$2\upsilon\sum_i(v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})(\psi_{i-1}-2\psi_i-\psi_{i+1})\leqslant 2\upsilon\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)(v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})^2+$$
$$2\upsilon\left\{\sum_i\left[\rho\left(\frac{|i+1|}{K}\right)-\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)\right](v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})v_{i+1}-\sum_i\left[\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)-\rho\left(\frac{|i-1|}{K}\right)\right](v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})v_{i-1}\right\}$$

由于 $|\rho'(s)|\leqslant c_0$，因此

$$\left|2\upsilon\left\{\sum_i\left[\rho\left(\frac{|i+1|}{K}\right)-\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)\right](v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})v_{i+1}-\sum_i\left[\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)-\rho\left(\frac{|i-1|}{K}\right)\right](v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})v_{i-1}\right\}\right|\leqslant$$
$$\frac{16\upsilon c_0}{K}\|v\|^2$$

$$2\upsilon(Av,A\psi)\geqslant-\frac{16\upsilon c_0}{K}\|v\|^2\tag{19}$$

$$2(Av,\psi)=2(Bv,B\psi)=2\sum_i(v_{i+1}-v_i)(\psi_{i+1}-\psi_i)\leqslant\frac{8c_0}{K}\|v\|^2+2\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^2\tag{20}$$

由 Young 不等式可知

$$2\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)g_iv_i=\sum_{|i|\geqslant K}\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)g_iv_i\leqslant\lambda\sum_{|i|\geqslant K}|v_i|^2+\frac{1}{\lambda}\sum_{|i|\geqslant K}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)}|g_i|^2\tag{21}$$

由(17)－(21) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^2+(\lambda-8-2z(\theta_{r-s}\omega))\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^2+(2\beta-4)\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v_i|^3\leqslant$$
$$\frac{16\upsilon c_0+8c_0}{K}\|v\|^2+\frac{c_0}{K}\mathrm{e}^{z(\theta_{r-s}\omega)}\|v\|_3^3+\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_{|i|\geqslant K}|g_i|^2\tag{22}$$

对(22) 式运用 Gronwall 引理，计算整理可得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{K}\right)|v(s)|^2\leqslant\sup_{s\leqslant\tau}\|v_0\|^2\mathrm{e}^{-(\lambda-8)t+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}+$$
$$\frac{16\upsilon c_0+8c_0}{K}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0\mathrm{e}^{(\lambda-8)r+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|v(r+s)\|^2\mathrm{d}r+$$
$$\frac{c_0}{K}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0\mathrm{e}^{z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|v(r+s)\|_3^3\mathrm{d}r+$$

$$\frac{1}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>K}\int_{-t}^{0}|g_i(r+s)|^2 e^{-2z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma}dr \tag{23}$$

根据(5)式可知，对$\forall\varepsilon>0$，存在$C=C(\varepsilon,\omega)>0$，使得

$$|z(\theta_r\omega)|+\left|\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma\right|\leqslant-\varepsilon r+C(\varepsilon,\omega)\qquad\forall r<0 \tag{24}$$

由于$v_{s-t}\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)(s\leqslant\tau)$，因此，在(24)式中令$\varepsilon<\dfrac{\lambda-8}{4}$，结合(5),(7)式可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}e^{-(\lambda-8)t+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma}\|v_{s-t}\|^2\leqslant\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}e^{-\frac{(\lambda-8)t}{2}}\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2=0 \tag{25}$$

由引理1与条件(G)可知，存在$T>0$，当$t>T$时有

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{16\upsilon c_0+8c_0}{K}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 e^{(\lambda-8)r+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma}\|v(r+s)\|^2dr\leqslant$$

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{16\upsilon c_0+8c_0}{K}e^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 e^{\frac{(\lambda-8)r}{2}}\|v(r+s)\|^2dr=0 \tag{26}$$

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{c_0}{K}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 e^{z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma}\|v(r+s)\|_3^3dr\leqslant$$

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{c_0}{K}e^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 e^{\frac{(\lambda-8)r}{2}}\|v(r+s)\|_3^3dr=0 \tag{27}$$

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>K}\int_{-t}^0 e^{-2z(\theta_r\omega)+(\lambda-8)r+2\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)d\sigma}|g_i(r+s)|^2dr\leqslant$$

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>K}\int_{-t}^0 e^{\frac{(\lambda-8)r}{2}}|g_i(r+s)|^2dr=0 \tag{28}$$

因此，结合(26)－(28)式可得，对$\forall\varepsilon>0$，$(\tau,\omega,D)\in(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathscr{D})$，$v_{s-t}\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)$，存在$T(\varepsilon,\tau,\omega,D)>0$，$K(\varepsilon,\tau,\omega,D)\geqslant1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>K}|v_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})|^2<\varepsilon^2\qquad\forall t>T$$

3　后向紧随机吸引子

定理1　若条件(G)成立，则方程(1)生成的动力系统存在后向紧随机吸引子.

证　$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant0}$满足文献[13]中定理3.9的拉回吸引子的两个存在性条件：

(i) 非自治动力系统$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant0}$存在$\mathscr{D}_0$-拉回随机吸收集$\mathscr{K}_0\in\mathscr{D}_0$，其中

$$\mathscr{K}_0(\tau,\omega)=\{w\in\ell^2:\|w\|^2\leqslant1+R_0(\tau,\omega)\}\qquad\forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$$

(ii) 非自治动力系统$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant0}$存在$\mathscr{D}$-拉回后向一致吸收集$\mathscr{K}\in\mathscr{D}$，其中

$$\mathscr{K}(\tau,\omega)=\{w\in\ell^2:\|w\|^2\leqslant1+R(\tau,\omega)\}=\overline{\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{K}_0(s,\omega)}\qquad\forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$$

由文献[6]可得非自治动力系统$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant0}$在吸收集$\mathscr{K}\in\mathscr{D}$上是后向紧的.

又因为随机吸引子的后向并是预紧的，则称该吸引子为后向紧随机吸引子. 因此方程(6)生成的非自治随机动力系统$\Phi(t)$存在唯一的后向紧$\mathscr{D}$-拉回吸引子$\mathscr{A}\in\mathscr{D}$和唯一的可测$\mathscr{D}_0$-拉回吸引子$\mathscr{A}_0\in\mathscr{D}_0$. 再由文献[12]的定理6.1知$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$，故吸引子$\mathscr{A}$也是随机的，即$\Phi(t)$存在唯一的后向紧$\mathscr{D}$-拉回随机吸引子$\mathscr{A}\in\mathscr{D}$. 再由文献[14-15]知方程(1)与(6)生成的随机动力系统共轭，从而可知方程(1)存在后向紧随机吸引子.

参考文献：

[1]　程银银，李扬荣. 带可乘白噪音的广义Kuramoto-Sivashinsky方程的随机吸引子[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(10)：26-30.

[2]　YANG D S. Random Attractors for the Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Equation [J]. Stochastic Analysis and Applica-

tions，2006，24(6)：1285-1303.
[3] 沈晓鹰，马巧珍. 非自治 Kuramoto-Sivashinsky 方程一致吸引子的存在性、一致有界性和收敛性 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2016，50(2)：168-173.
[4] LI Y R，YANG S，ZHANG Q H. Odd Random Attractors for Stochastic Non-autonomous Kuramoto-Sivashinsky Equations without Dissipation [J]. Electronic Research Archive，2020，28(4)：1529-1544.
[5] 范红瑞，王仁海，李扬荣，等. 非自治的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的拉回吸引子的后项紧性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(3)：95-100.
[6] 宋立，李扬荣. 非自治随机 p-Laplacian 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(4)：92-99.
[7] YIN J Y，LI Y R，GU A H. Backwards Compact Attractors and Periodic Attractors for Non-Autonomous Damped Wave Equations on an Unbounded Domain [J]. Computers and Mathematics with Applications，2017，74(4)：744-758.
[8] WANG R H，LI Y R. Regularity and Backward Compactness of Attractors for Non-Autonomous Lattice Systems with Random Coefficients [J]. Applied Mathematics and Computation，2019，354：86-102.
[9] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.
[10] BATES P W，LISEI H，LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems [J]. Stochastics and Dynamics，2006，6(1)：1-21.
[11] WANG R H. Long-Time Dynamics of Stochastic Lattice Plate Equations with Nonlinear Noise and Damping [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations，2021，33(2)：767-803.
[12] DAMASCELLI L. Comparison Theorems for Some Quasilinear Degenerate Elliptic Operators and Applications to Symmetry and Monotonicity Results [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré (Analyse Non Linéaire Analysis)，1998，15(4)：493-516.
[13] WANG S L，LI Y R. Longtime Robustness of Pullback Random Attractors for Stochastic Magneto-Hydrodynamics Equations [J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2018，382：46-57.
[14] CARABALLO T，LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems with a Multiplicative Noise [J]. Frontiers of Mathematics in China，2008，3(3)：317-335.
[15] DUAN J Q，LU K N，SCHMALFUSS B. Invariant Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations [J]. The Annals of Probability，2003，31(4)：2109-2135.

责任编辑　廖坤