DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.09.001

# 对称群 $S_n(17\leqslant n\leqslant 19)$ 的一个新刻画[①]

李梦瑶[1]， 杨国川[2]， 晏燕雄[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 208 水文地质工程地质队，重庆 400700

**摘要**：有限群的数量性质对群结构的影响一直是有限群研究领域的热点. 该文研究了群中某些特殊元的阶对有限群结构的影响. 特别地，研究了群的阶和某些特殊元素的阶对对称群的影响，并成功刻画了对称群 $S_n(17\leqslant n\leqslant 19)$.

**关 键 词**：有限群；群的阶；对称群；元素的阶

**中图分类号**：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2022)09-0001-04

# A New Characterization of Symmetric Group $S_n(17\leqslant n\leqslant 19)$

LI Mengyao[1]， YANG Guochuan[2]， YAN Yanxiong[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. 208 Hydrogeology Engineering Geology Team，Chongqing 400700，China

**Abstract**: It has been a hot topic that the quantitative properties of a finite group have an influence on the structure of a finite group. In this article, the influence of order of some special elements on structure of group has been studied. In particular, this paper studied the effect of the group and the order of some special elements on the symmetric group. The symmetric groups $S_n(17\leqslant n\leqslant 19)$ have been successfully characterized.

**Key words**: finite group; order of finite group; symmetric group; order of element

本文涉及的群均为有限群. 设 $G$ 是有限群,

$$\pi_e(G)=\{|x|: x\in G\}$$

另外，$m_i(G)$ 表示群 $G$ 的第 $i$ 高阶元素的阶,

$$m_1(G)=\max\{|g|: g\in G\}$$

$G_p$ 表示群 $G$ 的一个 Sylow $p$-子群. $p^\alpha \parallel |G|$ 表示 $p^\alpha \mid |G|$ 但 $p^{\alpha+1}\nmid |G|$，其中 $\alpha$ 是非负整数. 其他未说明的符号和术语都是标准的(见文献[1]).

众所周知，利用群的数量性质研究群结构一直是群论研究的热点，而如何用尽可能少的数量关系来刻画群的结构是群论研究中非常有意义的课题. 群的阶和群中元素的阶(简称两阶)是群的两个最基本的数量条件，这两个数量关系对群结构有着非常重要的影响. 关于该问题，施武杰教授在20世纪80年代提出过如下猜想(这一猜想被列入文献[2]中)：

---

① 收稿日期：2022-01-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11971391,12071376)；中央高校基本业务费项目(XDJK2019B030)；重庆市自然科学基金项目(cstc2021jcyj-msxmX0426).

作者简介：李梦瑶，硕士研究生，主要从事有限群的研究.

通信作者：晏燕雄，副教授.

**猜想** 设 $G$ 为有限群，$H$ 为有限非交换单群，则 $G\cong H$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\pi_e(H)$ 且 $|G|=|H|$.

该猜想被文献[3]最终证明. 此后，许多群论学者尝试弱化两阶的条件来刻画群的结构. 例如，文献[4-10]提出用群的阶以及最高阶元素的阶刻画有限单群，并成功刻画了散在单群、$K_3$-单群、$K_4$-单群、部分李型单群、部分交错群 $A_n(5\leqslant n\leqslant 13)$ 及对称群 $S_n(5\leqslant n\leqslant 7)$. 文献[11]用群的阶以及最高阶元素的阶刻画了部分 $K_5$-单群. 文献[12]证明了群 $G$ 的同阶交换子群的个数之集为$\{1,3\}$等价于群 $G$ 的同阶子群的个数之集为$\{1,3\}$. 文献[13]讨论了与最高阶元素有关的几个数量条件对 Conway 单群和 Fischer 单群的结构的影响. 文献[14]讨论了最高阶元素个数为 $6p^2q$ 的有限群. 文献[15]用群的阶以及 $m_i(G)(i=1,2,3)$ 刻画了对称群 $S_n(8\leqslant n\leqslant 15)$.

本文将继续上述相关问题的研究，研究群的某些特殊高阶元素的阶对群结构的影响，主要结果如下：

**定理 1** 设 $G$ 是有限群，$G\cong S_{17}$ 当且仅当

(i) $|G|=|S_{17}|$;

(ii) $m_i(G)=m_i(S_{17})(i=1,2,3)$.

**定理 2** 设 $G$ 是有限群，$G\cong S_{18}$ 当且仅当

(i) $|G|=|S_{18}|$;

(ii) $m_i(G)=m_i(S_{18})(i=1,2,3,4)$.

**定理 3** 设 $G$ 是有限群，$G\cong S_{19}$ 当且仅当

(i) $|G|=|S_{19}|$;

(ii) $m_i(G)=m_i(S_{19})(i=1,2)$.

**定理 1 的证明**

必要性显然，下面只证充分性.

由文献[16]得

$$|G|=2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$$

$$m_1(G)=210 \qquad m_2(G)=140 \qquad m_3(G)=120$$

步骤 1 证明 $G$ 有一个正规群列 $1\trianglelefteq N\triangleleft M\trianglelefteq G$，使得 $M/N$ 为非交换单群，且 $11\cdot 17\mid |M/N|$.

设

$$G=G_0\trianglerighteq G_1\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_{n-1}\trianglerighteq G_n=1$$

为 $G$ 的主群列，则存在 $i$，使得

$$\pi(G_i)\cap\{11,17\}\neq\varnothing \qquad \pi(G_{i+1})\cap\{11,17\}=\varnothing$$

设 $M=G_i$，$N=G_{i+1}$，则 $G\trianglerighteq M\triangleright N\trianglerighteq 1$ 为群 $G$ 的正规列，且 $M/N$ 为 $G/N$ 的极小正规子群.

断言$\{11,17\}\subseteq\pi(M)$. 若否，设 $11\notin\pi(M)$，$17\in\pi(M)$，则 $11\in\pi(G/M)$. 令

$$M_{17}\in \mathrm{Syl}_{17}(M) \qquad G_{11}\in \mathrm{Syl}_{11}(G)$$

则 $G_{11}$ 可共轭作用在 $M$ 上. 由文献[17]的引理 8.3.1 可知 $M$ 中存在 $G_{11}$-不变的 Sylow 17-子群 $M_{17}$，则

$$|G_{11}/C_{G_{11}}(M_{17})|\mid|\mathrm{Aut}(M_{17})| \qquad 11\in\pi(C_{G_{11}}(M_{17}))$$

故 $187\in\pi_e(G)$，矛盾于 $m_2(G)=140$. 于是 $11\in\pi(M)$.

同理可证，不存在 $11\in\pi(M)$，且 $17\notin\pi(M)$. 因此$\{11,17\}\subseteq\pi(M)$.

下证 $M/N$ 为非交换单群.

因为

$$\{11,17\}\subseteq\pi(M) \qquad \pi(N)\cap\{11,17\}=\varnothing$$

故

$$\{11,17\}\subseteq\pi(M/N)$$

$M/N$ 为 $G/N$ 的极小正规子群，且 $17\mid|G|$，故 $M/N$ 必为非交换单群，且 $11\cdot 17\mid|M/N|$.

步骤 2 证明 $M/N\cong A_{17}$.

由步骤 1 知 $M/N$ 为非交换单群，$|M/N|\mid|S_{17}|$ 且 $11\cdot 17\mid|M/N|$,

$$|G|=2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$$

由文献[16]知 $M/N\cong A_{17}$.

步骤 3　证明 $G\cong S_{17}$.

若 $M/N\cong A_{17}$，由文献[15]的引理 2 知 $G$ 中存在正规子群 $C$，使得

$$A_{17}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{17})$$

即 $A_{17}\lesssim G/C\lesssim S_{17}$. 从而可知 $|C|=2,1$.

若 $|C|=2$，则 $G/C\cong A_{17}$. 故 $G\cong 2\times A_{17}$，或 $G\cong 2\cdot A_{17}$，则 $m_3(G)=126$. 这与 $m_3(G)=120$ 相矛盾.

若 $|C|=1$，则 $G/C\cong S_{17}$，即 $G\cong S_{17}$.

综上所述，定理 1 得证.

**定理 2 的证明**

必要性显然，下面只证充分性.

由条件知

$$|G|=2^{16}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$$

$$m_1(G)=210\qquad m_2(G)=180\qquad m_3(G)=168\qquad m_4(G)=140$$

类似于定理 1 的证明可以得到，$G$ 有一个正规群列 $1\trianglelefteq N\triangleleft M\trianglelefteq G$，使得 $M/N$ 为非交换单群，且 $11\cdot 17\mid |M/N|$. 由文献[16]知 $M/N\cong A_{17},A_{18}$.

若 $M/N\cong A_{17}$，由文献[15]的引理 2 知，$G$ 中存在正规子群 $C$，使得 $A_{17}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{17})$. 从而 $|C|=2^2\cdot 3^2,2\cdot 3^2$. 故 $C$ 有特征群列

$$1\ \mathrm{char}\ D_1\ \mathrm{char}\ D_2\ \mathrm{char}\ \cdots\ \mathrm{char}\ D_n=C$$

使得 $D_i/D_{i-1}$ 为初等交换群，其中 $D_{i-1}$ 为 $D_i$ 的极大正规子群. 从而一定存在 $i$，使得 $|D_i/D_{i-1}|=3,3^2$. 于是

$$G/D_{i-1}/C_{G/D_{i-1}}(D_i/D_{i-1})\lesssim \mathrm{Aut}(D_i/D_{i-1})$$

则

$$|G/D_{i-1}/C_{G/D_{i-1}}(D_i/D_{i-1})|\,\big|\,|\mathrm{Aut}(D_i/D_{i-1})|$$

由

$$G/C\cong G/D_{i-1}/C/D_{i-1}$$

可得 $G/D_{i-1}$ 包含 $A_{17}$ 这个截断. 由 $A_{17}$ 有 55 阶元，且

$$|G/D_{i-1}/C_{G/D_{i-1}}(D_i/D_{i-1})|\,\big|\,|\mathrm{Aut}(D_i/D_{i-1})|$$

可得 $C_{G/D_{i-1}}(D_i/D_{i-1})$ 有 55 阶元. 故 $G$ 有 165 阶元，这与 $m_4(G)=140$ 矛盾.

若 $M/N\cong A_{18}$，由文献[15]的引理 2 知，存在 $C\trianglelefteq G$ 使得

$$A_{18}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_{18})$$

即 $A_{18}\lesssim G/C\lesssim S_{18}$. 此时 $|C|=2,1$.

如果 $|C|=2$，则 $G/C\cong A_{18}$，从而 $G\cong 2\times A_{18}$，$2\cdot A_{18}$，这时 $m_4(G)=154$，矛盾.

如果 $|C|=1$，则 $G/C\cong S_{18}$，即 $G\cong S_{18}$.

综上所述，定理 2 得证.

**定理 3 的证明**

必要性是显然的，下面只证充分性.

已知

$$|G|=2^{16}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$$

$$m_1(G)=420\qquad m_2(G)=210$$

类似于定理 1 的推理知，$G$ 有一个正规群列 $1\trianglelefteq N\triangleleft M\trianglelefteq G$，使得 $M/N$ 为非交换单群，且 $17\cdot 19\,\big|\,|M/N|$，其中 $19=\max\{p:p\in\pi(M/N)\}$，由文献[16]知，$M/N\cong A_{19},J_3$.

若 $M/N\cong J_3$，由文献[15]的引理 2 知，存在 $G$ 的正规子群 $C$，使得

$$J_3 \lesssim G/C \lesssim \mathrm{Aut}(J_3)$$

从而

$$|C| = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

或

$$|C| = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

令

$$C_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(C) \qquad G_{19} \in \mathrm{Syl}_{19}(G)$$

从而 $G_{19}$ 可共轭作用在 $C$ 上. 由文献[17]的引理 8.3.1 可知 $C$ 中存在 $G_{19}$ -不变的 Sylow 13 -子群 $C_{13}$，则

$$|G_{19}/C_{G_{19}}(C_{13})| \,\big|\, |\mathrm{Aut}(C_{13})| \qquad 19 \in \pi(C_{G_{19}}(C_{13}))$$

故 $247 \in \pi_e(G)$，这与 $m_2(G)=210$ 矛盾，故$M/N \ncong J_3$，于是 $M/N \cong A_{19}$. 由文献[15]的引理 2 可知，$G$ 中存在正规子群 $C$，使得

$$A_{19} \lesssim G/C \lesssim \mathrm{Aut}(A_{19})$$

即 $A_{19} \lesssim G/C \lesssim S_{19}$，这时 $|C|=2,1$.

如果 $|C|=2$，则 $G/C \cong A_{19}$. 故 $G \cong 2 \times A_{19}, 2 \cdot A_{19}$，从而 $m_2(G)=330$，这与 $m_2(G)=210$ 相矛盾.

如果 $|C|=1$，则 $G \cong S_{19}$.

综上所述，定理 3 得证.

**注** 定理 1 中的 $m_3(G)$ 不能缺少，否则 $G \cong 2 \times A_{17}, 2 \cdot A_{17}$；定理 2 中的 $m_3(G)$ 与 $m_4(G)$ 不能缺少，否则 $G \cong 2 \times A_{18}, 2 \cdot A_{18}$.

**参考文献：**


[1] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 1981, 69(2): 487-513.

[2] MAZUROV V D, KHUKHRO E I. Unsolved Problems in Group Theory [M]. Novosibirsk: Russian Academy of Science, 2010.

[3] VASIL'EV A V, GRECHKOSEEVA M A, MAZUROV V D. Characterization of the Finite Simple Groups by Spectrum and Order [J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[4] 何立官. 群的阶及最高阶元素的阶与群结构 [D]. 重庆: 西南大学, 2012.

[5] 何立官, 陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(2): 46-49.

[6] 何立官, 陈贵云. 关于一些对称群的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(6): 1-3.

[7] 何立官, 陈贵云. 关于一些单群的新刻画 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(5): 589-594.

[8] HE L G, CHEN G Y. A New Characterization of Simple $K_3$-Groups [J]. Communications in Algebra, 2012, 40(10): 3903-3911.

[9] HE L G, CHEN G Y. A New Characterization of Simple $K_4$-Groups with Type $L_2(p)$ [J]. Advances in Mathematics (China), 2014, 43(5): 667-670.

[10] HE L G, CHEN G Y. A New Characterization of Simple $K_4$-Groups [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2015, 35(4): 400-406.

[11] YU D P, LI J B, CHEN G Y, et al. A New Characterization of Simple $K_5$-Groups of Type $L_3(p)$ [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2019, 45(3): 771-781.

[12] 钱淼, 陈贵云. 同阶交换子群个数之集为{1, 3}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 100-104.

[13] 雷倩, 何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 96-100.

[14] 谭三标, 艾海明, 晏燕雄. 最高阶元个数为 $6p^2q$ 的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(4): 1-3.

[15] 高彦伟, 曹洪平. 对称群 $S_n(n \leqslant 15)$的一个新刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(6): 81-85.

[16] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups [M]. New York: Clarendon Press, 1985.

[17] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2014.


**责任编辑 廖坤**