DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.09.002

用循环子群的个数刻画单群 $A_5$①

林子靖，　仝巍，　周伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：对有限群 G，用 $c(G)$表示 G 中循环子群的个数. 研究了循环子群的个数对群结构的影响，证明了 60 阶群 G 与交错群 A_5 同构的充要条件是 $c(G)=32$.

关　键　词：循环子群；群的阶；Sylow 子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)09－0005－05

Charactering of Simple Group A_5 by the Number of Cyclic Subgroups

LIN Zijing,　TONG Wei,　ZHOU Wei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group, $c(G)$ is the number of cyclic subgroups of G. it is proved that if the order of group G is 60, then $G \cong A_5$ if and only if $c(G)=32$ by studying the influence of the number of cyclic subgroups on the group structure.

Key words: cyclic subgroup; the order of group; Sylow subgroup.

对有限群 G，用 $c(G)$ 表示 G 的循环子群的个数[1]. 循环子群的个数对于群的结构是有一定影响的. 显然 $c(G)=|G|$ 当且仅当 G 是初等 Abel 2-群. 文献[2-6] 分类了 $|G|-c(G)\leqslant 5$ 的群.

文献[2] 证明了 $c(G)=|G|-1$ 当且仅当 $G\cong C_3, C_4, S_3, D_8$.

文献[3] 证明了 $c(G)=|G|-2$ 当且仅当 $G\cong C_6, C_2\times C_4, D_{12}, C_2\times D_8$.

文献[4] 证明了 $c(G)=|G|-3$ 当且仅当 $G\cong Q_8, C_5, D_{10}$.

文献[5] 证明了 $c(G)=|G|-4$ 当且仅当 $G\cong C_4\times C_2\times C_2, C_2\times C_2\times D_8, (C_2\times C_2)\rtimes C_4, Q_8\rtimes C_2, C_3\times C_3, (C_3\times C_3)\rtimes C_2, A_4, C_6\times C_2, C_2\times C_2\times S_3, C_8, D_{16}$.

文献[6] 证明了 $c(G)=|G|-5$ 当且仅当 $G\cong C_7, D_{14}, C_3\rtimes C_4$.

文献[7] 证明了对任意有限群 G，有 $|G|\leqslant 8(|G|-c(G))$，并分类了 $1\leqslant |G|-c(G)\leqslant 32$ 的群结构.

还有很多学者用交换子群的个数和最高阶元的个数来研究群的结构，参见文献[8-11].

---

① 收稿日期：2022-01-06

基金项目：国家自然科学基金项目(11971391).

作者简介：林子靖，硕士研究生，主要从事群论的研究.

通信作者：周伟，副教授.

文献[1,12-13]研究了$\alpha(G)=\frac{c(G)}{|G|}$对于群的性质和结构的影响. 其中文献[1]对$\alpha(G)>\frac{3}{4}$的群进行了分类. 文献[12]证明了$\alpha(G)=\frac{3}{4}$的有限幂零群是2-群. 文献[13]证明了$\alpha(G)\leqslant\alpha(Z(G))$，等式成立当且仅当$G\cong G_1\times G_2$，其中$G_1=\Omega_1(G_1)Z(G_1)$，$G_2$是奇数阶交换群.

本文证明了$G\cong A_5$当且仅当$|G|=60$，且$c(G)=32$.

引理1[1]　设G是有限群，若$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$，其中$(|G_i|,|G_j|)=1$，$i\neq j$，则

$$\alpha(G)=\prod_{i=1}^{n}\alpha(G_i)$$

引理2[12]　设G是有限群，$c(G)$是G的循环子群的个数，则$c(G)=\sum_{x\in G}\frac{1}{\varphi(o(x))}$，其中$\varphi$是Euler函数.

引理3[14]　设S是群，$H,G\leqslant S$，$H\cap G=1$，且$H\leqslant N_S(G)$，则H在G上的共轭作用是H在G上的一个作用，且$H/C_H(G)\lesssim\mathrm{Aut}(G)$.

引理4[15]　设φ是群G到G_1的一个同态，则$N=\mathrm{Ker}\,\varphi\trianglelefteq G$，且$G/N\lesssim G_1$.

本文所涉及的群都是有限群，所用符号都是标准的.

引理5　若$|G|=p^2qr$，其中p,q,r是不同的素数，则G是可解群或60阶交错群A_5.

证　设G不可解. 若G非单，则G有非平凡正规子群N，

$$|N|\in\{p,\ p^2,\ q,\ r,\ pq,\ pr,\ qr,\ p^2q,\ p^2r,\ pqr\}$$
$$|G/N|\in\{p,\ p^2,\ q,\ r,\ pq,\ pr,\ qr,\ p^2q,\ p^2r,\ pqr\}$$

从而N和G/N可解，G可解，矛盾. 故G是单群. 由于$|G|$的最小质因子不含3次方，则$12\,\big|\,|G|$，所以

$$p=2\qquad q=3\qquad r\geqslant 5\qquad 1+kr\mid 12$$

从而有$r=5$或$r=11$. 如果$r=11$，由于G是单群，所以G有12个Sylow 11-子群，从而有120个11阶元. G至少有4个Sylow 3-子群，所以至少有8个3阶元，且

$$|G|=2^2\times 3\times 11=132$$

所以G只有1个Sylow 2-子群，矛盾. 故

$$r=5\qquad |G|=60$$

又因G是单群，由文献[16]，有$G\cong A_5$.

定理1　$G\cong A_5$当且仅当$|G|=60$，且$c(G)=32$.

证　充分性显然，下证必要性.

由引理5知，只需证G不可解.

假设G可解. 则G有极小正规子群N，且N为初等Abel p-群. 因为

$$|G|=60=2^2\cdot 3\cdot 5$$

所以$|N|\in\{2,3,4,5\}$. 设$P_2\in\mathrm{Syl}_2(G)$，$P_3\in\mathrm{Syl}_3(G)$，$P_5\in\mathrm{Syl}_5(G)$.

下证G的Sylow 5-子群正规. 由Sylow定理知，G有1个或6个Sylow 5-子群. 若G有6个Sylow 5-子群，则$|N|\neq 5$，从而$|N|\in\{2,3,4\}$.

如果$|N|=3$，则G有3-补，设为H_1，$|H_1|=20$. H_1中有1个Sylow 5-子群，所以$P_5\trianglelefteq H_1$. 从而

$$H_1\leqslant N_G(P_5)\qquad |G:N_G(P_5)|\leqslant|G:H_1|\leqslant 3$$

即G的Sylow 5-子群个数为1，矛盾.

如果$|N|=4$，同理，矛盾于G的Sylow 5-子群的个数为6.

如果$|N|=2$，则G有2-补，设为H_2，$|H_2|=30$.

由Sylow定理知H_2中有1个或6个Sylow 5-子群. 若H_2中有6个Sylow 5-子群，则H_2中有24个5阶元. 又由Sylow定理知H_2中有1个或10个Sylow 3-子群. 若H_2中有1个Sylow 3-子群，令P_5作用

在 P_3 上知，P_5 与 P_3 可交换，所以 $P_3P_5 \leqslant G$，即 G 中有 15 阶循环子群. 15 阶循环子群的生成元个数为 8，所以 H_2 中至少有 8 个 15 阶元. 从而 $|H_2| \geqslant 33$，矛盾. 若 H_2 有 10 个 Sylow 3 -子群，则 H_2 中有 20 个 3 阶元，所以 $|H_2| \geqslant 45$，矛盾. 从而任一 30 阶群中只有 1 个 Sylow 5 -子群，即 $P_5 \trianglelefteq H_2$. 所以

$$H_2 \leqslant N_G(P_5) \qquad |G : N_G(P_5)| \leqslant |G : H_2| \leqslant 2$$

矛盾. 综上所述，G 只有 1 个 Sylow 5 -子群，即 $P_5 \trianglelefteq G$.

下证 G 的 Sylow 3 -子群正规. 由 $P_5 \trianglelefteq G$ 知，$P_3P_5 \leqslant G$，即 G 中存在 15 阶循环子群，且对 G 的任一 15 阶循环子群 H，都有 $P_5 \trianglelefteq H$. $|G/P_5| = 12$，所以 H/P_5 是 G/P_5 的 Sylow 3 -子群. 由 Sylow 定理知，G 有 1 个、4 个或 10 个 Sylow 3 -子群.

若 G 有 10 个 Sylow 3 -子群，则 G/P_5 中有 10 个 Sylow 3 -子群. 根据引理 4，G 中有 10 个 15 阶循环子群，从而有 80 个 15 阶元，矛盾于 $|G| = 60$.

若 G 中有 4 个 Sylow 3 -子群，同理 G/P_5 中有 4 个 Sylow 3 -子群. 由引理 4，G 中有 4 个 15 阶循环子群，从而有 32 个 15 阶元. 令 M 是 G 中 1 阶元、3 阶元、5 阶元、15 阶元之集合，则 $|M| = 45$，且对 $\forall x \in G\backslash M$，有 $\varphi(o(x)) \geqslant 1$，所以

$$\sum_{x \in G\backslash M} \frac{1}{\varphi(o(x))} \leqslant 15$$

由引理 2，

$$c(G) = \sum_{x \in M} \frac{1}{\varphi(o(x))} + \sum_{x \in G\backslash M} \frac{1}{\varphi(o(x))} \leqslant 25$$

由条件 $c(G) = 32$，矛盾. 从而 G 只有 1 个 Sylow 3 -子群，即 $P_3 \trianglelefteq G$.

由 G 可解知，G 的所有 Hall 子群共轭. 因为 P_3P_5 是 G 的 Hall 子群，且

$$P_3P_5 = P_3 \times P_5 \trianglelefteq G$$

所以 G 中只有 1 个 15 阶循环子群. 下面用 n_k 表示 G 的 k 阶循环子群的个数. 因此

$$n_1 = 1 \qquad n_3 = 1 \qquad n_5 = 1 \qquad n_{15} = 1$$

显然

$$|G| = \sum_{k \mid |G|} \varphi(k) n_k \qquad c(G) = \sum_{k \mid |G|} n_k$$

则

$$60 = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 4n_5 + 2n_6 + 4n_{10} + 4n_{12} + 8n_{15} + 8n_{20} + 8n_{30} + 16n_{60}$$
$$32 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_{10} + n_{12} + n_{15} + n_{20} + n_{30} + n_{60}$$

若 $n_{60} = 1$，则 G 为循环群，$c(G) = 12$，矛盾. 从而

$$n_4 + n_6 + 3n_{10} + 3n_{12} + 7n_{20} + 7n_{30} = 17 \tag{1}$$

下面继续讨论 G 的 Sylow 2 -子群的个数.

情形 1　G 有 1 个 Sylow 2 -子群.

若 $P_2 = C_4$，则 $G = C_4 \times C_3 \times C_5 = C_{60}$ 为循环群，$c(G) = 12$，矛盾.

若 $P_2 = C_2 \times C_2$，则

$$G = C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_5$$

由引理 1 知

$$\alpha(G) = \alpha(C_3) \times \alpha(C_5) = \frac{4}{15}$$

则 $c(G) = 16$，矛盾.

情形 2　G 有 3 个 Sylow 2 -子群.

若 $P_2 = C_4$，则 $n_4 = 3$，从而 G 中至多有 3 个 2 阶元，即 $n_2 \leqslant 3$. 令 M 是 G 中 1 阶元、2 阶元、3 阶元、4 阶元、5 阶元、15 阶元之集合. 若 $n_2 = 3$，则 $|M| = 24$，且对 $\forall x \in G\backslash M$，有

$$o(x) \geqslant 6 \qquad \varphi(o(x)) \geqslant 2$$

所以

$$\sum_{x \in G \backslash M} \frac{1}{\varphi(o(x))} \leqslant 18$$

从而由引理2，$c(G) \leqslant 28$，矛盾于 $c(G)=32$. 若 $n_2=1$，则 $|M|=22$，同理，$c(G) \leqslant 27$，矛盾.

若 $P_2=C_2 \times C_2$，则 $n_4=0$，G 中至多有9个2阶元.

令 M 是 G 中1阶元、2阶元、3阶元、5阶元、15阶元之集合. 同理，有 $c(G) \leqslant 31$，矛盾.

情形3　G 有5个Sylow 2-子群.

若 $P_2=C_4$，则 $n_4=5$，从而 G 中有10个4阶元，至多5个2阶元，即 $n_2 \leqslant 5$. 令 M 是 G 中1阶元、2阶元、3阶元、4阶元、5阶元、15阶元之集合. 若 $n_2=5$，则 $|M|=30$，且对 $\forall x \in G \backslash M$，有

$$o(x) \geqslant 6 \qquad \varphi(o(x)) \geqslant 2$$

从而由引理2知，$c(G) \leqslant 29$，矛盾. 同理，若 $n_2=3$，则 $|M|=28$，从而 $c(G) \leqslant 28$，矛盾. 若 $n_2=1$，则 $c(G) \leqslant 27$，矛盾.

若 $P_2=C_2 \times C_2$，则 $n_4=0$. 因为

$$P_3 \trianglelefteq G \qquad P_5 \trianglelefteq G$$

所以

$$P_3P_5 \trianglelefteq G \qquad P_3P_5=C_{15}$$

从而

$$\begin{aligned} G &= P_2 \ltimes P_3P_5 = \\ &\langle a, b, c: a^2=b^2=c^{15}=1, ab=ba, c^a=c^i, c^b=c^j, i^2 \equiv 1(\bmod 15), j^2 \equiv (\bmod 15)\rangle \end{aligned}$$

所以 $i, j \in \{1, 4, 11, 14\}$. 由 G 非交换，则 i, j 不能同时为1. 从而 G 有以下4种类型：

$$G_1=\langle a, b, c: a^2=b^2=c^{15}=1, ab=ba, c^a=c^4, c^b=c^4\rangle \qquad c(G_1)=28$$

$$G_2=\langle a, b, c: a^2=b^2=c^{15}=1, ab=ba, c^a=c^{11}, c^b=c^{11}\rangle \qquad c(G_2)=20$$

$$G_3=\langle a, b, c: a^2=b^2=c^{15}=1, ab=ba, c^a=c^{14}, c^b=c^{14}\rangle \qquad c(G_3)=38$$

$$G_4=\langle a, b, c: a^2=b^2=c^{15}=1, ab=ba, c^a=c^4, c^b=c^{11}\rangle \qquad c(G_4)=35$$

矛盾.

情形4　G 有15个Sylow 2-子群.

若 $P_2=C_4$，则 $n_4=15$，所以 $|N_G(P_2)|=4$，从而 $P_2=N_G(P_2)$. 由(1)式有

$$n_6+3n_{10}+3n_{12}+7n_{20}+7n_{30}=2$$

故

$$n_6=2 \qquad n_{10}=n_{12}=n_{20}=n_{30}=0$$

令

$$P_2=\langle a\rangle \qquad P_3=\langle b\rangle$$

因为 $n_{12}=0$，即 G 中没有12阶元，所以 P_2 作用在 P_3 上非平凡，从而

$$P_2P_3=\langle a, b: a^4=b^3=1, b^a=b^{-1}\rangle$$

$$|G/P_3|=20 \qquad P_5 \trianglelefteq G$$

所以

$$G/P_3=\langle a, c: a^4=c^5=1, c^a=c^i, i^4 \equiv 1(\bmod 5)\rangle$$

因为 G 中没有20阶元，所以 P_2 作用在 P_5 上非平凡，从而 $i=2, 3, 4$.

若 $i=2$，则

$$G/P_3=\langle a, c: a^4=c^5=1, c^a=c^2\rangle$$

此时 G/P_3 中有5个2阶元，从而有5个2阶循环子群. 设 $K/P_3=\langle x\rangle$ 是 G/P_3 的任一2阶循环子群. 因为 P_2 在 P_3 上的作用为逆变换，即 $b^a=b^{-1}$，x 是 P_2 中的2阶元，$x=a^2$，所以 $b^x=b^{a^2}=b$，即 $\langle x\rangle$ 作用在 P_3 上平凡. 从而

$$K=P_3 \times \langle x\rangle=C_6$$

由于 G/P_3 中有5个2阶循环子群，所以 G 中至少有5个6阶循环子群，矛盾于 $n_6=2$.

若 $i=3$，同理，矛盾.

若 $i=4$，则

$$G/P_3=\langle a, c: a^4=c^5=1, c^a=c^4\rangle$$

此时 G/P_3 中有 10 阶元，从而有 10 阶循环子群. 设 $J/P_3=\langle y\rangle$ 是 G/P_3 的任一 10 阶循环子群. 则 $|J|=30$. 由 30 阶群分类知，矛盾. 若 $P_2=C_2\times C_2$，与情形 3 同理，矛盾.

综上所述，G 不可解. 由引理 5，$G\cong A_5$.

参考文献：

[1] GARONZI M, LIMA I. On the Number of Cyclic Subgroups of a Finite Group [J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 2018, 49(3): 515-530.

[2] TĂRNĂUCEANU M. Finite Groups with a Certain Number of Cyclic Subgroups [J]. The American Mathematical Monthly, 2015, 122(3): 275-276.

[3] TĂRNĂUCEANU M. Finite Groups with a Certain Number of Cyclic Subgroups II [J]. Acta Universitatis Sapientiae Mathematica, 2018, 10(2): 375-377.

[4] SONG K, ZHOU W. On The Number of Cyclic Subgroups in Finite Groups [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2019, 41: 593-596.

[5] 姜富铭，周伟. 具有特殊循环子群个数的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(2)：14-17.

[6] BELSHOFF R, DILLSTROM J, REID L. Finite Groups with a Prescribed Number of Cyclic Subgroups [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(3): 1043-1056.

[7] BELSHOFF R, DILLSTROM J, REID L. Addendum to "Finite Groups with a Prescribed Number of Cyclic Subgroups" [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(10): 3939-3940.

[8] 钱焱，陈贵云. 用交换子群的个数刻画 A_5 和 S_5 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：5-8.

[9] 钱焱，陈贵云. 同阶交换子群个数之集为{1，3}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：100-104.

[10] 郭红如，吕恒. 可以表示成 3 个或 4 个交换子群并的群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(8)：97-100.

[11] 雷倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[12] TĂRNĂUCEANU M, LAZOREC M S. A Note on the Number of Cyclic Subgroups of a Finite Group [EB/OL]. 2018: arxiv: 1805.00301[2021-12-25]. https://arxiv.org/abs/1805.00301.

[13] TĂRNĂUCEANU M. A Result on the Number of Cyclic Subgroups of a Finite Group [J]. Proceedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences, 2020, 96(10): 93-94.

[14] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京：科学出版社，2012.

[15] 杨子胥. 近世代数 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2011.

[16] 施武杰. A_5 的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1986，11(3)：11-14.

责任编辑　廖坤