第 47 卷 第 9 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2022 年 9 月
Vol. 47 No. 9　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Sep. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.09.003

正交群 $O_{10}^{\pm}(2)$的新刻画[①]

程敏[1]，　杨国川[2]，　晏燕雄[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2.208 水文地质工程地质队，重庆 400700

摘要： 众所周知，有限群的共轭类长对群的结构有重要的影响. 该文继续研究了群的共轭类长与群结构之间的关系，并利用群的阶与群的某特殊共轭类长成功地刻画了两个正交群 $O_{10}^{\pm}(2)$.

关　键　词： 正交群；群的阶；素图；共轭类长

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2022)09-0010-04

A New Characterization of Orthogonal Groups $O_{10}^{\pm}(2)$

CHENG Min[1]，　YANG Guochuan[2]，　YAN Yanxiong[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. 208 Hydrogeology Engineering Geology Team, Chongqing 400700, China

Abstract: It is well-known that the conjugacy class sizes of a finite group has an important influence on the structure of a group. In this paper, we continue to investigate this topic, and study the relationship between the conjugacy class sizes and the structure of a finite group. In particular, we successfully characterize the two orthogonal groups $O_{10}^{\pm}(2)$ using their orders and one special conjugacy class sizes.

Key words: orthogonal group; order of finite group; prime graph; conjugacy class size

本文涉及的群均为有限群. $cl_G(x)$ 表示 x 在 G 中的共轭类，$N(G)$ 表示群 G 的所有共轭类类长的集合，$l_i(G)$ 表示群 G 的第 i 大共轭类长，特别地，

$$l_1(G)=\max\{|x^G|: x\in G\}$$

设 n 为正整数，p 为素数，$\pi(n)$ 表示整除 n 的所有互异素因子集合，特别地，$\pi(G)=\pi(|G|)$. G_p 表示群 G 的某个 Sylow p-子群. 给定群 G，G 的素图 $\Gamma(G)$ 定义为：以 $\pi(G)$ 作为图的顶点，两顶点 $x, y\in\pi(G)$ 有边相连当且仅当存在 $z\in G$ 使得 $xy \mid |z|$，并记为 $x\sim y$. 设 $t(G)$ 是 $\Gamma(G)$ 的连通分支的个数，则

$$\Gamma(G)=\{\pi_i: i=1,2,\cdots,t(G)\}$$

---

① 收稿日期：2022-01-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11971391；12071376)；重庆市自然科学基金项目(cstc2021jcyj-msxmX0426)；中央高校基本业务费项目(XDJK2019B030).

作者简介：程敏，硕士研究生，主要从事有限群的研究.

通信作者：晏燕雄，副教授.

若 $2 \in \pi(G)$，则总假设 $2 \in \pi_1$. 其他未说明的符号和术语都是标准的(见文献[1]).

有限群的数量刻画一直是有限论研究领域的热点，许多群论研究者都进行过相关的研究. 文献[2]讨论了一类共轭类特殊长度之集对群结构的影响. 文献[3]证明了不存在同阶交换子群个数之集为$\{1, 2\}$的有限群，并刻画了同阶交换子群个数之集为$\{1, 3\}$的群的结构. 文献[4]利用准素数子群的 δ-置换性得到超可解群的若干性质.

本文继续研究群的数量性质对群结构的影响，研究的问题与 Thompson 教授提出的猜想相关：

Thompson 猜想　设 L 是非交换单群，如果群 G 满足 $Z(G)=1$ 且 $N(G)=N(L)$，则 $G \cong L$.

Thompson 猜想指出：有限非交换单群能够被其共轭类长的集合唯一刻画. 陈贵云教授在文献[5-7]中证明了 Thompson 猜想对所有素图不连通的有限非交换单群成立. 文献[8]减弱了 Thompson 猜想的条件，用群的阶与某些共轭类长刻画了散在单群和单 K_3-群. 文献[9]用群的阶以及某些特殊共轭类长刻画了单 K_4-群. 文献[10-12]用群的阶以及某些特殊共轭类长刻画了 A_p，$C_n(2)$ 及 S_{p+1} 等.

本文继续这一研究，主要结果如下：

定理 1　设 G 是有限群，则 $G \cong O_{10}^{+}(2)$ 当且仅当 $|G|=|O_{10}^{+}(2)|$ 且 $l_5(G)=l_5(O_{10}^{+}(2))$.

定理 2　设 G 是有限群，则 $G \cong O_{10}^{-}(2)$ 当且仅当 $|G|=|O_{10}^{-}(2)|$ 且 $l_1(G)=l_1(O_{10}^{-}(2))$.

定理 1 的证明

必要性是显然的，下面只证充分性.

由文献[1]知

$$|G|=|O_{10}^{+}(2)|=2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$$

$$l_5(G)=2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$$

因此 G 存在 31 阶元 x，使得 $C_G(x)=\langle x\rangle$. 于是，$\{31\}$ 是群 G 的一个素图分支，即 $t(G) \geqslant 2$.

下面先证明：G 既不是 Frobenius 群又不是 2-Frobenius 群.

断言：G 不是 Frobenius 群.

否则，设 G 是以 H 为核，K 为补的 Frobenius 群. 由文献[13]的引理 2.6(1) 知 $t(G)=2$.

如果 $31 \in \pi(H)$，则

$$\pi(K)=\{2, 3, 5, 7, 17\}$$

$$|K|=2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$$

从而 $2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \mid 30$，矛盾.

如果 $31 \in \pi(K)$，则

$$\pi(H)=\{2, 3, 5, 7, 17\}$$

$$|H|=2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$$

设 $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$，由 H 幂零得 $H_7 \trianglelefteq G$，且由文献[14]的定理 4.5.3 得 $|\mathrm{Aut}(H_7)|=6$. 则

$$(31, |\mathrm{Aut}(H_7)|)=1$$

由文献[9]的引理 2.12 得 $7 \sim 31$，矛盾.

再证明：G 不是 2-Frobenius 群.

如果 G 是 2-Frobenius 群，则由文献[15]的定理 2 得 $t(G)=2$. 此时 G 有一正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得

$$\pi(K/H)=\pi_2 \qquad \pi(H) \cup \pi(G/K)=\pi_1$$

且 $|G/K| \mid |\mathrm{Aut}(K/H)|$. 由于 $t(G)=2$，且$\{31\}$是群 G 的一个素图分支，则

$$\pi_2=\pi(K/H)=\{31\}$$

从而 $|G/K| \mid 30$，且 $7 \in \pi(H)$. 设 $H_7 \in \mathrm{Syl}_7(H)$，由 H 幂零得 $H_7 \trianglelefteq G$，且 $|\mathrm{Aut}(H_7)|=6$. 于是

$$(31, |\mathrm{Aut}(H_7)|)=1$$

且 $7 \sim 31$，矛盾.

因此，G 既不是一个 Frobenius 群，又不是一个 2-Frobenius 群.

由文献[16]的定理 A 知，G 有一正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，其中 H 幂零，K/H 为非交换单群，H 和 G/K 为 π_1 -群，$|G/K| \mid |\mathrm{Out}(K/H)|$ 且 G 的每个奇阶素图分支也是 K/H 的奇阶素图分支，即$\{31\}$为 K/H 的一个素图分支. 由文献[1]知 K/H 只可能同构于 $L_2(31)$，$L_5(2)$ 或 $O_{10}^{+}(2)$.

若 $K/H \cong L_2(31)$，$L_5(2)$，则 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2$. 由 $|G/K| \mid |\mathrm{Out}(K/H)|$ 得 $17 \in \pi(H)$. 设 $H_{17} \in \mathrm{Syl}_{17}(H)$，则 $H_{17} \trianglelefteq G$. 由于

$$(31,\ |\mathrm{Aut}(H_{17})|) = 1$$

由文献[9]的引理 2.12 得 $17 \sim 31$，矛盾.

如果 $K/H \cong O_{10}^{+}(2)$，则通过比较阶得 $G \cong O_{10}^{+}(2)$. 综上所述，定理 1 得证.

定理 2 的证明

必要性是显然的，下面只证充分性.

由定理的条件知

$$|G| = |O_{10}^{-}(2)| = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$$

$$l_1(G) = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

因此 G 中存在 17 阶元 y，使得 $C_G(y) = \langle y \rangle$，则$\{17\}$是群 G 的一个素图分支，且 $t(G) \geqslant 2$.

断言：G 不是 Frobenius 群.

否则，设 G 是以 H 为核，K 为补的 Frobenius 群. 由文献[13]的引理 2.6(1)知：

如果 $17 \in \pi(H)$，则

$$\pi(K) = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$$

$$|K| = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

从而 $2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \mid 16$，矛盾.

如果 $17 \in \pi(K)$，则

$$\pi(H) = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$$

且

$$|H| = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

设 $H_{11} \in \mathrm{Syl}_{11}(H)$，由 H 幂零及文献[14]的定理 4.5.3 得

$$H_{11} \trianglelefteq G \qquad |\mathrm{Aut}(H_{11})| = 10$$

于是$(17,\ |\mathrm{Aut}(H_{11})|) = 1$. 由文献[9]的引理 2.12 得 $17 \sim 11$，矛盾.

再证明：G 不是 2-Frobenius 群.

否则，由 G 是 2-Frobenius 群及文献[15]的定理 2 知 $t(G) = 2$. 此时 G 有一正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得

$$\pi(K/H) = \pi_2 \qquad \pi(H) \cup \pi(G/K) = \pi_1$$

且 $|G/K| \mid |\mathrm{Aut}(K/H)|$. 由于 $t(G) = 2$，且$\{17\}$是群 G 的一个素图分支，则

$$\pi_2 = \pi(K/H) = \{17\}$$

从而 $|G/K| \mid 16$ 且 $11 \in \pi(H)$. 设 $H_{11} \in \mathrm{Syl}_{11}(H)$，由 H 幂零得 $H_{11} \trianglelefteq G$ 且 $|\mathrm{Aut}(H_{11})| = 10$. 进一步，有 $17 \sim 11$，矛盾.

从而，G 既不是 Frobenius 群，又不是 2-Frobenius 群.

G 有一正规群列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，其中 H 幂零，K/H 为非交换单群，H 和 G/K 为 π_1 -群，$|G/K| \mid$

$|\mathrm{Out}(K/H)|$，且 G 的每个奇阶素图分支也是 K/H 的奇阶素图分支，即$\{17\}$为 K/H 的一个素图分支．由文献[1]知 K/H 只可能同构于 $L_2(17)$，$L_2(16)$，$S_4(4)$，$O_8^-(2)$，$L_4(4)$，$S_8(2)$ 或 $O_{10}^+(2)$．

断言：$K/H \ncong L_2(17), L_2(16), S_4(4), O_8^-(2), L_4(4), S_8(2)$．

否则，由于 $11 \notin \pi(K/H)$，且 $|\mathrm{Out}(K/H)| = 2^n (n \leqslant 2)$，得 $11 \in \pi(H)$．设 $H_{11} \in \mathrm{Syl}_{11}(H)$，则 $H_{11} \trianglelefteq G$．因为

$$(17, |\mathrm{Aut}(H_{11})|) = 1$$

所以由文献[9]的引理 2.12 得 $17 \sim 11$，矛盾．

如果 $K/H \cong O_{10}^-(2)$，则通过比较阶得 $G \cong O_{10}^-(2)$，从而定理 2 得证．

参考文献：

[1] CONWAY H J，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Group [M]. New York：Clarendon Press，1985.

[2] 曹熠维，吕恒. 一类共轭类长度集合的长度为 3 的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(2)：1-3.

[3] 钱焱，陈贵云. 同阶交换子群个数之集为{1，3}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：100-104.

[4] 高建玲，毛月梅. 有限群的 δ-置换子群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：105-109.

[5] 陈贵云. 关于 Thompson 猜想 [D]. 成都：四川大学，1994.

[6] CHEN G Y. On Thompson's Conjecture [J]. Journal of Algebra，1996，185(1)：184-193.

[7] CHEN G Y. Further Reflections on Thompson's Conjecture [J]. Journal of Algebra，1999，218(1)：276-285.

[8] 李金宝. 具有特殊共轭类长的有限群及子群的广义置换性 [D]. 重庆：西南大学，2012.

[9] CHEN Y H，CHEN G Y，LI J B. Recognizing Simple K_4-Groups by Few Special Conjugacy Class Sizes [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Science Society，2015，38(1)：51-72.

[10] ASBOEI A K，MOHAMMADYARI R. Recognizing Alternating Groups by Their Order and One Conjugacy Class Length [J]. Joural of Algebra and Its Applications，2016，15(2)：1-7.

[11] ASBOEI A K，DARAFSHEH M R，MOHAMMADYARI R. The Influence of Order and Conjugacy Class Length on the Structure of Finite Groups [J]. Hokkaido Mathematical Journal，2018，47(1)：25-32.

[12] ABEDEI M，IRANMANESH A，SHIRJIAN F. A Variation of Thompson's Conjecture for the Symmetric Groups [J]. Czechoslovak Mathematical Journal，2020，70(3)：743-755.

[13] WANG Z B，HE L G，CHEN G Y. An ONC-Characterization of A_{14} and A_{15} [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics，2019，41：536-546.

[14] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京：科学出版社，1993.

[15] 陈贵云. Frobenius 群与 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

[16] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487-513.

责任编辑　廖坤