

某些子群为 CSS-子群的有限群^①

刁倩玉, 刘建军

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 设 H 为有限群 G 的一个子群, 如果存在 G 的正规子群 K , 使得 $G=HK$, 且 $H \cap K$ 是 G 的 SS-拟正规子群, 则称 H 为 G 的 CSS-子群. 该文研究了有限群 G 的 Sylow 子群的部分极大子群为 CSS-子群或 S-拟正规嵌入子群时群的结构, 得到了有限群为 p -超可解群及 p -幂零群的一些充分条件, 推广了已有的结论.

关键词: CSS-子群; S-拟正规嵌入子群; p -超可解群; p -幂零群

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)09-0014-05

Finite Groups with Some CSS-Subgroups

DIAO Qianyu, LIU Jianjun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let H be a subgroup of a finite group G . H is called a CSS-subgroup of G if there exists a normal subgroup K of G such that $G=HK$ and $H \cap K$ is a SS-quasinormal subgroup. In this paper, we investigate the structure of G by supposing that some maximal subgroups of the Sylow subgroups of G are CSS-subgroups or S-quasinormally embedded subgroups, and obtain some sufficient conditions for a finite group to be p -supersolvable or p -nilpotent, generalizing some known results.

Key words: CSS-subgroups; S-quasinormally embedded subgroups; p -supersolvable groups; p -nilpotent groups

本文所涉及的群均为有限群, 所有术语和符号都是标准的(见文献[1]). 通过子群的广义正规性以及同阶子群来研究有限群的结构, 一直是群论研究的主要课题之一, 并且已有许多结果, 如文献[2-11]. 设 H 为有限群 G 的一个子群, 如果 H 和 G 的所有 Sylow 子群可置换, 即对任意 G 的 Sylow 子群 S 有 $HS=SH$, 则称 H 为 G 的 S-拟正规子群^[5]. 在此基础上, 文献[6]引入了 S-拟正规嵌入子群的概念: 设 H 为 G 的一个子群, 如果 H 的每个 Sylow 子群都是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow 子群, 则称 H 为 G 的 S-拟正规嵌入子群. 文献[6]证明了: 如果 G 的每个 Sylow 子群的所有极大子群都是 G 的 S-拟正规嵌入子群, 则 G 是超可解群. 随后, 文献[7]将该结论推广到了群系. 文献[8]介绍了 SS-拟正规子群的定义: 设 H 为 G 的一个子群, 如果存在 G 的子群 B , 使得 $G=HB$, 且 H 与 B 的每个 Sylow 子群 S 都可置换, 则称 H 为 G 的

① 收稿日期: 2022-01-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971391); 中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052).

作者简介: 刁倩玉, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

通信作者: 刘建军, 副教授.

SS-拟正规子群. 作为进一步推广, 文献[9]引入了CSS-子群的概念: 设 H 为 G 的一个子群, 如果存在 G 的正规子群 K , 使得 $G = HK$, 且 $H \cap K$ 是 G 的SS-拟正规子群, 则称 H 为 G 的CSS-子群. 通过这个概念, 文献[9-11]研究了 Sylow 子群的所有极大子群以及 G 的极小子群对群结构的影响. 文献[12]定义了: 设 d 为 p -群 P 的最小生成元个数, $\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ 为 P 的极大子群的集合, 且 $\bigcap_{i=1}^d P_i = \Phi(P)$, 其中 $\Phi(P)$ 为 P 的 Frattini 子群.

本文假设 $\mathcal{M}_d(P)$ 中的元为 G 的CSS-子群或者S-拟正规嵌入子群, 将研究群 G 的结构.

引理 1^[6] 设 U 为群 G 的S-拟正规嵌入子群, $H \leq G$, K 为 G 的正规子群, 则:

- (i) 如果 $U \leq H$, 那么 U 为 H 的S-拟正规嵌入子群;
- (ii) UK 是 G 的S-拟正规嵌入子群, 且 UK/K 是 G/K 的S-拟正规嵌入子群.

引理 2^[9] 设 H 为群 G 的CSS-子群, 则:

- (i) 如果 $H \leq M \leq G$, 那么 H 为 M 的CSS-子群;
- (ii) 设 $N \trianglelefteq G$ 且 $N \leq H$, 则 H 是 G 的CSS-子群当且仅当 H/N 是 G/N 的CSS-子群;
- (iii) 设 π 为素数集合, N 为 G 的正规 π' -子群, 如果 H 为 G 的 π -子群, 则 HN/N 是 G/N 的CSS-正规子群.

引理 3^[8] 设 p 为素数, P 为 G 的一个 p -子群. 如果 P 是 G 的SS-拟正规子群, 则 P 与 G 的每个 Sylow q -子群可置换, 其中 $q \neq p$.

引理 4^[13] 设 N 为群 G 的一个正规子群 ($N \neq 1$). 如果 $N \cap \Phi(G) = 1$, 则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是 G 的包含在 $F(N)$ 里的极小正规子群的直积.

定理 1 设 p 为 $|G|$ 的素因子, P 为 G 的 Sylow p -子群. 如果 G 为 p -可解群, 且某固定的 $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元是 G 的CSS-子群或S-拟正规嵌入子群, 则 G 为 p -超可解群.

证 假设定理 1 结论不成立, 且设 G 为极小阶反例. 设

$$\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$$

我们按下列步骤证明定理 1:

步骤 1 $O_{p'}(G) = 1$.

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$. 由于 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p -子群, 并且

$$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G) \cong P$$

因此可得

$$\mathcal{M}_d(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = \{P_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G), \dots, P_dO_{p'}(G)/O_{p'}(G)\}$$

由引理 2 和引理 1 知, $P_iO_{p'}(G)/O_{p'}(G) (i=1, \dots, d)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的CSS-子群或S-拟正规嵌入子群, 从而 $G/O_{p'}(G)$ 满足定理条件. 由 G 的极小性知 $G/O_{p'}(G)$ 为 p -超可解群, 故 G 为 p -超可解群, 矛盾.

步骤 2 $\Phi(P)_G = 1$, 从而 $O_p(G)$ 为初等交换群.

假设 $\Phi(P)_G \neq 1$, 则

$$\mathcal{M}_d(P/\Phi(P)_G) = \{P_1/\Phi(P)_G, \dots, P_d/\Phi(P)_G\}$$

由引理 2 和引理 1 知, $P_i/\Phi(P)_G (i=1, \dots, d)$ 是 $G/\Phi(P)_G$ 的CSS-子群或S-拟正规嵌入子群. 从而 $G/\Phi(P)_G$ 满足定理条件, 由 G 的极小性知 $G/\Phi(P)_G$ 为 p -超可解群. 故 $G/\Phi(G)$ 为 p -超可解群, 从而 G 为 p -超可解群, 矛盾.

步骤 3 所有包含在 $O_p(G)$ 中的 G 的极小正规子群都是 p 阶循环群.

由步骤 1 及 G 为 p -可解群知 $O_p(G) > 1$. 任取 G 的极小正规子群 N 且 $N \leq O_p(G)$. 如果 $N \leq \Phi(P)$, 则由步骤 2 可知 $N \leq \Phi(P) = 1$, 矛盾. 所以 $N \not\leq \Phi(P)$. 不妨设 $N \not\leq P_1 \in \mathcal{M}_d(P)$. 令 $N_1 = N \cap P_1$, 则

$$|N : N_1| = |N : N \cap P_1| = |NP_1 : P_1| = p$$

根据假设, P_1 为 G 的CSS-子群或S-拟正规嵌入子群. 我们断言 N 是 p 阶循环群.

情形 1 若 P_1 是 G 的CSS-子群, 则存在 G 的正规子群 K , 使得 $G = P_1K$, 且 $P_1 \cap K$ 是 G 的SS-拟

正规子群. 由 N 的极小性知 $N \cap K = 1, N$.

如果 $N \cap K = 1$, 则 NK/K 是 G/K 的极小正规子群. 由于

$$G/K = P_1 K/K \cong P_1/P_1 \cap K$$

为 p -群, 于是 $N \cong NK/K$ 为 p 阶循环群.

如果 $N \cap K = N$, 即 $N \leq K$, 则

$$P \cap K = NP_1 \cap K = N(P_1 \cap K)$$

是 K 的 Sylow p -子群. 令 K_q 为 K 的 Sylow q -子群, 其中 $q \neq p$, 则 K_q 也是 G 的 Sylow q -子群. 由引理 3 知

$$(P_1 \cap K)K_q = K_q(P_1 \cap K) \leq G$$

于是

$$N_1 = N \cap (P_1 \cap K) = N \cap (P_1 \cap K)K_q \trianglelefteq (P_1 \cap K)K_q$$

由步骤 2 知, N 为交换群, 故 $N_1 \trianglelefteq N$. 因此

$$N_1 \trianglelefteq \langle N, (P_1 \cap K)K_q : q \in \pi(G), q \neq p \rangle = K$$

易知

$$N_1 = N \cap P_1 \trianglelefteq P_1$$

所以

$$N_1 \trianglelefteq P_1 K = G$$

由 N 的极小性知 $N_1 = 1$, 且 N 为 p 阶循环群.

情形 2 若 P_1 是 G 的 S -拟正规嵌入子群, 则存在 G 的 S -拟正规子群 H , 使得 P_1 是 H 的 Sylow p -子群. 于是对任一 $Q \in \text{Syl}_q(G)$, 其中 $q \neq p$, 有 $HQ = QH$, 即 HQ 是 G 的一个子群. 则

$$N_1 = N \cap P_1 = N \cap HQ \trianglelefteq HQ$$

且由步骤 2 可得 N 为初等交换群, 从而 $N_1 \trianglelefteq N$. 于是

$$N_1 \trianglelefteq \langle N, HQ : Q \in \text{Syl}_q(G), q \neq p \rangle = G$$

由 N 的极小性知 $N_1 = 1$, 且 N 为 p 阶循环群.

步骤 4 极小阶反例不存在.

由步骤 1、步骤 2 及已知可得

$$C_G(O_p(G)) = O_p(G)$$

如果存在 G 的极小正规子群 N , 使得

$$N \leq O_p(G) \cap \Phi(G)$$

由步骤 2 和步骤 3 可知, N 在 P 中有补. 根据文献[14]的定理 17.4, 假设 N 在 G 中有补 M . 又因 $N \leq \Phi(G)$, 故 $G = NM = M$, 矛盾. 于是

$$O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$$

再由引理 4 知

$$O_p(G) = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$$

其中 N_i 为 G 的极小正规子群, 且 $|N_i| = p (i = 1, \cdots, r)$. 由 $G/C_G(N_i) \leq \text{Aut}(N_i)$ 知, $G/C_G(N_i)$ 为 p -超可解群. 故

$$G/O_p(G) = G/C_G(O_p(G)) = G / \bigcap_{i=1}^r C_G(N_i)$$

为 p -超可解群, 于是 G 为 p -超可解群, 矛盾.

注 1 在定理 1 中, 假设“ G 是 p -可解群”是必不可少的. 比如, 取 $G = A_5$, $p = 5$. 则 G 的每个 Sylow 5-子群的极大子群都是单位元群, 显然是 G 的 CSS-子群, 也是 S -拟正规嵌入子群. 但是 G 不是 5-超可解群.

推论 1 设 p 为 $|G|$ 的任一素因子, P 为 G 的 Sylow p -子群. 如果 G 为可解群, 且某固定的 $\mathcal{M}_d(P)$

中的每个元是 G 的 CSS-子群或 S-拟正规嵌入子群, 则 G 是超可解群.

定理 2 设 p 为 $|G|$ 的素因子且 p 为奇素数, P 为 G 的 Sylow p -子群. 假设 $N_G(P)$ 是 p -幂零群且某固定的 $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元是 G 的 CSS-子群或 S-拟正规嵌入子群, 则 G 为 p -幂零群.

证 假设定理 2 结论不成立, 且设 G 为极小阶反例. 设

$$\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$$

我们按下列步骤证明该定理:

步骤 1 $O_{p'}(G) = 1$.

证明同定理 1.

步骤 2 若 $P \leq H < G$, 则 H 是 p -幂零群.

因为 $N_G(P)$ 是 p -幂零群, 且 $N_H(P) \leq N_G(P)$, 所以 $N_H(P)$ 是 p -幂零群. 根据引理 2 和引理 1 知, $P_i (i=1, \dots, d)$ 是 H 的 CSS-子群或 S-拟正规嵌入子群. 即 H 满足定理 2 的条件. 由 G 的极小性知, H 是 p -幂零群.

步骤 3 $G = PQ$, 其中 Q 为 G 的 Sylow q -子群, $q \neq p$.

如果对 P 的所有特征子群 T , $N_G(T)$ 都是 p -幂零的. 显然 $P \leq N_G(T)$. 于是

$$N_G(T) = P \rtimes O_{p'}(N_G(T))$$

由 $T \trianglelefteq N_G(T)$ 知

$$O_{p'}(N_G(T)) \leq C_G(T)$$

所以 $N_G(T)/C_G(T)$ 是 p -群. 根据文献[15]知 G 为 p -幂零群, 矛盾. 故存在 P 的非平凡特征子群 T , 使得 $N_G(T)$ 是非 p -幂零的. 选取 T , 使得 T 的阶足够大. 从而对于任意满足 $T < K \leq P$ 的 P 的特征子群 K , $N_G(K)$ 都是 p -幂零的. 显然 $T \trianglelefteq N_G(P)$, 则

$$N_G(P) \leq N_G(T)$$

因为 $N_G(T)$ 是非 p -幂零群, 则由步骤 2 可得, $N_G(T) = G$, 即 $T \trianglelefteq G$. 于是对于满足

$$1 \neq T \leq O_p(G) < K \leq P$$

的 P 的特征子群 K , $N_G(K)$ 都是 p -幂零的. 故 $N_G(K)/C_G(K)$ 是 p -群, 从而 $N_{G/O_p(G)}(K/O_p(G))/C_{G/O_p(G)}(K/O_p(G))$ 也是 p -群. 再次根据文献[15]可知, $G/O_p(G)$ 是 p -幂零的, 从而 G 是 p -可解的. 由文献[16]的定理 6.3.5 知, 对任意 $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, 存在 G 的 Sylow q -子群 Q , 使得 $PQ \leq G$. 若 $PQ < G$, 则由步骤 2 知 PQ 是 p -幂零的, 于是

$$Q \leq C_G(O_p(G))$$

又因 G 为 p -可解群且 $O_{p'}(G) = 1$, 于是

$$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$$

矛盾, 故 $G = PQ$.

步骤 4 极小阶反例不存在.

由步骤 1 和步骤 3 知 $O_p(G) > 1$. 设 N 为 G 的任一包含在 $O_p(G)$ 里的极小正规子群. 若 $N \leq \Phi(P)$, 则 $N \leq \Phi(G)$. 易证商群 G/N 满足定理 2 的条件, 则由 G 的极小性知, G/N 为 p -幂零群. 从而 G 为 p -幂零群, 矛盾. 于是 $N \not\leq \Phi(P)$. 不妨设 $N \not\leq P_1$, 即 $P = NP_1$. 同定理 1 可证 N 为 p 阶循环群. 所以 N 在 P 中有补. 根据文献[14]的定理 17.4 可知, N 在 G 中有补, 即存在 $M \leq G$, 使得 $G = N \rtimes M$. 显然 $N \not\leq \Phi(G)$. 故

$$O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$$

再由引理 4 知

$$O_p(G) = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$$

其中 N_i 为 G 的极小正规子群, 且

$$|N_i| = p \quad i = 1, \dots, r$$

于是

$$P \leqslant C_G(N_i) \quad i = 1, \cdots, r$$

从而

$$P \leqslant \bigcap_{i=1}^r C_G(N_i) = C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G) \leqslant P$$

故 $P = O_p(G)$, 从而 $G = N_G(P)$ 为 p -幂零群, 矛盾.

参考文献:

- [1] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York: Springer, 1982.
- [2] 袁媛, 唐康, 刘建军. S -拟正规嵌入子群与有限群的 p -幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 1-4.
- [3] 高建玲, 毛月梅. 有限群的 δ -置换子群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 105-109.
- [4] 钱焱, 陈贵云. 同阶交换子群个数之集为 $\{1, 3\}$ 的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 100-104.
- [5] KEGEL O H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 78(1): 205-221.
- [6] BALLESTER-BOLINCHES A, PEDRAZA-AGUILERA M C. Sufficient Conditions for Supersolubility of Finite Groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1998, 127: 113-118.
- [7] ASAAD M, HELIEL A A. On S -Quasinormal Embedded Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2001, 165(2): 129-135.
- [8] LI S R, SHEN Z C, LIU J J, et al. The Influence of SS -Quasinormality of Some Subgroups on the Structure of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 2008, 319(10): 4275-4287.
- [9] ZHAO X H, ZHOU L Q, LI S R. On the p -Nilpotence of Finite Groups [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2019, 41: 97-103.
- [10] ZHAO X H, SUI J Z, CHEN R F, et al. On the Supersolvability of Finite Groups [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2020, 46(5): 1485-1491.
- [11] HELIEL A E, HIJAZI R, AL-SHAMMARI S. Finite Groups with Minimal CSS -Subgroups [J]. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 14(3): 1002-1014.
- [12] LI S R, HE X L. On Normally Embedded Subgroups of Prime Power Order in Finite Groups [J]. Communications in Algebra, 2008, 36(6): 2333-2340.
- [13] WANG Y M. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c -Supplemented [J]. Journal of Algebra, 2000, 224(2): 467-478.
- [14] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1967.
- [15] THOMPSON J G. Normal p -complements for finite groups [J]. Journal of Algebra, 1964, 1(1): 43-46.
- [16] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1968.

责任编辑 廖坤