

Schmidt 子群为 Hall S -拟正规嵌入群的有限群^①

郑添尉, 刘建军

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 设 H 是有限群 G 的子群. 如果 H 为 G 的 S -拟正规闭包 H^{sqG} 的 Hall 子群, 则称 H 为 G 的一个 Hall S -拟正规嵌入子群. 如果一个非幂零有限群的任一真子群幂零, 则称这个非幂零群为 Schmidt 群. 该文证明了: 如果有限群 G 的每一个 Schmidt 子群均为 G 中 Hall S -拟正规嵌入子群, 则 G' 幂零.

关键词: Hall S -拟正规嵌入子群; Schmidt 子群; 幂零群

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)09-0019-04

On Finite Groups with Hall S -Quasinormally Embedded Schmidt Subgroups

ZHENG Tianwei, LIU Jianjun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A subgroup H of a finite group G is said to be Hall S -quasinormally embedded in G , if H is also a Hall subgroup of some S -quasinormal subgroup of G . A Schmidt group is a non-nilpotent finite group whose all proper subgroups are nilpotent. In this paper, it has been proved that if each Schmidt subgroup of a finite group G is Hall S -quasinormally embedded in G , then the derived subgroup G' is nilpotent.

Key words: Hall S -quasinormally embedded subgroups; Schmidt subgroups; nilpotent groups

本文所涉及的群均为有限群. Schmidt 子群为所有真子群幂零的非幂零群. 关于 Schmidt 子群的结构及其在有限群理论中的应用见文献[1]. 每个非幂零群都包含 Schmidt 子群, 自然地, Schmidt 子群具有的性质在有限群的研究中扮演着十分重要的角色. 许多学者对其进行了研究, 并获得了丰富的结果. 文献[2]研究了所有 Schmidt 子群均为次正规群的有限群的结构. 文献[3]对这类群做了更深入的研究. 文献[4-5]分别研究了所有 Schmidt 子群均为 Hall 子群和 Hall 正规嵌入子群(如果群 G 的子群 H 为 H^G 的 Hall 子群, 则称 H 为 G 的 Hall 正规嵌入子群)的有限群的结构.

文献[6]引入了 Hall S -拟正规嵌入子群的概念: 设 H 为 G 的子群, 如果 H 为 G 中的 S -拟正规闭包 H^{sqG} 的 Hall 子群, 则称 H 为 G 的一个 Hall S -拟正规嵌入子群. 其中, H^{sqG} 指 G 中包含 H 的所有 S -拟正

① 收稿日期: 2022-03-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971391); 中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052).

作者简介: 郑添尉, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

通信作者: 刘建军, 副教授.

规子群(与群 G 的所有 Sylow 子群可置换)的交. 由于 S -拟正规子群的交仍为 S -拟正规子群, 故 $H^{\text{sq}G}$ 为 G 的 S -拟正规子群. 显然 $H^{\text{sq}G} \leq H^G$. Hall S -拟正规嵌入子群是比 Hall 正规嵌入子群更广泛的一个概念^[6].

本文继续研究了 Schmidt 子群的嵌入性对群结构的影响. 得到了: 当 G 的每个 Schmidt 子群都为 Hall S -拟正规嵌入子群时, G 的导子群幂零. 本文的结论推广了已有相关文献的结论.

本文所涉及的所有术语和符号都是标准的(见文献[1]).

引理 1^[2] 假定 G 是有限群, 则下列命题成立:

- (i) 如果 G 没有 p -闭的 Schmidt 子群, 则 G 是 p -幂零群;
- (ii) 如果 G 没有偶数阶 2 -幂零的 Schmidt 子群, 则 G 是 2 -闭群;
- (iii) 如果 p -可解群 G 没有含素因子 p 的 p -幂零的 Schmidt 子群, 则 G 是 p -闭群.

引理 2^[6] 设 H 是群 G 中的 Hall S -拟正规嵌入子群, 则下列命题成立:

- (i) 如果 $H \leq M \leq G$, 那么 H 是 M 中的 Hall S -拟正规嵌入子群;
- (ii) 如果 $N \trianglelefteq G$, 那么 HN/N 是 G/N 中的 Hall S -拟正规嵌入子群.

根据文献[2], 我们规定, $S_{\langle p, q \rangle}$ 指具有正规 Sylow p -子群 P 和非正规 Sylow q -子群 Q 的 Schmidt 群.

引理 3 假设 K 和 D 是群 G 的子群, 且 $D \trianglelefteq K$. 如果 K/D 为 $S_{\langle p, q \rangle}$ -群, 则 D 在 K 中有一个满足 $K = DL$ 的最小阶子群 L , 并有:

- (i) L 是一个 p -闭的 $\{p, q\}$ -子群;
- (ii) L 的所有真正规子群幂零;
- (iii) L 中包含一个 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群 $P \rtimes Q$, 使得 D 不包含 Q , 并且 $L = (P \rtimes Q)^L = Q^L$;
- (iv) 如果 L 中的 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群 $P \rtimes Q$ 是 $(P \rtimes Q)^{\text{sq}G}$ 的 Hall 子群, 则 $L = P \rtimes Q$.

证 (i) — (iii) 的证明由文献[2]的引理 2 给出. 下证(iv)成立.

设 $P \rtimes Q$ 是 $(P \rtimes Q)^{\text{sq}G}$ 的 Hall 子群, 由引理 2 得, $P \rtimes Q$ 是 $(P \rtimes Q)^{\text{sq}L}$ 的 Hall 子群. 又由

$$\pi(L) = \pi(P \rtimes Q) = 2$$

得

$$P \rtimes Q = (P \rtimes Q)^{\text{sq}L}$$

因此 $P \rtimes Q$ 在 L 中为 S -拟正规的, 故由文献[7]的引理 2 可知, $P \rtimes Q$ 在 L 中为次正规的. 由此知 $P \rtimes Q$ 包含在 L 的一个正规子群中. 但由(ii)知, L 的所有真正规子群幂零, 这与 $P \rtimes Q$ 为 Schmidt 群矛盾. (iv) 得证.

引理 4 设群 G 中每个 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群是 Hall S -拟正规嵌入子群, 则下列命题成立:

- (i) 如果 $H \leq G$, 那么 H 中的每个 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群在 H 中是 Hall S -拟正规嵌入的.
- (ii) 如果 $N \trianglelefteq G$, 那么 G/N 中的每个 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群在 G/N 中是 Hall S -拟正规嵌入的.

证 (i) 假设 A 是 H 中的 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群. 则由引理 4 的条件及引理 2 得, A 在 H 中是 Hall S -拟正规嵌入的.

(ii) 假设 K/N 是 G/N 中的 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群, 由引理 3 知, N 在 K 中存在一个极小补子群 L , 且 L 为 G 的 Schmidt 子群. 由引理 4 的条件及引理 2 得, $K/N = LN/N$ 在 G/N 中是 Hall S -拟正规嵌入的.

引理 5^[4] 如果 H 是由群 G 中的所有 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群生成, 则 G/H 中无 $S_{\langle p, q \rangle}$ -子群.

引理 6^[5] 令群 G 为 p -可解群. 假设 G 的任一真子群和真同态像的 p -长不超过 1, 而 $l_p(G) > 1$. 则:

- (i) $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$;
- (ii) G 有唯一极小正规子群 $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$;
- (iii) $l_p(G) = 2$;
- (iv) $G = N \rtimes S$, 其中 $S = Q \rtimes P$ 为一个 p -幂零的 Schmidt 子群, 且 $|P| = p$.

引理 7^[5] 令 $n \geq 2$ 为一个正整数, r 为一个素数, π 为一个素数集合. 假设对任意的 $t \in \pi$ 且对任意的 n_1 , 当 $1 \leq n_1 < n$ 时, 满足 $t \mid r^n - 1$, $t \nmid r^{n_1} - 1$ 成立, 则群 $GL(n, r)$ 包含一个循环的 π Hall-子群.

定理 1 假设群 G 中每个 Schmidt 子群都为 G 中的 Hall S-拟正规嵌入子群, 则 G' 幂零.

证 为证明定理 1, 我们按照以下步骤证明:

步骤 1 G 可解.

由奇阶群可解定理知, 仅需考虑 G 为偶数阶群的情况. 如果 G 不可解, 由引理 1(ii) 可知, 在 G 中存在 2- 幂零的偶阶 Schmidt 子群 A . 令 $A = P \rtimes Q$, 其中 P 为正规的 Sylow p - 子群且 $p > 2$, Q 为非正规的循环 2- 群. 由定理 1 的条件知, A 是 G 的 Hall S-拟正规嵌入子群, 因此 A 为 $A^{\text{sq}G}$ 的 Hall 子群, 故 Q 为 $A^{\text{sq}G}$ 的 Sylow q - 子群. 由此知, $A^{\text{sq}G}$ 有循环的 Sylow 2- 子群, 则 $A^{\text{sq}G}$ 为 2- 幂零群. 由 $A^{\text{sq}G}$ 在 G 中为 S-拟正规的, 可知 $A^{\text{sq}G}$ 在 G 中为次正规子群, 故 $A^{\text{sq}G} \leq D$, 其中 D 为群 G 中最大的正规 2- 幂零子群. 对任意的 $g \in G$, $(A^{\text{sq}G})^g$ 在 G 中为次正规的, 且 $(A^{\text{sq}G})^g$ 为 2- 幂零群, 则 $(A^{\text{sq}G})^g \leq D$, 故

$$\langle (A^{\text{sq}G})^g : g \in G \rangle = (A^{\text{sq}G})^G \leq D$$

从而 $(A^{\text{sq}G})^G$ 是 G 的 2- 幂零子群. 令 H 为群 G 中所有 $(A^{\text{sq}G})^G$ 的乘积, 其中 A 为 G 的任一 2- 幂零偶数阶 Schmidt 子群, 故 $H \trianglelefteq G$, 且 H 为 G 的 2- 幂零子群. 由引理 5 得, G/H 中不包含 2- 幂零的偶数阶 Schmidt 子群, 则由引理 1 知, G/H 为 2- 闭群, 故 G/H 可解, 从而 G 可解. 矛盾.

步骤 2 $l_p(G) = 1$, 这里 p 为 $\pi(G)$ 中的任意元.

设 G 为一个极小阶反例. 由引理 4 知, 定理 1 的条件对子群、商群是遗传的. 故对 G 的任一真子群和真同态像 p - 长为 1. 根据 G 的极小性, $l_p(G) > 1$, 由引理 6 知

$$\begin{aligned} G &= N \rtimes S & \Phi(G) &= O_{p'}(G) = 1 \\ N &= O_p(G) = F(G) = C_G(N) \end{aligned}$$

其中 $S = Q \rtimes P$ 为 G 的极大子群且为 G 的 Schmidt 子群. 由已知得, S 为 $S^{\text{sq}G}$ 的 Hall 子群, 则仅有 $S = S^{\text{sq}G}$ 或 $S^{\text{sq}G} = G$ 成立. 若 $S = S^{\text{sq}G}$, 则 S 在 G 中为次正规的. 又由 S 的极大性得 $S \trianglelefteq G$. 所以 $S^{\text{sq}G} = G$. 于是 S 为 G 的 Hall 子群, 即 $N \leq S$. 这个矛盾说明: 对任意 $p \in \pi(G)$, $l_p(G) = 1$.

步骤 3 完成证明.

事实上, 仅需证明 G 满足 $G \in \text{NA}$, 其中 NA 为导群幂零的群类.

假设 G 为极小阶反例. 由文献[8]知, NA 为饱和群系. 且由 G 的极小性知 $\Phi(G) = 1$. 设 N_1 和 N_2 为 G 的极小正规子群, 则 $G/N_1, G/N_2 \in \text{NA}$, 从而

$$G \cong G/N_1 \cap N_2 \in \text{NA}$$

矛盾. 因此, G 有唯一极小正规子群. 又由 G 可解和 $\Phi(G) = 1$, 得 $N = C_G(N)$. 此时由文献[9]的定理 3.3 知 G 为本原群. 由文献[10]的定理 1.8 得

$$G = N \rtimes M \quad F(G) = N = C_G(N) \quad O_p(M) = 1$$

其中 $p \in \pi(G)$, N 为 p - 群且为 G 的极小正规子群, M 为 G 的极大子群. 由 $l_p(G) = 1$ 得, N 为 G 的 Sylow p - 子群. 令

$$\pi = \pi(M) = \pi(G) - \{p\} \quad r \in \pi$$

设 R 为 G 的 Sylow r - 子群, 故 $N \rtimes R$ 不为 p - 幂零群. 根据引理 1(iii) 得, $N \rtimes R$ 中存在 p - 闭的 Schmidt 子群 $H = N_1 \rtimes R_1$. 由定理 1 的假设知, G 中存在 H 的 S-拟正规闭包 $H^{\text{sq}G}$ 且 H 为 $H^{\text{sq}G}$ 的 Hall 子群. 设 $H^{\text{sq}G} = K$. 由定义可知, K 在 G 中为 S-拟正规的. 由文献[11]的定理 1.2.14 得 K^G/K_G 为幂零群, 故 K/K_G 为幂零群, 从而 $N \leq K$. 再由 H 为 K 的 Hall 子群得

$$(|H|, p) \neq 1 \quad N \trianglelefteq G \quad N \leq K$$

这表明 N 为 K 的 Sylow p - 子群, 故 $|N| = |H|_p$, 从而 $N = N_1$. 此时 $\Phi(N) = 1$, 则

$$|N/\Phi(N)| = |N| = p^n$$

由 Schmidt 群的结构知, 假设对任意的 $r \in \pi$ 和任意的 n_1 , 当 $1 \leq n_1 < n$ 时, 满足

$$r \mid p^n - 1 \quad r \nmid p^{n_1} - 1$$

故由引理 7 得, $GL(n, p)$ 中包含一个循环的 Hall π -子群 H , 又由

$$M \cong G/N \lesssim GL(n, p)$$

知, 存在 $x \in GL(n, p)$, 使得 $M \leq H^x$, 这意味着 M 循环. 从而 G 的导子群包含在一个交换群中, 故 G 为幂零的. 矛盾.

推论 1^[5] 假设群 G 中每个 Schmidt 子群都为 G 中的 Hall 正规嵌入子群, 则 G' 幂零.

注 1 定理 1 和推论 1 中的条件并不等价. 也就是说, 条件“群 G 的所有 Schmidt 子群都是 G 的 Hall S -拟正规嵌入子群”并不能推出“群 G 的所有 Schmidt 子群都是 G 的 Hall 正规嵌入子群”. 如: 令 G 为 24 阶二面体群 D_{24} . 显然 G 中存在非平凡的 Schmidt 子群 H , 这意味着 $H \cong S_3$. 而 H 是 G 的 S -拟正规子群, 故也是 G 的 Hall S -拟正规嵌入子群. 所以 G 中所有的 Schmidt 子群都是 G 的 Hall S -拟正规嵌入子群. 然而, H 不是 $H^G \cong D_{12}$ 的 Hall 子群, 也就是说 G 中所有的 Schmidt 子群都不是 G 的 Hall 正规嵌入子群.

参考文献:

- [1] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [2] KNIAHINA V N, MONAKHOV V. Finite Groups with Subnormal Schmidt Subgroups [J]. Siberian Mathematical Journal, 2004, 45(6): 1075-1079.
- [3] VEDERNIKOV V A. Finite Groups with Subnormal Schmidt Subgroups [J]. Algebra and Logic, 2007, 46(6): 363-372.
- [4] KNIAHINA V N, MONAKHOV V S. Finite Groups with Hall Schmidt Subgroups [J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2012, 81(3-4): 341-350.
- [5] KNIAHINA V N, MONAKHOV V S. On Finite Groups with Hall Normally Embedded Schmidt Subgroups [J]. Algebra and Discrete Math, 2018, 26(1): 90-96.
- [6] LIU J J, LI S R. CLT-Groups with Hall S -Quasinormally Embedded Subgroups [J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2015, 66(8): 1281-1288.
- [7] 袁媛, 唐康, 刘建军. S -拟正规嵌入子群与有限群的 p -幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 1-4.
- [8] DOERK K, HAWKES T O. Finite Soluble Groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
- [9] HUPPERT B. Endliche Gruppe I [M]. New York: Springer-Verlag, 1967.
- [10] GASCHUTZ W. Lectures of Subgroups of Sylow Type in Finite Soluble Groups [M]. Canberra: Australian National University Press, 1979.
- [11] BALLESTER-BOLINCHES A, ESTEBAN-ROMERO R, ASAAD M. Products of Finite Groups [M]. New York: Walter de Gruyter, 2010.

责任编辑 廖坤