DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.09.006

# Tu 方程的留数对称及其精确解[①]

吕梓帆

西北大学 数学学院,西安 710127

**摘要**:研究了 Tu 方程的非局域留数对称,并利用 Lie 定理将其局域化为对应延拓系统的 Lie 点对称,得到相应延拓系统的对称群变换定理. 最后,分析 Tu 方程的 CRE 可解性,构造出该系统的 Bäcklund 变换定理和新的相互作用解,并作图进行了描述.

**关 键 词**:留数对称;Bäcklund 变换;Lie 点对称;CRE 可解性;孤立波解

**中图分类号**:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2022)09-0023-07

# Residual Symmetries and Exact Solutions of Tu Equations

LYU Zifan

*School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*

**Abstract**: In this paper, the nonlocal residual symmetries and Bäcklund transformation of the Tu equations have been obtained based on the Painlevé truncated expansion method. By means of the Lie theorem, the nonlocal residual symmetries of the Tu equations has been localized into the Lie point symmetries with corresponding extended systems. Then the finite symmetries of the Tu equations have been obtained. Finally, the consistent Riccati expansion solvability of the Tu equations is proved, and the solitary wave solutions of the equations is obtained.

**Key words**: residual symmetries; Bäcklund transformation; Lie point symmetries; consistent Riccati expansion solvability; solitary wave solutions

许多物理现象都可以用非线性演化方程来描述,一直以来受到学者的广泛关注和研究. 科学家们运用了各种方法来构造非线性系统的解,并研究发现利用对称方法构造其精确解是一种很有效的方法[1-2]. 文献[3]发现非线性系统 Painlevé 截断展开的奇异流形的留数是非局域对称,称之为留数对称[3]. 目前,很多方程都可以利用上述方法进行对称约化,如 Korteweg-de Vries 方程、Kadomtsev-Petviashvili 方程、Burgers 方程、色散长波方程等[4-11].

本文主要对 Tu 方程

$$\begin{cases} u_t - u_x - 2v = 0, \\ v_t + 2uv = 0, \end{cases} \tag{1}$$

进行研究,这是文献[12]在对 Loop 代数$\widetilde{A_1}$进行分析后得到的一族新的可积系统,具有 Painlevé 可积性质、

---

① 收稿日期:2021-02-23

基金项目:国家自然科学基金项目(11775047).

作者简介:吕梓帆,硕士研究生,主要从事非线性发展方程与可积系统研究.

Hamilton结构和无穷多守恒律等性质，有重要的研究及应用价值. 文献[13-14]利用Tu方程的Painlevé截断展开性质，得到了系统的一些精确解[13-14]. 文献[15]研究了Tu孤子族换位表示的一般结构[15]. 文献[16]得到了Tu方程的几何对称结构[16]. 本文主要研究Tu方程(1)的留数对称，得到方程新的Bäcklund变换，然后证明Tu方程的CRE可解性，并得到该方程的孤立波解.

## 1 非局域留数对称及Bäcklund变换

Tu方程(1)的Painlevé截断展开式为

$$\begin{cases} u = u_0 + \dfrac{u_1}{f}, \\ v = v_0 + \dfrac{v_1}{f} + \dfrac{v_2}{f^2}, \end{cases} \tag{2}$$

其中：$f$ 表示奇异流形；$u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, f$ 都是关于 $x, t$ 的函数.

将展开式(2)代入到式(1)中，合并 $f$ 的同次幂，有

$$\begin{cases} u_{0t} - u_{0x} - 2v_0 + \dfrac{u_{1t} - u_{1x} - 2v_1}{f} + \dfrac{-u_1 f_t + u_1 f_x - 2v_2}{f^2} = 0, \\ v_{0t} + 2u_0 v_0 + \dfrac{v_{1t} + 2u_0 v_1 + 2u_1 v_0}{f} + \dfrac{2u_0 v_2 + 2u_1 v_1 - v_1 f_t + v_{2t}}{f^2} + \dfrac{2v_2(u_1 - f_t)}{f^3} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

令其各次幂项的系数都为零，可解出系数：

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{f_{tt}}{2f_t},\ u_1 = f_t, \\ v_0 = \dfrac{f_{tt}^2 - f_{tt} f_{tx} - f_t f_{ttt} + f_t f_{ttx}}{4f_t^2},\ v_1 = \dfrac{f_{tt} - f_{tx}}{2},\ v_2 = \dfrac{f_t(f_x - f_t)}{2}, \end{cases} \tag{4}$$

同时 $f$ 需要满足下面的Schwarzian形式：

$$S_t - S_x = 0,\ S = \frac{f_{ttt}}{f_t} - \frac{3f_{tt}^2}{2f_t^2} \tag{5}$$

根据展开式(3)，如果$\{u, v\}$是方程(1)的解，则 $f$ 的零次幂的系数为零的表达式说明$\{u_0, v_0\}$也满足Tu方程(1)，从而得到如下自Bäcklund变换定理[3]：

**定理1** 如果$\{u, v\}$是Tu方程(1)的解，则

$$\begin{cases} u_0 = u - \dfrac{f_t}{f}, \\ v_0 = v - \dfrac{f_{tt} - f_{tx}}{2f} - \dfrac{f_t(f_x - f_t)}{2f^2}, \end{cases} \tag{6}$$

就是方程(1)的一个自Bäcklund变换.

我们知道，Schwarzian方程(5)在Möbious变换

$$f \to \frac{af + b}{cf + d}(ad \neq bc)$$

的作用下是形式上保持不变的，即方程(5)容许如下的3种对称：

$$\sigma^f = c_1,\ \sigma^f = c_2 f,\ \sigma^f = c_3 f^2 \tag{7}$$

其中 $c_1, c_2, c_3$ 为任意常数. 特殊地，取 $a = d = 1$，$b = 0$，$c = -\varepsilon$，其中 $\varepsilon$ 为任意群参数，则此时Schwarzian方程(5)式的对称为

$$\sigma^f = f^2 \tag{8}$$

根据上述分析，可以得到Tu方程的非自Bäcklund变换定理如下.

**定理2** 如果 $f$ 是Schwarzian方程(5)的解，则

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{f_{tt}}{2f_t}, \\ v_0 = \dfrac{f_{tt}^2 - f_{tt} f_{tx} - f_t f_{ttt} + f_t f_{ttx}}{4f_t^2}, \end{cases} \tag{9}$$

是 $f$ 和 Tu 方程的解 $\{u_0, v_0\}$ 之间的一个非自 Bäcklund 变换.

## 2　留数对称的局域化

Tu 方程(1) 的对称方程为

$$\begin{cases}\sigma_t^u-\sigma_x^u-2\sigma^v=0,\\ \sigma_t^v+2u\sigma^v+2v\sigma^u=0,\end{cases}\tag{10}$$

与式(3) 中的奇异流形 $f$ 的留数作比较，可以知道 $\{u_1, v_1\}$ 为 Tu 方程(1) 的解 $\{u_0, v_0\}$ 的留数对称，即：

$$\begin{cases}\sigma^{u0}=f_t,\\ \sigma^{v0}=\dfrac{f_{tt}-f_{tx}}{2},\end{cases}\tag{11}$$

其中 $\{u_0, v_0\}$ 和 $f$ 满足非自 Bäcklund 变换(7). 为了方便表示，不失一般性，本节我们用 $\{u, v\}$ 代替 $\{u_0, v_0\}$ 进行描述. 为将留数对称进行约化，首先对其进行局域化，解决如下初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\hat{f}_t,\ \hat{u}(0)=u,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{v}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{\hat{f}_{tt}-\hat{f}_{tx}}{2},\ \hat{v}(0)=v,\end{cases}\tag{12}$$

其中 $\varepsilon$ 为群参数. 将 Tu 方程进行适当延拓，引入辅助变量：

$$g=f_t,\ l=f_x,\ h=g_t,\ k=g_x\tag{13}$$

则解 $\{u, v\}$ 的非局域留数对称(11) 可以被局域化，得到延拓系统(1),(5),(13) 的 Lie 点对称，即：

$$\begin{gathered}\sigma^u=g,\ \sigma^v=\frac{h+k}{2},\ \sigma^f=f^2,\ \sigma^g=2fg,\\ \sigma^l=2fl,\ \sigma^h=2(g^2+fh),\ \sigma^k=2(lg+fk),\end{gathered}\tag{14}$$

相应的 Lie 点对称的向量场表达式为

$$V=g\partial_u+\frac{h+k}{2}\partial_v-f^2\partial_f-2fg\partial_g-2fl\partial_l-2(g^2+fh)\partial_h-2(lg+fk)\partial_k\tag{15}$$

解如下初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\hat{f}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=-\hat{f}(\varepsilon)2,\ \hat{f}(0)=f,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{g}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=2\hat{f}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon),\ \hat{g}(0)=g,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{l}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=2\hat{f}(\varepsilon)\hat{l}(\varepsilon),\ \hat{l}(0)=l,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{h}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=2(\hat{g}(\varepsilon)2+\hat{f}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon)),\ \hat{h}(0)=h,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{k}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=2(\hat{l}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon)+\hat{f}(\varepsilon)\hat{k}(\varepsilon)),\ \hat{k}(0)=k,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{u}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\hat{g}(\varepsilon),\ \hat{u}(0)=u,\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{v}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{\hat{h}(\varepsilon)+\hat{k}(\varepsilon)}{2},\ \hat{v}(0)=v,\end{cases}\tag{16}$$

可得到下面的对称群变换定理.

**定理 3**(对称群变换定理)　如果 $\{u, v, f, g, l, h, k\}$ 是方程(1),(5),(13) 的解，则 $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{l},$

$\hat{h}$，$\hat{k}$} 也是其解，其中

$$\begin{cases}\hat{f}(\varepsilon)=\dfrac{f}{1-\varepsilon f},\\ \hat{g}(\varepsilon)=\dfrac{g}{(1-\varepsilon f)^2},\\ \hat{l}(\varepsilon)=\dfrac{l}{(1-\varepsilon f)^2},\\ \hat{h}(\varepsilon)=\dfrac{h}{(1-\varepsilon f)^2}+\dfrac{2\varepsilon g^2}{(1-\varepsilon f)^3},\\ \hat{k}(\varepsilon)=\dfrac{k}{(1-\varepsilon f)^2}+\dfrac{2\varepsilon gl}{(1-\varepsilon f)^3},\\ \hat{u}(\varepsilon)=u+\dfrac{\varepsilon g}{1-\varepsilon f},\\ \hat{v}(\varepsilon)=v+\dfrac{\varepsilon(h-k)}{2(1-\varepsilon f)}-\dfrac{\varepsilon(g^2-gl)}{f(1-\varepsilon f)}+\dfrac{g^2-gl}{2f^2(1-\varepsilon f)^2}.\end{cases}\tag{17}$$

## 3 CRE 可解性及精确解结论

根据 CRE 方法，Tu 方程(1) 的解有如下展开式：

$$\begin{cases}u=u_0+\dfrac{u_1}{R(w)},\\ v=v_0+\dfrac{v_1}{R(w)}+\dfrac{v_2}{R^2(w)},\end{cases}\tag{18}$$

其中 $w=w(x,t)$，$R(w)$ 是 Riccati 方程：

$$R_w=l_0+l_1R+l_2R^2\tag{19}$$

的解，$l_0,l_1,l_2$ 是任意常数. 将表达式(18) 和(19) 代入方程(1) 中，令 $R(w)$ 的各次幂前面的系数为零，可得

$$\begin{cases}u_0=\dfrac{l_1w_t^2-w_{tt}}{2w_t},\ u_1=l_0w_t,\\ v_0=\dfrac{w_tw_{ttx}-w_tw_{ttt}+w_{tt}^2+(l_0w_t^2-w_{tx})w_{tt}-(l_0w_{tx}+2l_0l_2w_tw_t^2(w_t-w_x))}{4w_t^2},\\ v_1=\dfrac{l_0(l_1w_tw_x+w_{tx}+w_{tt}-l_1w_t^2)}{2},\ v_2=\dfrac{w_{tt}-l_0w_t(w_t-w_x)}{2},\end{cases}\tag{20}$$

同时，函数 $w$ 满足下面方程：

$$S_x-S_t-\delta w_t(w_{tt}-w_{tx})=0,\ S=\frac{f_{ttt}}{f_t}-\frac{3f_{tt}^2}{2f_t^2},\ \delta=4l_0l_2-l_1^2\tag{21}$$

由此可知，Tu 方程(1) 是 CRE 可解的.

根据孤立波解通常可用双曲函数表示的特点，我们可将该方程用 tanh 函数展开方法求解. 取式(19) 中 $l_0=1$，$l_1=0$，$l_2=-1$，此时 Riccati 方程的特解为

$$R(w)=\tanh(w)\tag{22}$$

那么可以得到

$$\begin{cases}u=\dfrac{-w_{tt}}{2w_t}+\dfrac{w_t}{\tanh(w)},\\ v=\dfrac{-w_tw_{ttt}+w_tw_{ttx}+w_{tt}^2+(w_t^2-w_{tx})w_{tt}-w_{tx}+2w_tw_t^2(w_t-w_x)}{4w_t^2}+\\ \qquad\dfrac{w_{tx}+w_{tt}}{2\tanh(w)}-\dfrac{w_t(w_t-w_x)-w_{tt}}{2\tanh^2(w)},\end{cases}\tag{23}$$

此时我们称 Tu 方程是 CTE 可解的.

为了得到 Tu 方程的精确解，我们考虑以下两种特殊情形，说明 Tu 方程的孤立波解的具体形式.

**例 1**　考虑 $w$ 为如下形式：

$$w=kx+ht+b \tag{24}$$

其中 $k,h,b$ 为任意常数，将其代入式(18)及式(1)中，令 $R(w)$ 的所有次幂的系数为零，得到代数方程组如下：

$$\begin{cases}-hu_1+ku_1-2v_2=0,\\ u_{1t}-u_{1x}-2v_1=0,\\ -2hv_2+2u_1v_2=0,\\ 2u_1v_1-hv_1+2u_0v_2+v_{2t}=0,\\ 2u_0v_1+2hv_2+2u_1v_0+v_{1t}=0,\end{cases} \tag{25}$$

通过解上述方程组，得到一组非平凡解为

$$u_0=0,\ u_1=h,\ v_0=\frac{h(h-k)}{2},\ v_1=0,\ v_2=-\frac{h(h-k)}{2} \tag{26}$$

由此得到 Tu 方程(1)的孤立波解为

$$\begin{cases}u=h\tanh(kx+ht+b),\\ v=\dfrac{h(h-k)}{2\cosh(kx+ht+b)^2}.\end{cases} \tag{27}$$

取参数值$\{k=1,\ h=3,\ b=0\}$，利用 MAPLE 软件，我们得到孤立波相互作用解的波形图. 图 1 为解 $u$ 的波形图，是反扭结型孤立波，图 2 为解 $v$ 的波形图，是钟型孤立波.

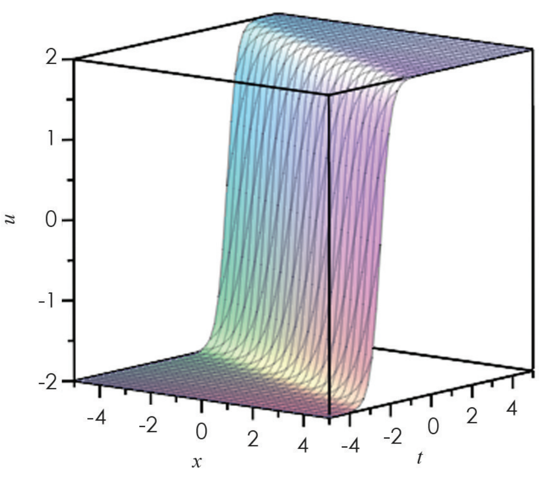


图 1　在例 1 条件下解 $u$ 的波形图

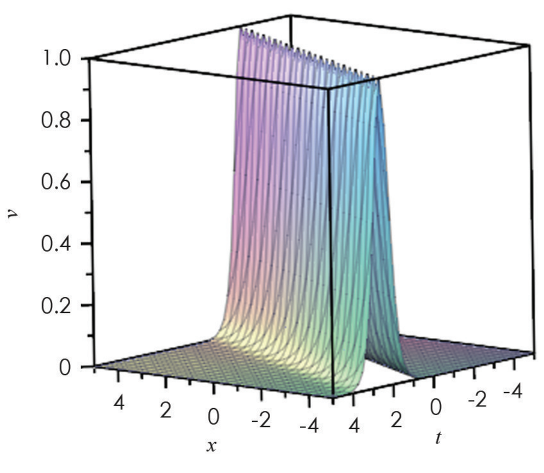


图 2　在例 1 条件下解 $v$ 的波形图

**例 2**　我们考虑 $w$ 具有如下形式：

$$w=k_1x+h_1t+W(X),\ X=k_2x+h_2t \tag{28}$$

其中 $k_1,k_2,h_1,h_2$ 都是任意常数，将式(28)代入式(21)中，我们发现 $W_1=W_X$ 满足如下椭圆方程：

$$W_{1X}^2=C_0+C_1W_1+C_2W_1^2+C_3W_1^3+C_4W_1^4 \tag{29}$$

式中

$$\begin{aligned}C_0&=\frac{h_1^2(-12h_1^2l_0l_2+3h_1^2l_1^2+C_2h_2^2-2C_3h_1h_2)}{h_2^4}\\ C_1&=\frac{h_1(-16h_1^2l_0l_2+4h_1^2l_1^2+2C_2h_2^2-3C_3h_1h_2)}{h_2^3}\\ C_4&=-4l_0l_2+l_1^2\end{aligned} \tag{30}$$

其中 $h_1, h_2, C_2, C_3$ 为任意常数. 则 Tu 方程的解具有如下形式:

$$\begin{cases} u=-\dfrac{h_2^2 W_{1X}}{2h_1+2h_2W_{1X}}+\dfrac{h_1+h_2W_1}{R(w)} \\ v=-\dfrac{(4h_2(h_2-k_2)W_1+C_3h_2^2+(4k_1-12h_1-C_3k_2)h_2+8h_1k_2)(h_1+h_2W_1)}{8h_2}+ \\ \qquad \dfrac{h_2(h_2-k_2)W_{1X}}{2R(w)}-\dfrac{(h_1+h_2W_1)((h_2-k_2)W_1+h_1-k_1)}{2R(w)^2} \end{cases} \tag{31}$$

接下来讨论方程(1)的非线性波之间的相互作用解. 取方程(29)的解 $W$ 为如下形式:

$$W=\mathrm{sn}(X, m), \ X=k_2x+h_2t \tag{32}$$

其中 $\mathrm{sn}(X, m)$ 为椭圆函数, 联立式(1),(28),(32)可解得系数的一组非平凡解为:

$$\begin{cases} u_0=-h_2(k_1x+h_1t), \\ u_1=h_2, \\ v_0=\dfrac{h_2(k_2-h_2)(k_1x+h_1t+1)(k_1x+h_1t-1)}{2}, \\ v_1=h_2(h_2-k_2)(k_1x+h_1t), \ v_2=\dfrac{h_2(k_2-h_2)}{2}, \end{cases} \tag{33}$$

因此方程的解为

$$\begin{cases} u=h_2\mathrm{sn}(h_2t+k_2x, m), \\ v=\dfrac{h_2(\mathrm{sn}(h_2t+k_2x, m)-1)(\mathrm{sn}(h_2t+k_2x, m)+1)(k_2-h_2)}{2}. \end{cases} \tag{34}$$

参数取值为 $\{m=0.999, k_2=1, h_2=3\}$, 利用 MAPLE 软件, 我们得到 Tu 方程(1)解的波形图, 其中: 图 3 为解 $u$ 的波形图, 描述了椭圆周期波和反扭结型孤立波的相互作用; 图 4 为解 $v$ 的波形图, 描述了椭圆周期波和钟型孤立波的相互作用.

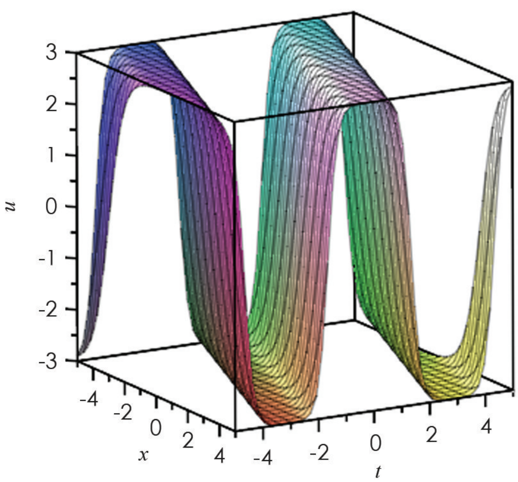


图 3 在例 2 条件下解 $u$ 的波形图

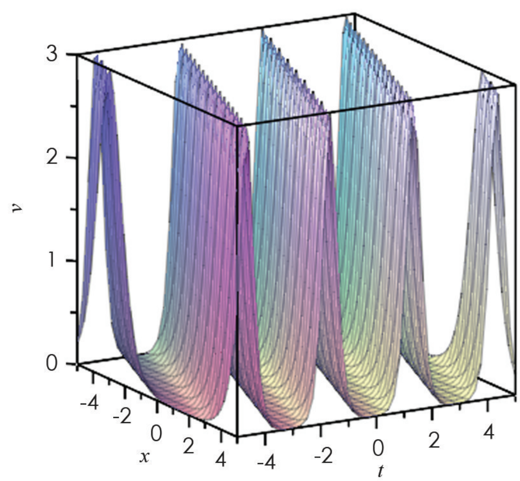


图 4 在例 2 条件下解 $v$ 的波形图

## 4 结束语

本文首先得到 Tu 系统的非局域留数对称, 并分析其 Bäcklund 变换, 通过引入合适的新变元将其局域化后利用 Lie 的第一基本定理得到了有限变换定理. 之后说明了 Tu 系统具有 CRE 可解性, 并利用 MAPLE 软件作图描述 Tu 系统的不同形状的孤立波和周期波之间的相互作用.

**参考文献：**


[1] OLVER P. Applications of Lie Groups to Differential Equations [J]. Acta Applicandae Mathematica，1986，20：312-315.

[2] 楼森岳. 非线性科学中的对称性研究及其应用 [J]. 宁波大学学报(理工版)，2020，33(5)：1-2.

[3] LOU S. Residual Symmetries and Bäcklund Transformations [EB/OL]. (2013-09-05)[2020-10-12]. https：//arxiv. org/abs/1308. 1140.

[4] 程雪苹. 非线性系统的非局域对称及其应用 [J]. 宁波大学学报(理工版)，2020，33(5)：68-76.

[5] CHEN C L，LOU S Y. CTE Solvability，Nonlocal Symmetries and Exact Solutions of Dispersive Water Wave System [J]. Communications in Theoretical Physics，2014，61(5)：545-550.

[6] JIN Y，JIA M，LOU S Y. Nonlocalization of Nonlocal Symmetry and Symmetry Reductions of the Burgers Equation [J]. Communications in Theoretical Physics，2012，58(6)：795-799.

[7] 程文广. 若干(2+1)-维非线性方程的非局域对称、精确解与可积性 [D]. 宁波：宁波大学，2015.

[8] WU H L，SONG J F，ZHU Q Y. Nonlocal Residual Symmetries and Exact Interaction Solutions for the Generalized Dispersive Water Waves System [J]. Applied Mathematics Letters，2020，105：106336.

[9] 章超艳，李彪. (2+1)维色散长波方程的非局域对称及相容 Riccati 展开可积性 [J]. 应用数学与计算数学学报，2016，30(4)：618-626.

[10] 费金喜，应颖洁，雷燕. (2＋1)维 Boiti-Leon-Pempinelli 方程系统的对称约化和精确解 [J]. 丽水学院学报，2014，36(5)：8-14.

[11] 葛楠楠，任晓静. (2＋1)维 Kadomtsev-Petviashvili 方程的留数对称及其相互作用解 [J]. 应用数学，2019，32(4)：778-784.

[12] 屠规彰. 一族新的可积系及其 Hamilton 结构 [J]. 中国科学 (a 辑 数学 物理学 天文学 技术科学)，1988，18(12)：1243-1252.

[13] 马文秀. Painleve 分析产生的 Tu 系统的精确解 [J]. 复旦学报(自然科学版)，1994，33(3)：319-326.

[14] 陈志雄. Tu 和 Boiti-Tu 方程的 Painlevé 性质及其 auto-Bäcklund 变换 [J]. 应用数学与计算数学学报，1990，4(2)：71-76.

[15] 乔志军. 孤子族的生成及换位表示的一般结构 [J]. 应用数学学报，1995，18(2)：287-301.

[16] 王瑞卿，江世璟. Boiti-Tu 方程的相似解 [J]. 燕山大学学报，2000，24(1)：90-92.


**责任编辑　张枸**