

具有时滞效应的 SIS 模型的动力学分析^①

刘志华¹, 曹慧¹, 徐河苗²

1. 陕西科技大学 数学与数据科学学院, 西安 710029; 2. 长治学院 数学系, 山西 长治 046011

摘要: 研究了一类具有媒体报道引起的时滞效应的 SIS 传染病模型的动力学性态. 给出了模型的基本再生数, 分析了无病平衡点和地方病平衡点的存在性、稳定性, 讨论了地方病平衡点不稳定时可能发生的全局 Hopf 分支, 并通过数值模拟展示了所得到的理论结果和模型的复杂动力学性态.

关键词: SIS 模型; 媒体报道; 时滞效应; 稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O175.14

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)09-0037-11

Dynamics Analysis of SIS Model with Time Delay Effect

LIU Zhihua¹, CAO Hui¹, XU Hemiao²

1. School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710029, China;

2. Department of Mathematics, Changzhi University, Changzhi Shanxi 046011, China

Abstract: In this paper, a SIS epidemic model with delay effect has been studied to elaborate the media impact on the dynamics of infectious diseases. The basic reproduction number of the model has been given. The existence and stability of disease-free equilibrium and endemic equilibrium has been analyzed. The global Hopf bifurcation that may occur when the endemic equilibrium is unstable has been discussed. Numerical simulations show the theoretical results and the complex dynamic behavior of the model.

Key words: SIS model; media reports; delay effect; stability; Hopf bifurcation

随着信息和互联网技术的飞速发展, 媒体报道对人们日常生活的影响越来越重要, 尤其在传染病防控方面, 表现更为突出. 以 2020 年全球爆发的新型冠状病毒肺炎(COVID-19)为例, 新闻媒体每日播报的实时疫情数据增长的趋势导致人们关注疫情的发展动态, 并且积极主动配合政府推行的各项防控措施, 包括减少出行、戴口罩、勤洗手、保持社交距离等, 目的在于遏制病毒在人群中的进一步扩散和传播. 可见, 媒体报道在疾病防控中有着举足轻重的作用. 近几年, 已有不少学者借助动力学模型模拟了媒体报道对于传染病传播的影响^[1-13]. 这些文献中的建模思路大致可以分为两大类, 一类是将媒体报道模拟为状态变量如文献[4-8,10]; 另一类则是通过修正传染系数来刻画媒体报道^[1-3,9,11-14]. 对于后者, 已有文献中采用的形式

① 收稿日期: 2021-02-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071268; 11971281).

作者简介: 刘志华, 硕士, 主要从事生物数学研究.

通信作者: 曹慧, 教授, 博士.

包括 $\beta e^{-a_1 E - a_2 I - a_3 H}$, βe^{-aI} , $\left(\beta_1 - \beta_2 \frac{I}{m}\right) + I$ 且 $m > 0$ 以及 $\beta_1 - \beta_2 f(I)$, 其中 E, I 和 H 分别表示媒体报道的潜伏者、染病者和入院治疗的数量. 这些通过修正传染系数来刻画媒体报道的模型都是假设媒体报道对于传染系数的影响是即时的, 也就是 t 时刻报道的感染人数会立刻改变人们的行为. 事实上, 人们通过媒体报道获取到相关信息后, 会经历一个判别过程, 后续根据判别得到的结论再来做出相应的反应. 即 $t - \tau$ ($0 \leq \tau < t$) 时刻报道的感染人数会影响疾病的传播. 因此在本文中, 我们将考虑具有时滞效应的媒体报道对 SIS 传染病模型动力学性态的影响.

1 模型的建立

以流感背景, 并基于经典的 SIS 传染病模型, 将媒体报道的染病人数对疾病发生率的影响用函数 $e^{-aI(t-\tau)}$ 来刻画, 建立如下的模型:

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta e^{-aI(t-\tau)} SI - dS + \gamma I \\ \dot{I} = \beta e^{-aI(t-\tau)} SI - (\mu + \gamma) I \end{cases} \quad (1)$$

其中: $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示 t 时刻的易感染者和染病者人数, Λ 表示易感者的常数输入率, μ 表示自然死亡率, γ 表示染病者的恢复率.

2 模型的适定性及平衡点

在本节中, 我们将先分析模型(1)的解的非负性和有界性, 再借助极限系统理论给出平衡点的存在性.

对于任意 $\tau > 0$, 记 $\bar{C} := C([- \tau, 0], \mathbb{R}^2)$ 是区间 $[- \tau, 0]$ 上的 Banach 空间, 并定义模为 $\bar{C}_+ := C([- \tau, 0], \mathbb{R}_+^2)$. 令 $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ 初始值 $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)) \in \bar{C}_+ \times \bar{C}_+$, $\varphi_i(\theta) > 0$, $i = 1, 2$. 对于模型(1), 先来说明对任意的非负初值 $S(0) = \varphi_1(0) \geq 0$, $I(0) = \varphi_2(0) \geq 0$, $t \in [- \tau, 0]$, 有 $I(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

事实上, 由模型(1)中的第二个方程直接计算可得

$$I(t) = \varphi_2(0) e^{-\int_0^t [\beta e^{-a\varphi(s-\tau)} S(s) - (\mu + \gamma)] ds}, \quad t \in (0, \tau]$$

显然, $I(t) \geq 0$, $t \in (0, \tau]$. 进而, 类似计算得

$$I(t) = I(k\tau) e^{-\int_{k\tau}^t [\beta e^{-aI(s-\tau)} S(s) - (\mu + \gamma)] ds} \geq 0, \quad t \in (k\tau, (k+1)\tau], \quad k = 1, 2, \dots$$

以上分析说明, 对于任意非负初值, 必有 $I(t) \geq 0$, $t \geq 0$ 成立.

下面说明 $S(t) \geq 0$, $t \geq 0$ 成立. 假设 $\exists t_1 > 0$, 使得 $S(t) > 0$, $t \in (0, t_1)$, $S(t_1) = 0$, 且 $S(t) > 0$, $t > t_1$. 则有

$$\frac{dS(t_1)}{dt} = \Lambda + \gamma I(t_1) > 0$$

与 $S(t) < 0$, $t > t_1$ 矛盾. 也就是假设不成立. 即 $S(t) \geq 0$, $t \geq 0$ 成立.

以上分析说明, 模型(1)中任意具有非负初值的解一定是非负的. 下面来说明模型(1)解的有界性. 将模型(1)中的两个方程相加可得

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) = \Lambda - \mu(S(t) + I(t)) \quad (2)$$

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) + I(t)) = \frac{\Lambda}{\mu}$, 记 $N_* = \frac{\Lambda}{\mu}$, 这说明 N_* 是方程(2)的全局渐近稳定的平衡点. 也就是, $\Omega_1 =$

$\{(S, I): S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ 是模型(1)的正向不变集.

另外, 利用再生矩阵的办法^[15]可以得到模型(1)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \gamma)}$$

将 $S(t) = N_* - I(t)$ 代入模型(1), 可得模型(1) 的极限模型

$$\dot{I}(t) = \beta e^{-aI(t-\tau)} (N_* - I(t))I(t) - (\mu + \gamma)I(t) \quad (3)$$

利用极限系统理论可知^[16], 模型(3) 与模型(1) 有相同的动力学性态. 接下来的研究将借助模型(3) 来分析模型(1) 的动力学性态.

为了分析方便, 我们令 $X(t) = \frac{I(t)}{N_*}$, $a = \beta N_*$, $b = \alpha N_*$, $c = (\mu + \gamma)$, 其中 $a, b, c > 0$. 则模型(3) 可重新写为

$$\dot{X} = a e^{-bX(t-\tau)} (1 - X)X - cX \quad (4)$$

相应地, 有 $R_0 = \frac{a}{c}$, 并且模型(4) 的正向不变集为 $\Omega_2 = \{X: 0 \leq X \leq 1\}$. 下面将研究模型(4) 的动力学性态.

显然, 模型(4) 始终有零平衡点 $X_0 = 0$. 为了找到模型(4) 的正平衡点 X_* , 令

$$f(X) = a e^{-bX} (1 - X), X \in [0, 1]$$

通过直接计算可得: $f(0) = a$, $f(1) = 0$, 且 $f'(X) < 0$, 这说明 $a > c$ 时, 也就是, 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(4) 存在唯一的正平衡点 X_* , 满足 $a e^{-bX_*} (1 - X_*) = c$. 即下面的定理成立:

定理 1 模型(4) 始终存在零平衡点 $X_0 = 0$, 并且当 $R_0 > 1$ 时, 模型(4) 还存在唯一的正平衡点 X_* , 满足 $a e^{-bX_*} (1 - X_*) = c$.

事实上, 模型(4) 的零平衡点 X_0 对应模型(1) 的无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$. 而正平衡点 X_* 对应模型(1) 的地方病平衡点 $E_* = \left(\Lambda + \frac{\gamma I_*}{\mu + \beta e^{-aI_*}}, I_*\right)$, $I_* = X_* N_*$. 即, 模型(1) 始终有无病平衡点 E_0 . 而当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1) 还存在唯一的地方病平衡点 E_* .

下面研究模型(4) 的零平衡点和正平衡点的稳定性.

定理 2 如果 $R_0 < 1$, 模型(4) 的零平衡点 X_0 是全局渐近稳定的; 如果 $R_0 > 1$, X_0 是不稳定的.

证 直接计算可得, 模型(4) 在 $X_0 = 0$ 处的特征方程为

$$\lambda - a + c = 0 \quad (5)$$

即 $\lambda = c(R_0 - 1)$. 由 Hurwitz 判据可知, 若 $R_0 < 1$, 有 $\lambda < 0$, 即模型(4) 的零平衡点是局部渐近稳定的. 若 $R_0 > 1$, 则 $\lambda > 0$, 这说明模型(4) 的零平衡点是不稳定的.

下面来证明零平衡点的全局稳定性. 记 $V_1(t) = X(t)$, 则

$$\begin{aligned} V_1' |_{(4)} &= a e^{-bX(t-\tau)} (1 - X)X - cX \leq \\ &= aX - cX = \\ &= cX(R_0 - 1) \end{aligned} \quad (6)$$

显然, 当 $R_0 < 1$ 时, $V_1' |_{(4)} < 0$, 故模型(4) 的零平衡点是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 3 如果 $R_0 > 1$, $\tau = 0$, 那么模型(4) 的正平衡点 X_* 是全局渐近稳定的.

证 直接计算可知, 模型(4) 在 $X = X_*$ 处的特征方程为

$$\lambda + \frac{cX_*}{1 - X_*} + bcX_* e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (7)$$

当 $\tau = 0$ 时, 特征方程(7) 可重新写为

$$\lambda + \frac{cX_*}{1 - X_*} + bcX_* = 0 \quad (8)$$

即特征值 $\lambda = -\frac{cX_* + bcX_*(1-X_*)}{1-X_*}$. 由于 $X_* \in (0, 1)$, 则 $\lambda < 0$ 成立, 进而, 利用 Huiwitz 判据可得 X_* 是局部渐近稳定的.

为了证明正平衡点的全局稳定性, 构造 Lyapunov 函数 $V_2(X) = X - X_* - X_* \ln \frac{X}{X_*}$, 则

$$V'_2|_{(4)} = (X - X_*)(ae^{-bX}(1-X) - c) = -a(X - X_*)2e^{-bX} + a(X - X_*)(e^{-bX} - e^{-bX_*})(1 - X_*) \quad (9)$$

由于 $y = e^{-bX}$ 是一个递减函数, 因此, 有 $(X - X_*)(e^{-bX} - e^{-bX_*}) < 0$ 成立. 也就是, $V'_2|_{(4)} \leq 0$. 另外, 当且仅当 $X = X_*$ 时, $V'_2|_{(4)} = 0$. 这说明 $M = \{X \mid V'_2(x) = 0\} = \{X_*\}$, 也就是, 模型(4)在 M 上的最大不变集就是 $\{X_*\}$. 根据 LaSalle 不变集原理可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(4)的正平衡点 X_* 是全局渐近稳定的. 证毕.

由定理 2 和定理 3 可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(1)的无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E_* 是全局渐近稳定的.

3 Hopf 分支

在本小节中将讨论 $\tau > 0$ 时, 模型(4)可能发生的 Hopf 分支. 为此, 假设 $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$, 代入方程(7)可得

$$\begin{aligned} \frac{cX_*}{1-X_*} + bcX_* \cos\omega\tau &= 0 \\ \omega - bcX_* \sin\omega\tau &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

进而有

$$\begin{aligned} \cos\omega\tau &= \frac{1}{b(X_* - 1)} \\ \sin\omega\tau &= \frac{\omega}{bcX_*} \end{aligned} \quad (11)$$

也即

$$\omega^2 + \frac{c^2 X_*^2}{(X_* - 1)^2} - b^2 c^2 X_*^2 = 0 \quad (12)$$

如果方程(12)有一个正根 ω_0 , 则正平衡点 X_* 的稳定性可能会随着 τ 的改变而改变. 为此, 记 $c_* = e^{-bX_*}$, 则当 $b > 1$ 且 $c_* > e^{1-b}$ 时, 方程(12)存在一个正根

$$\omega_0 = \frac{cX_*}{(1-X_*)} \sqrt{b^2(1-X_*)^2 - 1} \quad (13)$$

进而可得

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \left[\arccos \frac{1}{b(X_* - 1)} + 2k\pi \right] \quad (14)$$

其中 $\tau_k \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

因此,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{1}{-\lambda(\lambda + Q)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

其中 $Q = \frac{cX_*}{1-X_*}$. 进而

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \bigg|_{\tau=\tau_k} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega_0^2 + Q^2} \right] > 0 \quad (15)$$

由于 $\text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=i\omega_0} = \text{sign}\left\{\frac{\text{Re}(d\lambda)}{d\tau}\right\}_{\tau=\tau_k}$. 可得 $\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) > 0$.

利用泛函微分方程的 Hopf 分支理论^[17], 得到下面的结论.

定理 4 假设 $R_0 > 1$,

- (1) 若 $0 < b \leq 1$, 则对任意 $\tau \geq 0$, 模型(4)的正平衡点 X_* 是渐近稳定的;
- (2) 若 $b > 1$, $c_* \leq e^{1-b}$, 则对任意 $\tau \geq 0$, 模型(4)的正平衡点 X_* 是渐近稳定的;
- (3) 若 $b > 1$, $c_* > e^{1-b}$, 则对任意 $\tau \in [0, \tau_0]$, 模型(4)的正平衡点 X_* 是渐近稳定的;
- (4) 若 $b > 1$, $c_* > e^{1-b}$, 则对任意 $\tau \geq \tau_0$, 正平衡点 X_* 是渐近稳定的; 且在 $\tau = \tau_k$, $k=0, 1, 2, \dots$ 时, 模型(4)会在 X_* 处发生 Hopf 分支.

3.1 全局 Hopf 分支的存在性

在本小节中, 将利用文献[18-19]中的全局 Hopf 分支理论来讨论模型(4)产生的局部 Hopf 分支的全局延拓问题. 为此, 引入变换 $y(t) = x(\tau t)$, 模型(4)可被改写为

$$y'(t) = F(y_t, \tau, T) \quad F(y_t, \tau, T) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (16)$$

这里 $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$, $y_t \in X$, $X = C([-1, 0], T)$, 并且

$$y'(t) = \tau a e^{-by(t-1)}(1 - y(t))y(t) - \tau c y(t) \quad (17)$$

引入下面的记号:

$$P = \{(\hat{y}, \tau, T) \mid a e^{-b\hat{y}}(1 - \hat{y}) - c = 0\}$$

$$\Sigma = \text{Cl}\{(y, \tau, T) : y \text{ 是方程(17)的 } T \text{ 周期解}\} \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

记 $C\left(y_t, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k}\right) \in \Sigma$ 是方程(17)的驻解 $\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k}\right)$ 的联通分支, 其中 ω_0 和 τ_k 分别满足(13)式和(14)式.

由文献[19]可知, 如果方程(17)的驻解 $(\hat{y}, \tau, T) \in P$ 有形式为 $im \frac{2\pi}{T} (m \in \mathbb{N}_+)$ 的纯虚特征根, 则称 $(\hat{y}, \tau, T)$ 为中心. 进一步, 如果 $(\hat{y}, \tau, T)$ 是其领域内唯一的中心, 并且只有有限个形式为 $im \frac{2\pi}{T} (m \in \mathbb{N}_+)$ 的特征根, 则称 $(\hat{y}, \tau, T)$ 为孤立中心. 令 $J(\hat{y}, \tau, T)$ 为使得 $im \frac{2\pi}{T}$ 是孤立中心 $(\hat{y}, \tau, T)$ 的特征根的所有正整数 m 的集合. $m \in J(\hat{y}, \tau, T)$ 时, $\gamma_m(\hat{y}, \tau, T)$ 为中心 $J(\hat{y}, \tau, T)$ 的第 m 个横截数, 否则取 $\gamma_m(\hat{y}, \tau, T) = 0$.

引理 1 方程(17)的所有周期解是一致有界的.

证 设 $y(t)$ 是方程(17)的一个非平凡的周期解, 且令 $y(t_1) = N$ 和 $y(t_2) = n$ 分别为其最大值和最小值, 满足 $0 < n < N \leq 1$, 以及 $y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, 则代入(17)式可得

$$((1 - N)a e^{-by(t_1-1)} - c)N = 0 \quad (18)$$

$$((1 - n)a e^{-by(t_2-1)} - c)n = 0 \quad (19)$$

故 $N \neq 0$, 进而由方程(18)可得 $N = 1 - \frac{c}{a} e^{by(t_1-1)} < 1 - \frac{c}{a} = 1 - \frac{1}{R_0}$. 证毕.

引理 2 如果 $b > 1$, 且 $c_* > e^{1-b}$ 满足, 方程(17)没有周期为 1 或 2 的周期解^[19].

证 方程(17)的任意非平凡的周期为 1 周期解为 $u(t)$, 且为如下常微分方程的非平凡周期解:

$$u'(t) = \tau(a e^{-bu}(1 - u - c))u \quad (20)$$

由于一阶纯量常微分方程不存在非平凡周期解, 故(20)式不存在周期解.

若(17)式有周期为 2 的非平凡周期解 $u(t)$, 则 $u_1(t) = u(t)$, $u_2(t) = u(t - 1)$, 并且满足

$$\begin{cases} u'_1(t) = \tau a e^{-bu_2}(1 - u_1)u_1 - \tau c u_1 \triangleq P(u_1, u_2) \\ u'_2(t) = \tau a e^{-bu_1}(1 - u_2)u_2 - \tau c u_2 \triangleq Q(u_1, u_2) \end{cases} \quad (21)$$

由(21)式与 $y(t)$ 相对应的周期轨道包含在如下区域:

$$G_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \bar{n} < u_i < N, i=1,2\}$$

则对所有的 $(u_1, u_2) \in G_1$ 总存在

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} &= \tau a e^{-bu_2} (1 - u_1) - \tau c + \tau a e^{-bu_2} (1 - u_2) - \tau c < \\ &\tau a (1 - u_1) - \tau c + \tau a (1 - u_2) - \tau c < \\ &- 2\tau c + 2\tau a (1 - 2u) \end{aligned}$$

其中 $u = \min(u_1, u_2)$ 且 $0 < \bar{n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) < N$, 所以对所有的 $(u_1, u_2) \in G_1$ 有

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} < 0$$

因此由 Bendixson 周期解不存在准则^[20] 知(21)式没有平凡周期解. 证毕.

引理 3 如果 $1 < b < 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) < N$, $c_* > e^{1-b}$ 满足, 那么方程(17)没有周期为 4 的周期解.

证 设 $y(t)$ 为方程(17)的周期为 4 的周期解, 并令 $u_i(t) = y(t - i + 1)$, $i=1,2,3,4$. 于是 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ 是下述常微分方程的周期:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \tau a e^{-bu_2} (1 - u_1) u_1 - \tau c u_1 \\ u_2'(t) = \tau a e^{-bu_3} (1 - u_2) u_2 - \tau c u_2 \\ u_3'(t) = \tau a e^{-bu_4} (1 - u_3) u_3 - \tau c u_3 \\ u_4'(t) = \tau a e^{-bu_1} (1 - u_4) u_4 - \tau c u_4 \end{cases} \quad (22)$$

由引理 1 可知(22)式与 $y(t)$ 相对应的周期轨道包含在如下区域:

$$G_2 = \{u \in \mathbb{R}^4 : \tilde{n} < u_i < N, i=1,2,3,4\} \quad (23)$$

解的一致有界性表明所有周期解均位于 G_2 内, 为了说明方程(17)没有 4 的周期解, 只需证明方程(17)在区域 G_2 中不存在周期解即可. 那么为证明方程(17)在区域 G_2 中不存在周期解, 我们将应用高维常微分方程 Bendixson 准则^[20] 得到方程(22)右端的 Jacobi 矩阵为

$$J(u) = -\tau \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 \\ B_4 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} \quad (24)$$

这里记 $A_i = c - a(1 - 2u_i)e^{-bu_i+1}$, $B_i = abu_i(1 - u_i)e^{-bu_i+1}$, $u_5 = u_1$, $i=1,2,3,4$.

$$J^{[2]}(u) = -\tau \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 + A_3 & B_3 & -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 + A_4 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 + A_3 & B_3 & 0 \\ -B_4 & 0 & 0 & 0 & A_2 + A_4 & B_2 \\ 0 & -B_4 & 0 & 0 & 0 & A_3 + A_4 \end{pmatrix}$$

下面对 $\mathbb{R}^6$ 选取向量模:

$$|(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)| = \max\{\sqrt{2}|x_1|, |x_2|, \sqrt{2}|x_3|, \sqrt{2}|x_4|, |x_5|, \sqrt{2}|x_6|\}$$

那么复合阵 $J^{[2]}(u)$ 关于该范数的 Lozinskiĭ 测度 $\mu(J^{[2]}(u))$ 为

$$\mu(J^{[2]}(u)) = \max\left\{-\tau[A_i + A_j - \sqrt{2}B_i], -\tau\left[A_p + A_q - \frac{\sqrt{2}}{2}(B_p + B_q)\right]\right\} =$$

$$\max\left\{\tau[-A_i - A_j + \sqrt{2}B_i], \tau\left[-A_p - A_q + \frac{\sqrt{2}}{2}(B_p + B_q)\right]\right\}$$

其中 $(i, j) \in \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$, $(p, q) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$.

要使 $\mu(\mathbf{J}^{[2]}(u)) < 0$, 当且仅当对所有 $u \in G_2$, 使得

$$\begin{aligned} -A_i - A_j + \sqrt{2}B_i &= -c + a(1 - 2u_i)e^{-bu_{i+1}} - c + a(1 - 2u_j)e^{-bu_{j+1}} + \sqrt{2}abu_i(1 - u_i)e^{-bu_{i+1}} < \\ &= -c + a(1 - 2u_i) - c + a(1 - 2u_j) + \sqrt{2}abu_i(1 - u_i)e \leq \\ &= -2c + 2a(1 - 2u_i) + \frac{\sqrt{2}}{4}ab = \\ &= -2c + 2af(u) = \\ &= 2a\left(f(u) - \frac{1}{R_0}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

这里 $u = \min(u_i, u_j)$, $f(u) = 1 - 2u + \frac{\sqrt{2}}{8}b$. 根据文献[19]中的定理 7.3.2, 若对所有 $u \in G_2$ 有 $\mu(\mathbf{J}^{[2]}(u)) < 0$, 那么方程组(22)没有周期解. 由(25)式可知 $\mu(\mathbf{J}^{[2]}(u)) < 0$ 当且仅当对所有 $u \in G_2$ 满足:

$$2a\left(f(u) - \frac{1}{R_0}\right) \leq 0 \quad (26)$$

接着证明(26)式. 显然 $f(u)$ 是递减函数, 在区域 G_2 上 $f(u) - \frac{1}{R_0} \leq 0$, 意味着 $u \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + \frac{\sqrt{2}}{16}b$,

取 $\tilde{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + \frac{\sqrt{2}}{16}b$, 由(18)式可知 $N < 1 - \frac{1}{R_0}$. 当 $b < 4\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$, $0 < \tilde{n} < N$ 时, 对所有 $u \in (\tilde{n}, N)$, (25)式成立.

综上所述, 当 $1 < b < 4\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$, $c_* > e^{1-b}$ 时, 有 $-A_i - A_j + \sqrt{2}B_i < 0$ 成立.

进一步有

$$\begin{aligned} -A_p - A_q + \frac{\sqrt{2}}{2}(B_p + B_q) &= -c + a(1 - 2u_p)e^{-bu_{p+1}} - c + a(1 - 2u_q)e^{-bu_{q+1}} + \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}abu_p(1 - u_p)e^{-bu_{p+1}} + \frac{\sqrt{2}}{2}abu_q(1 - u_q)e^{-bu_{q+1}} < \\ &= -c + a(1 - 2u_p) - c + a(1 - 2u_q) + \frac{\sqrt{2}}{2}abu_p(1 - u_p) + \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}abu_q(1 - u_q) \leq \\ &= -2c + 2a(1 - 2u) + \frac{\sqrt{2}}{4}ab = \\ &= 2a\left(f(u) - \frac{1}{R_0}\right) \end{aligned}$$

其中 $u = \min(u_i, u_j)$, $f(u) = 1 - 2u + \frac{\sqrt{2}}{8}b$, 同理, 对任意 $u \in G_2$ 有

$$-A_p - A_q + \frac{\sqrt{2}}{2}(B_p + B_q) < 2a\left(f(u) - \frac{1}{R_0}\right) < 0$$

因此, 应用文献[20]中的推论 3.5 可得方程组(22)不存在周期为 4 的周期解. 证毕.

定理 5 1) 如果 $R_0 > 1$, $b > 1$, 且 $c_* > e^{1-b}$, 则对任意 $\tau > \tau_1$, 方程(17)至少有一个非平凡的周期解.

2) 如果 $R_0 > 1$, $1 < b < 4\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$, 且 $c_* > e^{1-b}$, 则对任意 $\tau > \tau_0$, 方程(17) 至少有一个非平凡的周期解.

证 方程(17) 是二次连续可微的, 也就是文献[19] 中的(A₁) 满足. 容易验证, $DF\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k}\right)$, $\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k}\right) \in P$, 即文献[19] 中的(A₂) 满足. 方程(17) 在驻解 $(\hat{y}, \tau, T) \in P$ 处的特征方程为

$$\det \Delta_{(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k})} = z + \frac{\tau c y_*}{1 - y_*} + \tau b c y_* e^{-z} = 0$$

显然, $F(y, \tau, T)$ 关于 y 可微, 并且 $\Delta_{(\hat{y}(\tau, T), \tau, T)}(\lambda)$ 关于 (τ, T, λ) 连续, 这说明文献[19] 中的(A₃) 满足. 那么对任意的 $k=1, 2, 3, \dots$, $\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k}\right) \in P$ 是孤立中心. 通过(15) 式可知对每个 $k > 0$, 存在 ε_k , $\delta_k > 0$ 和一个光滑函数 $z_k: (\tau_k - \delta_k, \tau_k + \delta_k) \rightarrow C$, 使得

$$\Delta_{(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k})}(z_k(\tau)) = 0 \quad |z_k(\tau) - i\omega_0 \tau_k| < \varepsilon_k$$

对 $\tau \in [\tau_k - \delta_k, \tau_k + \delta_k]$ 成立, 且

$$z_k(\tau_k) = i\omega_0 \tau_k \quad \left. \frac{dz_k(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k} > 0$$

记 $T_k = \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}$, 且令

$$\Omega_{\varepsilon_k} = \{(u, T) \mid 0 < u < \varepsilon_k, |T - T_k| < \varepsilon_k\}$$

显然, 若 $|\tau - \tau_k| \leq \delta_k$, 并且对 $(u, T) \in \partial\Omega_{\varepsilon_k}$, 有 $\det \Delta_{(y_*, \tau, T)}\left(z_k\left(u + \frac{i2\pi}{T}\right)\right) = 0$, 则必有 $\tau = \tau_k$, $u = 0$, 以及 $T = T_k$. 这便证明了当 $m=1$ 时, 文献[19] 中(A₄) 成立, 进而可得到 $J\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\omega_k \tau_k}\right) = \{1\}$, 即文献[19] 中(A₅) 成立. 另外有

$$\gamma_1\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_k}\right) = -1$$

由文献[19] 中的定理 4.1.1 可知, 过 $\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 的连通分支 $C\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 是非空的. 此外, 有

$$\sum_{(\hat{y}, \tau, T) \in (y_*, \tau_k, T_k) \cap N(F)} \gamma_m\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right) = \sum_{(y_*, \tau, T) \in (y_*, \tau_k, T_k) \cap N(F)} \gamma_1\left(y_*, \tau_i, \frac{2\pi}{\tau_i \omega_0}\right) < 0$$

因此, 由文献[19] 中的定理 4.1.2 可知, 过 $\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 的连通分支 $C\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 是无界的.

引理 1 说明连通分支 $C\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 在 y 空间上的投影是有界的. 当 $\tau=0$ 时, 方程(17) 为一阶纯量常微分方程, 所以方程(17) 没有非常数周期解. 进而可知, 连通分支 $C\left(y_*, \tau_k, \frac{2\pi}{\tau_k \omega_0}\right)$ 在 τ 空间上的投影是有下界的. 利用 τ_k 和 ω_0 的定义, 即(13) 和(14) 式可得

$$\tau_k \omega_0 = \arccos \frac{1}{b(x_* - 1)} + 2k\pi \quad k \geq 0$$

所以,

$$\frac{\pi}{2} < \omega_0 \tau_0 < \pi, 2k\pi < \omega_0 \tau_k < (2k+1)\pi, k \geq 1$$

$$2 < \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k} < 4, \frac{1}{k+1} < \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_k} < 1, k \geq 1$$

由引理 3 可知, 当 $R_0 > 1$, $1 < b < 4\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$, $c_* > e^{1-b}$ 成立时, 如果 $(y, \tau, T) \in C\left(y_*, \tau_0, \frac{2\pi}{\tau_0\omega_0}\right)$, 那么 $2 < T < 4$. 所以连通分支 $C\left(y_*, \tau_0, \frac{2\pi}{\tau_0\omega_0}\right)$ 在 τ 空间上的投影也是无界的. 又因在 τ 空间上的投影是有下界的, 进而可得 $C\left(y_*, \tau_0, \frac{2\pi}{\tau_0\omega_0}\right)$ 在 τ 空间上的投影包含区间 $[\tau_0, \infty)$. (2) 式成立. 类似地, 由引理 2 可知, 当 $k \geq 1$ 时, $C\left(y_*, \tau_0, \frac{2\pi}{\tau_0\omega_0}\right)$ 在 τ 空间上的投影至少包含区间 $[\tau_k, \infty)$. (1) 式成立. 证毕.

4 数值模拟

在本小节中, 将借助数值模拟来验证所得理论结果的合理性. 为此, 令 $a = 1.2$, $c = 0.3$. 下面分情况讨论.

当 $b = 0.8 < 1$, $\tau = 10$ 时, 如图 1(a) 所示, 模型(4) 从不同初值出发的解最终都趋近于正平衡点 X_* , 这说明 X_* 是稳定的. 当 $b = 1.5 > 1$ 时, 直接计算得 $e^{1-b} = 0.6065 > c_*$. 令 $\tau = 15$, 则 X_* 仍是稳定的, 见图 1(b).

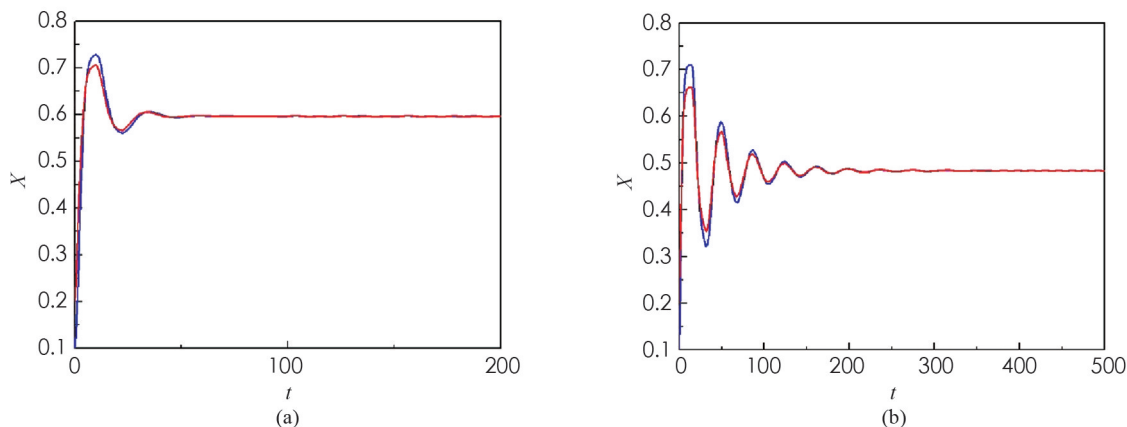


图 1 $b = 0.8$, $\tau = 10$ 时模型(4) 平衡点 X_* 的稳定性

当 $b = 2.5 > 1$ 时, $e^{1-b} = 0.2231 < c_*$. 取 $\tau = 8 < \tau_0$, 图 2(a) 表明模型(4) 的平衡点 X_* 仍保持稳定. 而一旦 $\tau = 10 > \tau_0$ 时, X_* 不再稳定, Hopf 分支发生, 见图 2(b).

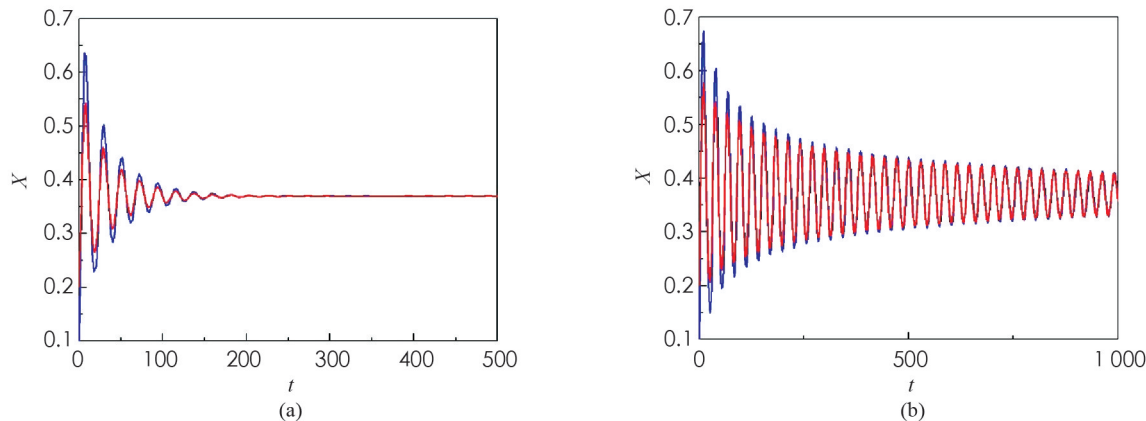


图 2 $b = 2.5$, $\tau = 8$ 时模型(4) 平衡点 X_* 的稳定性

下面展示平衡点 X_* 处的 Hopf 分支的全局延拓性. 此时令 $a = 1.2$, $b = 2.5$, $c = 0.3$, 相应地, 平衡点

$X_* = 0.369\ 8$, $R_0 = 4 > 1$, $c_* = 0.396\ 7$. 通过(13) 和(14) 式计算得 $\tau_0 = 8.517\ 9$, $\tau_1 = 37.833\ 8$. 当 $b = 2.5$, 并且分别满足定理 5 的条件 1) 和 2) 时, 各自选取 $\tau = 40 > \tau_1$, $\tau = 20 > \tau_0$, 如图 3(a),(b) 所示, 两张图都展示了在平衡点 X_* 附近从 τ_0 分支出的周期解是大范围存在的.

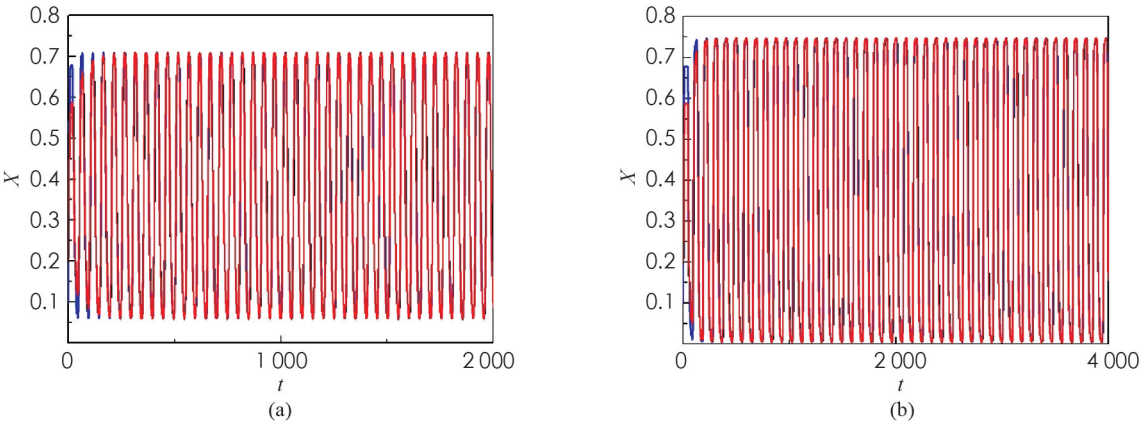


图 3 模型(4) 在平衡点 X_* 处的大范围周期解

相应地, 随着时滞 τ 的不断增加, 模型(4) 在平衡点 X_* 处展现出了 Hopf 分支(图 4).

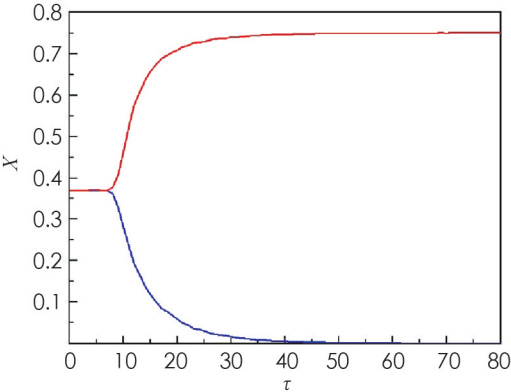


图 4 系统(4) 在平衡点 X_* 处的 Hopf 分支图

5 总结

在本小节中, 主要研究了媒体报道的染病者数量对 SIS 模型动力学性态的影响. 给出了模型(1) 的基本再生数, 借助极限系统, 讨论了系统(4) 平衡点的存在性、稳定性, 以及平衡点不稳定时可能发生的 Hopf 分支. 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(1) 存在全局渐近稳定的无病平衡点; 而当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1) 存在唯一的地方病平衡点, 并且地方病平衡点的稳定性会随着时滞 τ 的增加而发生改变, 即: 在 $\tau = 0$ 的情况下, 地方病平衡点是全局渐近稳定的; 当 $\tau > \tau_0$ 时, 地方病平衡点不再稳定, 并会发生全局延拓的 Hopf 分支. 我们也给出了发生全局 Hopf 分支延拓的条件.

系统(4) 中的参数 $b = \alpha N_*$, 通过改变 b 的参数值大小, 可以明显看出 b 值对平衡点的影响. 也就是说, 由媒体报道的染病者数量所引起的时滞效应会使得模型的动力学性态更加丰富. 即媒体报道引起的时滞效应会改变地方病平衡点的稳定性, 产生全局 Hopf 分支.

参考文献:

[1] CUI J A, SUN Y H, ZHU H P. The Impact of Media on the Control of Infectious Diseases [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2008, 20(1): 31-53.
[2] COLLINSON S, HEFFERNAN J M. Modelling the Effects of Media During an Influenza Epidemic [J]. BMC Public

- Health, 2014, 4(1): 1-10.
- [3] CUI J A, TAO X, ZHU H P. An SIS Infection Model Incorporating Media Coverage [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2008, 38(5): 1323-1334.
- [4] FUNK S, GILAD E, JANSEN V A. Endemic Disease, Awareness, and Local Behavioural Response [J]. Journal of Theoretical Biology, 2010, 264(2): 501-509.
- [5] SAMANTA S, RANA S, SHARMA A, et al. Effect of Awareness Programs by Media on the Epidemic Outbreaks: a Mathematical Model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(12): 6965-6977.
- [6] MISRA A K, SHARMA A, SHUKLA J B. Modeling and Analysis of Effects of Awareness Programs by Media on the Spread of Infectious Diseases [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(5-6): 1221-1228.
- [7] KAUR N, GHOSH M, BHATIA S S. Modeling and Analysis of an SIRS Epidemic Model with Effect of Awareness Programs by Media [J]. International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 2014, 8(1): 233-239.
- [8] 王晓静, 王雪萍, 白玉珍, 等. 一类具有时滞的传染病数学模型的 Hopf 分支和稳定性分析 [J]. 北京建筑大学学报, 2019, 35(2): 74-80.
- [9] LIU R S, WU J H, ZHU H P. Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases [J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2007, 8(3): 153-164.
- [10] ZHOU W, WANG A, XIA F, et al. Effects of Media Reporting on Mitigating Spread of COVID-19 in the Early Phase of the Outbreak [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2020, 17(3): 2693-2707.
- [11] SONG P F, XIAO Y N. Global Hopf Bifurcation of a Delayed Equation Describing the Lag Effect of Media Impact on the Spread of Infectious Disease [J]. Journal of Mathematical Biology, 2018, 76(12): 1249-1267.
- [12] SUN C J, YANG W, ARINO J, et al. Effect of Media-induced Social Distancing on Disease Transmission in a Two Patch Setting [J]. Mathematical Biosciences, 2011, 230(2): 87-95.
- [13] TCHUENCHE J M, DUBE N, BHUNU C P, et al. The Impact of Media Coverage on the Transmission Dynamics of Human Influenza [J]. BMC Public Health, 2011, 11(S1): 1-16.
- [14] WANG A L, XIAO Y N. A Filippov System Describing Media Effects on the Spread of Infectious Diseases [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2014, 11(1): 84-97.
- [15] 白振国. 周期传染病模型的基本再生数 [J]. 工程数学学报, 2013, 30(2): 175-183.
- [16] ZHAO X Q. Asymptotic Behavior for Asymptotically Periodic Semiflows with Applications [J]. Communications on Applied Nonlinear Analysis, 1996, 3(4): 43 - 66.
- [17] HALE J K. Theory of Functional Differential Equations [M]. New York: Springer, 1977.
- [18] WU J H. Symmetric Functional Differential Equations and Neural Networks with Memory [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1998, 350(12): 4799-4838.
- [19] 魏俊杰, 王洪滨, 蒋卫华. 时滞微分方程的分支理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2012. 79-88.
- [20] LI M Y, MULDOWNEY J S. On Bendixson's Criterion [J]. Journal of Differential Equation, 1993, 106(1): 27-39.

责任编辑 张构