

一类考虑垂直传染、接种及人均病床数的 SIVS 传染病模型分析^①

王琪¹, 窦霁虹²

1. 陕西工业职业技术学院, 陕西 咸阳 712000; 2. 西北大学 数学学院, 西安 710127

摘要: 基于疫苗接种不完全有效的实际情况, 研究了一类考虑垂直传染、接种及人均病床数的 SIVS 传染病模型, 同时采用与人均病床数有关的治疗函数以研究医疗资源数量对传染病防治工作的影响. 首先, 利用下一代生成矩阵法得到疾病基本再生数的表达式, 并且分别采用几何法和特征值法得到各平衡点稳定性的一些结论; 其次, 通过对平衡点的讨论发现此类模型会发生后向分支, 同时结合理论证明和数值模拟对其进行验证; 最后, 基于已有文献对加入垂直传染和新生儿接种因素后的理论结果异同点进行比较, 得出了通过大幅减少有效接触和提供丰富的医疗资源可以避免发生后向分支从而消灭疾病, 通过增加疫苗的接种比例和接种效率可以控制疾病传播的结论.

关键词: 垂直传染; 疫苗接种; 人均病床数; SIVS 传染病模型; 后向分支

中图分类号: O175.13

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)10-0026-11

Analysis of an SIVS Epidemic Model with Vertical Transmission, Vaccination and Number of Beds Per Capita

WANG Qi¹, DOU Jihong²

1. Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang Shanxi 712000, China;

2. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: In this paper, based on the fact that vaccination is not fully effective, a SIVS infectious disease model considering vertical transmission, vaccination and per capita bed number is studied. Meanwhile, the treatment function related to per capita bed number has been used to study the influence of medical resources on the prevention and treatment of infectious diseases. Firstly, the expression of the basic reproduction has been obtained with the next generation matrix and the existence and stability of every points are discussed by means of geometric method and eigenvalue method respectively. Secondly, through the discussion of the equilibrium points, it has been found that it will appear backward bifurcation in such model and the condition of the backward bifurcation is verified by theoretical proof and numerical simulation. And finally, the similarities and differences of the theoretical results after adding the factors of vertical infection and neonatal vaccination are compared based on the existing literature. It has been shown that minimal effective contact and abundant medical resources could avoid the appearance of backward bifurca-

① 收稿日期: 2021-02-25

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11501446); 陕西工业职业技术学院校级科研计划项目(2022YKYB-041).

作者简介: 王琪, 硕士研究生, 主要从事微分方程定性理论研究.

tion, leading to disease extinction finally. Meanwhile the epidemic diseases can also be controlled by increasing vaccination rates and improving the effectiveness of vaccination.

Key words: vertical transmission; vaccination; number of beds per capita; SVIS epidemic model; backward bifurcation

经典的传染病仓室模型通常根据疾病痊愈后是否具有免疫阶段(即康复类仓室)分为不同研究方向^[1-2], 而文献[3]针对部分疫苗接种者具有暂时性免疫的实际情形, 在传统无免疫阶段的 SIS 模型基础上加入了暂时性免疫仓室 V , 并引发大量研究^[4-7]. 通过分析发现在疫苗接种不完全有效时, 模型在一定条件下发生后向分支. 以乙型肝炎病毒为例, 首先其具有垂直传染的特点; 其次, 可接种疫苗进行防治, 但 5% ~ 10% 的人群会存在疫苗无应答现象, 即接种无效^[8-9]; 同时疫苗在不同人群体内的存活时间不同^[10], 除新生儿外的其他易感者均可在不同阶段接种疫苗.

基于乙肝病毒的以上特点建立动力学模型, 并且考虑加入由文献[11]定义的一个与病床数有关的饱和治疗函数

$$\mu(\delta, I) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \frac{\delta}{\delta + I}$$

其中: μ_0, μ_1 分别是最小和最大恢复率. 通过研究分析系统发生鞍结点分支、后向分支和 Bogdanov-Takens 分支的情况, 以此推断包含病床数在内的有限医疗资源对传染病控制的影响. 此后, 也有很多学者引用该治疗函数进行研究^[12-15], 以便更细致有效地研究与医疗资源有关的因素对传染病防治的影响.

本文基于乙肝传播特点建立一类考虑垂直传染、疫苗接种以及人均病床数量的 SIVS 模型, 同时对易感者以及易感者和接种者的新生儿预防接种. 通过对模型进行理论研究和数值分析, 总结出控制乙型肝炎疾病流的有效措施, 也可进一步为进行疫苗接种的传染病防治提供了更丰富的理论基础.

1 模型建立

本模型将某一地区的人口共分为 3 个仓室: 易感者、染病者以及接种者. 假设此地区不发生人口迁移和因病死亡, 即环境总人口恒定, 则可直接假设 $S(t), I(t), V(t)$ 分别表示在 t 时刻环境中易感者、染病者和接种者的人口密度. 假设疾病的发生采用双线性发生率. 由于不同阶段人群染病概率不同, 则设 m 为易感者和接种者的新生儿疫苗接种比例; m' 表示易感者的接种比例; 接种者与染病者接触仍有一定染病概率, 这取决于疫苗的接种效率 σ , $\sigma \in (0, 1)$, σ 取 0 代表疫苗完全有效, 取 1 代表疫苗完全失效; q 表示疾病的垂直传染率; β 表示染病者对易感者和接种者的感染率; b, d 分别表示人口的出生率和自然死亡率, 假设人口的出生率与自然死亡率相等, 即 $b = d$; μ 为(1)式表示的治疗函数; δ 为人均病床数量, 可以衡量包括病床数在内的医疗资源情况; θ 表示接种失效的比例. 该模型的传播流程图如下:

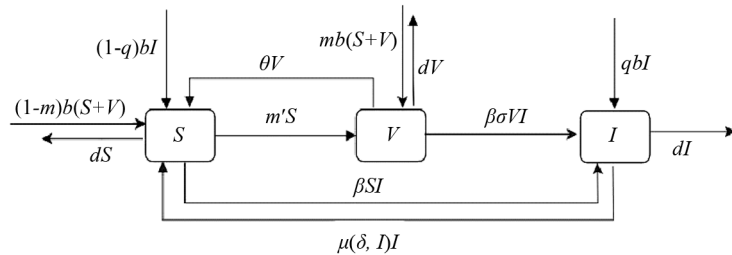


图 1 SIVS 传染病模型流程图

根据传播流程图, 建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-m)b(S+V) + (1-q)bI - \beta SI + \theta V + \mu(\delta, I)I - m'S - dS \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + qbI + \beta \sigma VI - \mu(\delta, I)I - dI \\ \frac{dV}{dt} = mb(S+V) + m'S - \beta \sigma VI - \theta V - dV \end{cases} \quad (1)$$

由于 $S = 1 - I - V$ ，将模型进行化简降维后，模型(1)可化为：

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta(1 - I - V)I - (1 - q)bI + \beta\sigma VI - \mu(\delta, I)I \\ \frac{dV}{dt} = mb(1 - I) + m'(1 - I - V) - \beta\sigma VI - \theta V - bV \end{cases} \quad (2)$$

要使模型具有实际的生物学意义，则在区域：

$$D = \{(I, V) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq I + V \leq 1\}$$

内考虑模型(2) 的动力学性质.

2 主要结果

2.1 基本再生数

令模型(2) 的右端函数为 0，可以得到该模型的无病平衡点 $E_0 = \left(0, \frac{m' + mb}{m' + \theta + b}\right)$.

本节将采用第二代生成矩阵法计算疾病的基本再生数 R_0 . 那么

$$F = \begin{pmatrix} \beta(1 - I - V)I + \beta\sigma VI \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu(\delta, I)I + (1 - q)bI \\ \beta\sigma VI + \theta V + bV - mb(1 - I) - m'(1 - I - V) \end{pmatrix}$$

通过 F, V 在无病平衡点 E_0 处的 Jacobi 矩阵得到基本再生数表达式：

$$R_0 = \frac{\beta[\theta + b + \sigma m' - (1 - \sigma)mb]}{(m' + \theta + b)[\mu_1 + (1 - q)b]} \quad (3)$$

注 此处 $R_0 > 0$ 恒成立. 由于模型中参数均在 $(0, 1)$ 范围内，则有 $b > (1 - \sigma)mb$.

2.2 平衡点存在性

模型(2) 的无病平衡点 $E_0 = \left(0, \frac{m' + mb}{m' + \theta + b}\right)$ 始终存在. 下面着重讨论地方病平衡点的存在性.

令模型(2) 右端函数为 0，可得 $V(I) = \frac{(mb + m')(1 - I)}{\beta\sigma I + m' + \theta + b}$ ，将其代入模型中可得到 I 满足以下方程：

$$H(I) = \beta^2\sigma I^3 + h_1 I^2 + h_2 I + h_3 = 0 \quad (4)$$

其中：

$$\begin{aligned} h_1 &= \beta[m' + \theta + b + (\sigma - 1)(mb + m')] + \beta\sigma[\mu_0 + (1 - q)b] + \beta^2\sigma(\delta - 1) \\ h_2 &= \beta(1 - \sigma)(1 - \delta)(mb + m') - \beta(1 - \delta)(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma\delta + \mu_0(m' + \theta + b) + \\ &\quad \beta\sigma\delta\mu_1 + (1 - q)b(\beta\sigma\delta + m' + \theta + b) \\ h_3 &= \delta(m' + \theta + b)[\mu_1 + (1 - q)b](1 - R_0) \end{aligned}$$

由于三次方程的根较为复杂，将利用几何学的方法对其进行证明.

定理 1(地方病平衡点存在性) 对于模型(2) 地方病平衡点 $\bar{E} = (\bar{I}, \bar{V})$ 的存在性有以下情形：

- 1) 当 $R_0 > 1$ 时，模型有且仅有一个地方病平衡点 $\hat{E} = (\hat{I}, \hat{V})$ ；
- 2) 当 $R_0 = 1$ 时，若 $V_1'(0) < V_2'(0)$ ，即

$$\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m') < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\delta}$$

此时模型有且仅有一个地方病平衡点 $\tilde{E} = (\tilde{I}, \tilde{V})$ ；

3) 当 $R_0 < 1$ 时，若 $V_1'(0) < V_2'(0)$ 且存在一点 I^* ，使得 $V_1(I^*) < V_2(I^*)$ ，则模型存在两个地方病平衡点 $E_1 = (I_1, V_1)$ ， $E_2 = (I_2, V_2)$ ；当且仅当在该点处 $V_1(I^*) = V_2(I^*)$ 且 $V_1'(I^*) = V_2'(I^*)$ 时两平衡点重合，仅存在一个地方病平衡点.

证 令模型(2) 的右端函数为 0，则有

$$V_1(I) = V_2(I)$$

其中

$$V_1(I) = \frac{(mb + m')(1 - I)}{\beta\sigma I + m' + \theta + b}$$

$$V_2(I) = \frac{\beta I^2 + [\beta(\delta - 1) + \mu_0 + (1 - q)b]I + \delta[\mu_1 + (1 - q)b - \beta]}{\beta(\sigma - 1)(\delta + I)}$$

下面利用 $V_1(I)$ 和 $V_2(I)$ 的增减性及凹凸性进行分析.

$$V_1(0) = \frac{mb + m'}{m' + \theta + b}, V_1(1) = 0$$

$$V_2(0) = \frac{\mu_1 + (1 - q)b - \beta}{\beta(\sigma - 1)}, V_2(1) = \frac{\mu_0 + (1 - q)b + \delta[\mu_1 + (1 - q)b]}{\beta(\sigma - 1)(\delta + 1)} < 0$$

$$V_1'(I) = -\frac{(mb + m')(m' + \theta + b + \beta\sigma)}{(m' + \beta\sigma I + \theta + b)^2} < 0, V_2'(I) = \frac{\beta I^2 + 2\beta\delta I + \delta(\mu_0 - \mu_1 + \beta\delta)}{\beta(\sigma - 1)(\delta + I)^2}$$

$$V_1''(I) = \frac{2\beta\sigma(mb + m')[m' + \theta + b + \beta\sigma]}{(m' + \beta\sigma I + \theta + b)^3} > 0, V_2''(I) = -\frac{2\delta(\mu_0 - \mu_1)}{\beta(\sigma - 1)(\delta + I)^3} < 0$$

由上述判断可知, $V_1(I)$ 是在 $[0, 1]$ 上单调递减的凹函数, $V_2(I)$ 是 $[0, 1]$ 上的凸函数. 又由于

$$V_1(0) - V_2(0) = \frac{\mu_1 + (1 - q)b}{\beta(\sigma - 1)} \cdot (R_0 - 1)$$

则 $V_1(0) > V_2(0)$ 等价于 $R_0 < 1$; $V_1(0) = V_2(0)$ 等价于 $R_0 = 1$; $V_1(0) < V_2(0)$ 等价于 $R_0 > 1$.

下面针对 R_0 的 3 种情形(图 2) 分别进行讨论:

情形 1 若 $R_0 > 1$, 有 $V_1(0) < V_2(0)$ 且 $V_1(1) = 0, V_2(1) < 0$ 成立, 则 $V_1(I)$ 与 $V_2(I)$ 在 $[0, 1]$ 内有且仅有一个交点(如图 2a).

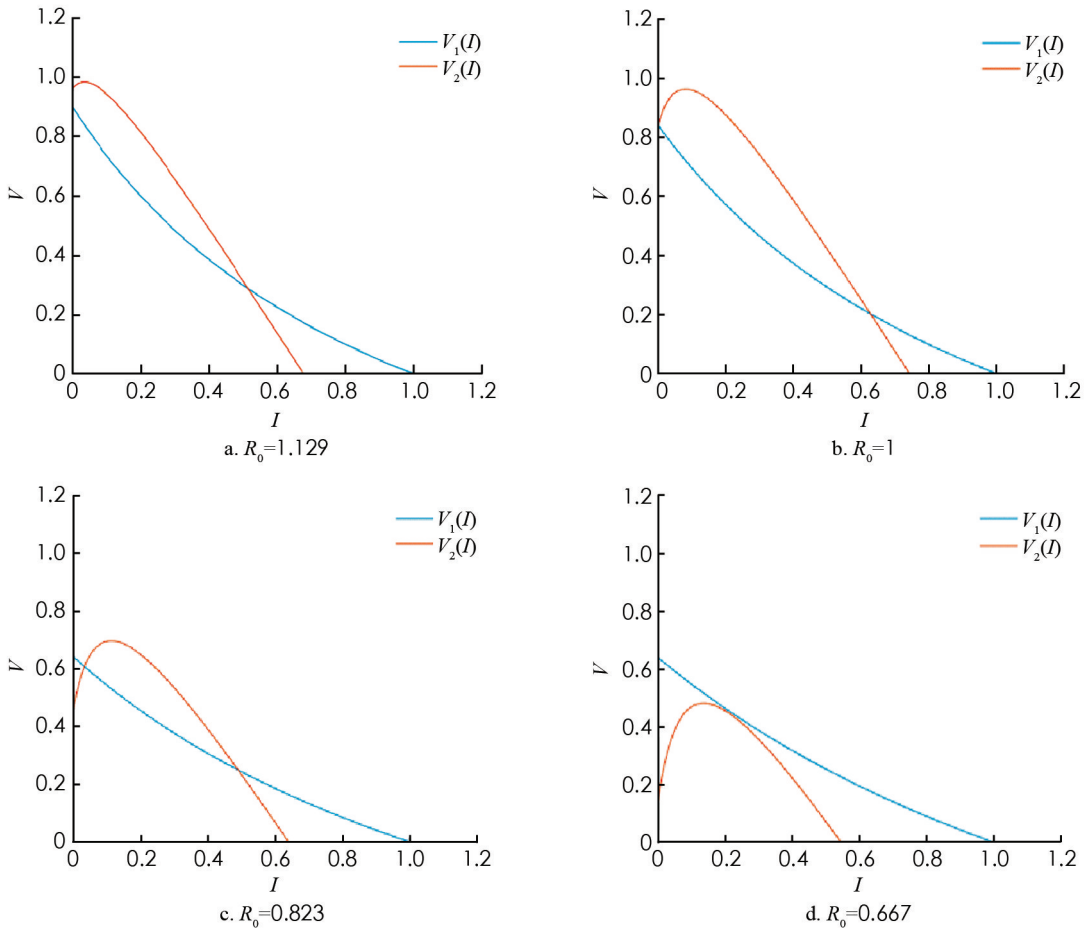


图 2 $V_1(I)$ 和 $V_2(I)$ 的函数关系图

情形 2 若 $R_0 = 1$, 有 $V_1(0) = V_2(0)$ 且 $V_1(1) = 0, V_2(1) < 0$ 成立, 则当 $V'_1(0) < V'_2(0)$ 成立时, 即

$$\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m') < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\delta}$$

成立时, $V_1(I)$ 与 $V_2(I)$ 在 $[0, 1]$ 内有且仅有一个交点, 否则将无交点(如图 2b).

情形 3 若 $R_0 < 1$, 有 $V_1(0) > V_2(0)$ 且 $V_1(1) = 0, V_2(1) < 0$ 成立:

1) 当 $V'_1(0) < V'_2(0)$ 且存在一点 I^* , 使得 $V_1(I^*) < V_2(I^*)$, $V_1(I)$ 与 $V_2(I)$ 在 $[0, 1]$ 内存在两个交点(如图 2c);

2) 当存在一点 I^* 使得 $V_1(I^*) = V_2(I^*)$ 且 $V'_1(I^*) = V'_2(I^*)$ 时, 两交点重合为一个交点(如图 2d).

2.3 平衡点稳定性

定理 2(无病平衡点局部稳定性) 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(2)的无病平衡点 E_0 在 D 内局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定; 当 $R_0 = 1$ 时, E_0 为鞍结点, 其中当 $C > 0$ 时, E_0 为右鞍左结点; 当 $C < 0$ 时, E_0 为左鞍右结点.

证 模型(2)的 Jacobi 矩阵为:

$$J(E) = \begin{pmatrix} \beta(1 - 2I - V) + \beta\sigma V - \mu'_I(\delta, I) - \mu(\delta, I) - (1 - q)b & -\beta I + \beta\sigma I \\ -(mb + m') - \beta\sigma V & -(m' + \theta + b) - \beta\sigma I \end{pmatrix}$$

代入无病平衡点 $E_0 = \left(0, \frac{m' + mb}{m' + \theta + b}\right)$, 得到在 E_0 点处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} [\mu_0 + (1 - q)b](R_0 - 1) & 0 \\ -\frac{(mb + m')(\beta\sigma + m' + \theta + b)}{m' + \theta + b} & -(m' + \theta + b) \end{pmatrix}$$

若 $R_0 - 1 < 0$, 即 $R_0 < 1$ 时, $J(E_0)$ 有两个负特征根, 此时模型(2)在 E_0 处局部渐近稳定; 若 $R_0 - 1 > 0$, 即 $R_0 > 1$ 时, $J(E_0)$ 的两个特征根为异号实根, 此时 E_0 为鞍点, 不稳定. 若 $R_0 - 1 = 0$, $J(E_0)$ 具有一个零实部和一个负实部特征根, 属于临界情形下的奇点分析. 下面利用 Liapunov-Schmidt 更替法进行讨论.

1) 坐标平移. 将无病平衡点 E_0 平移至坐标原点, 并作线性替换, 令 $I' = I, V' = V - \frac{mb + m'}{m' + \theta + b}$

则将模型化为

$$\begin{cases} \frac{dI'}{dt} = \beta(1 - I' - V')I' + \frac{\beta(mb + m')(\sigma - 1)I'}{m' + \theta + b} + \beta\sigma V'I' - \mu(\delta, I')I' - (1 - q)bI' \\ \frac{dV'}{dt} = -\frac{(mb + m')(\beta\sigma + m' + \theta + b)}{m' + \theta + b}I' - \beta\sigma V'I' - (m' + \theta + b)V' \end{cases} \quad (5)$$

2) 利用二元函数麦克劳林展式将右端函数展开, 得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dI'}{dt} = \varphi(I', V') \\ \frac{dV'}{dt} = -\frac{(mb + m')(\beta\sigma + m' + \theta + b)}{m' + \theta + b}I' - (m' + \theta + b)V' + \psi(I', V') \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi(I', V') &= \left(-\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta}\right)I'^2 + (-\beta + \beta\sigma)I'V' \\ \psi(I', V') &= -\beta\sigma I'V' \end{aligned}$$

3) 判断临界情形下的奇点稳定性.

令系统(6)的第二式右端函数为 0. 当 $|x| \ll 1$ 时, 可利用待定系数法求解得到 V' 关于 I' 的函数. 令 $V'(I') = a_1 I' + a_2 I'^2 + O(I'^3)$, 则

$$(a_1 + 2a_2 I' + O(I'^2)) \left[\left(-\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta}\right)I'^2 + (-\beta + \beta\sigma)I'(a_1 I' + a_2 I'^2 + O(I'^3)) \right] =$$

$$-\frac{(mb+m')(\beta\sigma+m'+\theta+b)}{m'+\theta+b}I'-(m'+\theta+b)(a_1I'+a_2I'^2+O(I'^3))-\beta\sigma I'(a_1I'+a_2I'^2+O(I'^3))$$

可得

$$a_1 = -\frac{mb+m'}{m'+\theta+b} - \frac{\beta\sigma(mb+m')}{(m'+\theta+b)^2}$$

则 V' 关于 I' 的函数关系为:

$$V'(I') = \left[-\frac{mb+m'}{m'+\theta+b} - \frac{\beta\sigma(mb+m')}{(m'+\theta+b)^2} \right] I' + O(I'^2)$$

将 $V'(I')$ 代入系统(6) 第一式中, 得到降维后的系统:

$$\frac{dI'}{dt} = \left\{ -\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta} + (-\beta + \beta\sigma) \left[-\frac{mb+m'}{m'+\theta+b} - \frac{\beta\sigma(mb+m')}{(m'+\theta+b)^2} \right] \right\} I'^2 + O(I'^3)$$

其分支余维为 1, 它的一个普适开折拓扑等价于:

$$\frac{dI'}{dt} = \lambda + \left\{ -\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta} + (-\beta + \beta\sigma) \left[-\frac{mb+m'}{m'+\theta+b} - \frac{\beta\sigma(mb+m')}{(m'+\theta+b)^2} \right] \right\} I'^2$$

通过分析其轨线拓扑分类, 可得在 $R_0 = 1$ 时, 无病平衡点 E_0 为鞍结点.

现可分析得到以下结论, 令

$$C = -\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta} + (-\beta + \beta\sigma) \left[-\frac{mb+m'}{m'+\theta+b} - \frac{\beta\sigma(mb+m')}{(m'+\theta+b)^2} \right]$$

则当 $C > 0$ 时, E_0 为右鞍左结点; 当 $C < 0$ 时, E_0 为左鞍右结点.

定理 3(地方病平衡点局部稳定性) 模型(2) 地方病平衡点 $\bar{E} = (\bar{I}, \bar{V})$ 的稳定性如下:

- 1) 若 $R_0 > 1$, 模型中仅存在唯一一个地方病平衡点 $\hat{E} = (\hat{I}, \hat{V})$, 且为非鞍点;
- 2) 若 $R_0 < 1$, 当满足定理 2 条件 3 时模型中存在两个地方病平衡点, 其中平衡点 $E_1 = (I_1, V_1)$ 为鞍点始终不稳定, 平衡点 $E_2 = (I_2, V_2)$ 是非鞍点.

对于所有非鞍点, 在条件 $D > 0$ 成立时均是局部渐近稳定的.

证 模型(2) 在地方病平衡点 $\bar{E} = (\bar{I}, \bar{V})$ 处的 Jacobi 矩阵为:

$$J(\bar{E}) = \begin{pmatrix} -\beta\bar{I} + \frac{(\mu_1 - \mu_0)\delta\bar{I}}{(\delta + \bar{I})^2} & -\beta\bar{I} + \beta\sigma\bar{I} \\ -(mb+m') - \beta\sigma\bar{V} & -(m'+\theta+b) - \beta\sigma\bar{I} \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为:

$$\lambda^2 - \text{tr}(\bar{I})\lambda + \det(\bar{I}) = 0$$

其中

$$\text{tr}(\bar{I}) = -\frac{G(\bar{I})}{(\delta + \bar{I})^2}$$

$$G(\bar{I}) = \beta(\sigma + 1)\bar{I}^3 + [2\beta\delta(\sigma + 1) + m' + \theta + b]\bar{I}^2 + \delta[\beta\delta(\sigma + 1) + \mu_0 - \mu_1 + 2(m' + \theta + b)]\bar{I}$$

$$\det(\bar{I}) = \frac{\bar{I}H'(\bar{I})}{\delta + \bar{I}}$$

同时, 令 $D = \delta[\beta\delta(\sigma + 1) + \mu_0 - \mu_1 + 2(m' + \theta + b)]$.

显然, 矩阵 $J(\bar{E})$ 特征根的符号由 $G(\bar{I})$ 和 $H'(\bar{I})$ 共同决定. 当 $R_0 > 1$ 时, 由图 2a 知 $H'(\hat{I}) > 0$, $\hat{E} = (\hat{I}, \hat{V})$ 为非鞍点; 当 $R_0 < 1$ 时, 若满足存在两个平衡点条件, 则由式(4) 可知 $H'(I_1) < 0$, $H'(I_2) > 0$, 此时 $E_1 = (I_1, V_1)$ 为鞍点, $E_2 = (I_2, V_2)$ 为非鞍点. 对于所有的非鞍点, 当 $D > 0$ 时是稳定的.

2.4 后向分支

定理 4 在 $R_0 = 1$ 时, 当条件 $\beta > \beta_c$ 成立, 或 $\beta < \beta_c$ 且 $\delta < \delta_c$ 成立时, 模型(2) 将会产生后向分支.

证 令 $\mu_1 = \frac{\beta[\theta + b + \sigma m' - (1 - \sigma)mb]}{m' + \theta + b} - (1 - q)b$, 则当且仅当 $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ 时, 有 $R_0 = 1$. 根据文献 [16] 计算决定系统零解局部动力学性质的 A, B 得出系统产生后向分支的条件. 现利用无病平衡点平移至原点并展开后的系统(6) 进行计算.

设系统(6) 线性部分构成的矩阵 Y 在零特征根处所具有的非负左、右特征向量分别为 v, ω . 其中

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(mb + m') - \frac{\beta\sigma(mb + m')}{m' + \theta + b} & -(m' + \theta + b) \end{pmatrix}$$

求得左右特征向量分别为:

$$v = (1, 0) \quad \omega = \left(1, -\frac{m' + mb}{m' + \theta + b} - \frac{\beta\sigma(m' + mb)}{(m' + \theta + b)^2}\right)$$

设系统(6) 的右端函数各分量表示为 $f_i(x, \eta)$ ($i=1, 2$). 现令 $x_1 = I', x_2 = V', \eta = \bar{\mu}_1 - \mu_1$. 则右端函数展式可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1^2} &= -\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta}; \quad \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} = -\beta + \beta\sigma; \quad \frac{\partial^2 f_2(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} = -\beta\sigma; \\ \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1 \partial \eta} &= 1 - R_0 + \frac{\beta[\theta + b + \sigma m' - (1 - \sigma)mb]}{(m' + \theta + b)[\mu_1 + (1 - q)b]} \end{aligned}$$

其余分量二阶导结果均为 0. 则

$$\begin{aligned} A &= \sum v_k \omega_i \omega_j \frac{\partial^2 f_k(0, 0)}{\partial x_i \partial x_j} = v_1 \omega_1 \omega_1 \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1^2} + v_1 \omega_1 \omega_2 \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} = (-\beta + \beta\sigma)(V'_1(0) - V'_2(0)) \\ B &= \sum v_k \omega_i \frac{\partial^2 f_k(0, 0)}{\partial x_i \partial \eta} = v_1 \omega_1 \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1 \partial \eta} = 1 - R_0 + \frac{\beta[\theta + b + \sigma m' - (1 - \sigma)mb]}{(m' + \theta + b)[\mu_1 + (1 - q)b]} \end{aligned}$$

在 $R_0 = 1$ 时, 若 $A > 0, B > 0$, 系统会产生后向分支. 由于此时 $B > 0$ 成立, 只需

$$A > 0 \Leftrightarrow V'_1(0) - V'_2(0) < 0 \Leftrightarrow -\frac{(mb + m')(m' + \theta + b + \beta\sigma)}{(m' + \theta + b)^2} < \frac{\mu_0 - \mu_1 + \beta\delta}{\beta(\sigma - 1)\delta}$$

则有

$$\begin{aligned} &\beta(1 - \sigma)(mb + m')\delta(m' + \theta + b) + \beta^2\sigma(1 - \sigma)\delta(mb + m') - \\ &\beta\delta(m' + \theta + b)^2 > (\mu_0 - \mu_1)(m' + \theta + b)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

从式(7) 可以看出, 若满足条件:

$$(1 - \sigma)\delta(m' + \theta + b) + \beta\sigma(1 - \sigma)\delta(mb + m') > \delta(m' + \theta + b)^2$$

即令

$$\beta_c = \frac{(m' + \theta + b)^2 - (1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b)}{\sigma(1 - \sigma)(mb + m')}$$

则当条件 $\beta > \beta_c$ 时, 系统可以产生后向分支.

而当 $\beta < \beta_c$ 时, 则只需满足条件:

$$\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m') < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\delta}$$

即当满足条件

$$\begin{aligned} \delta &< \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m')} \\ \Leftrightarrow \delta &< \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(\beta_c - \beta)\sigma(1 - \sigma)(mb + m')} \end{aligned}$$

时, 系统也会产生后向分支. 令 $\delta_c = \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(\beta_c - \beta)\sigma(1 - \sigma)(mb + m')}$.

综上所述, 当 $\beta > \beta_c$ 或 $\beta < \beta_c$ 时, 令 $\delta < \delta_c$ 时, 模型(2) 会产生后向分支.

值得注意的是, 定理 2 中的 $C > 0$ 等价于:

$$\left(-\beta + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\delta}\right) + (-\beta + \beta\sigma) \left[-\frac{mb + m'}{m' + \theta + b} - \frac{\beta\sigma(mb + m')}{(m' + \theta + b)^2}\right] > 0 \Leftrightarrow$$

$$\delta < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m')}$$

则在 $R_0 = 1$, 即无病平衡点为右鞍左结点时, 系统(2) 会产生后向分支.

3 数值模拟

1) 固定参数 $\mu_0 = 0.08$, $\mu_1 = 0.8$, $\delta = 0.1$ 分析了饱和和治疗函数的图像(图 3). 图 3 表明, 对于任意的 $\delta > 0$, 饱和治疗函数总介于 μ_0 与 μ_1 之间, 并且当 $I = \delta$ 时治疗率达到中等水平, 说明包含医院人均病床数在内的医疗资源数量与治疗效果密切相关, 与此同时, 治疗函数 μ 随染病者密度 I 的增大而呈减小的趋势并最终趋于最小恢复率, 从另一层面也表明了有限的医疗资源会限制疾病的治疗.

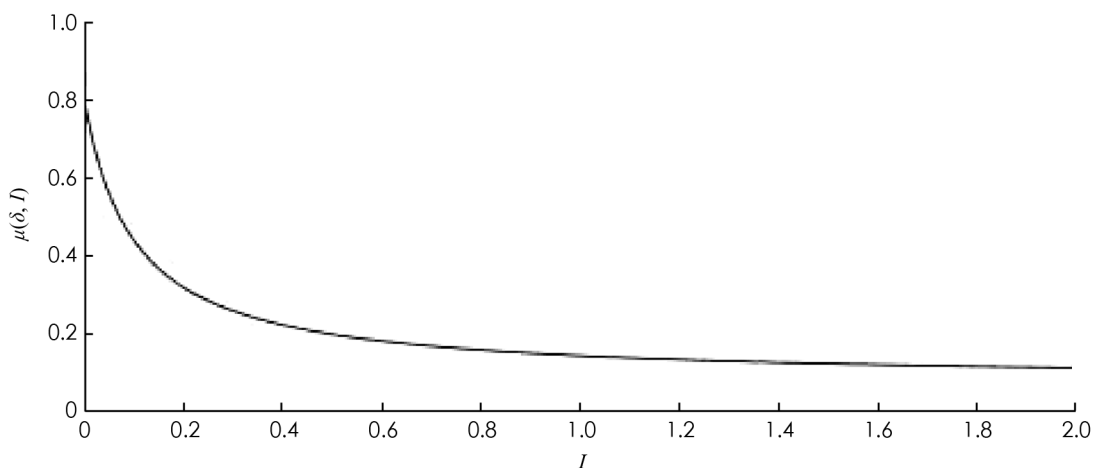


图 3 饱和治疗函数 $\mu(\delta, I)$ 图像

2) 固定参数 $\mu_0 = 0.1$, $\mu_1 = 0.6$, $\theta = 0.1$, $m' = 0.4$, $m = 0.6$, $\sigma = 0.2$, $b = 0.06$, $q = 0.06$, 且令人均病床数 $\delta = 0.1$ 不变, 绘制出在 β 取不同值时系统(2) 在相平面 (V, I) 内的轨迹图(图 4). 图 4 表明平衡点的个数及类型会随 β 发生变化. 图 4(a) 取参数 $\beta = 0.7$, 系统存在唯一的无病平衡点 E_0 且稳定; 图 4(b) 取参数 $\beta = 1$, 系统存在两个正平衡点以及一个稳定的无病平衡点, 其中 E_1 为鞍点, E_2 为稳定的结点; 图 4(c) 取参数 $\beta = 2.3$, 系统存在一个不稳定的无病平衡点和一个稳定的结点.

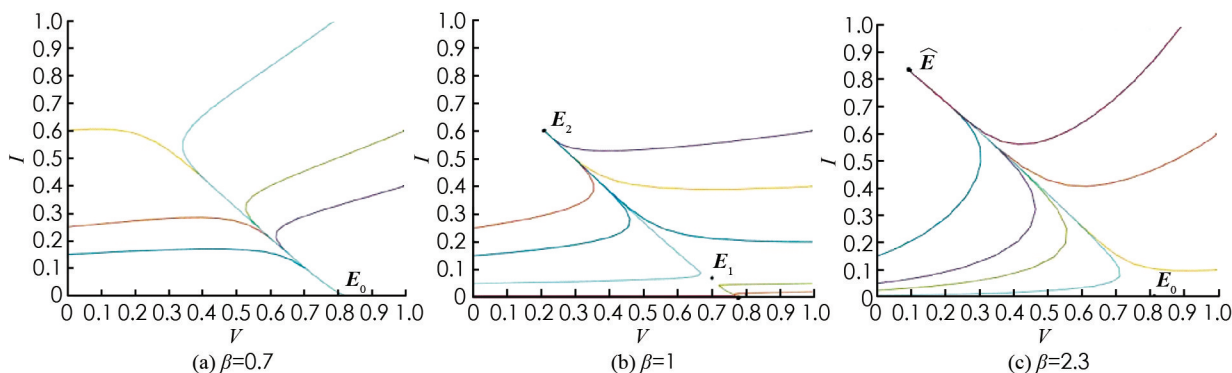


图 4 模型在相平面 (V, I) 内轨迹图(固定 $\delta = 0.1$ 不变)

固定参数 $\mu_0 = 0.1, \mu_1 = 0.6, \theta = 0.1, m' = 0.4, m = 0.6, \sigma = 0.2, b = 0.06, q = 0.06$, 令有效接触率 $\beta = 0.5$ 不变, 绘制出在 δ 取不同值时系统(2) 在相平面 (V, I) 内的轨迹图(图 5). 图 5 表明平衡点的个数及类型会随 δ 发生变化. 图 5(a) 取参数 $\delta = 0.1$, 系统存在唯一的无病平衡点 E_0 且稳定; 图 5(b) 取参数 $\delta = 0.001$, 系统存在两个正平衡点以及一个稳定的无病平衡点, 其中 E_1 为鞍点, E_2 为稳定的结点.

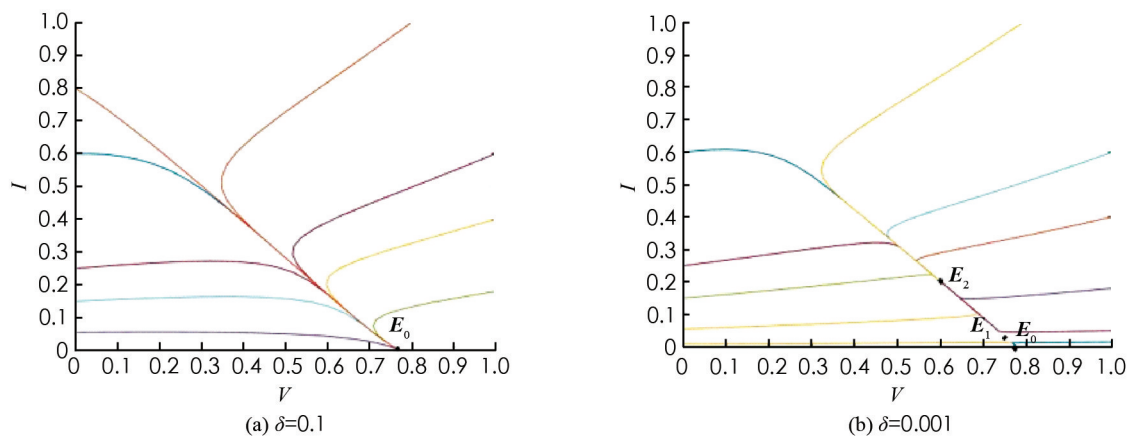


图 5 模型在相平面 (V, I) 内轨迹图(固定 $\beta = 0.5$ 不变)

3) 固定参数 $\sigma = 0.6, m' = 0.4, \theta = 0.7, m = 0.6, b = 0.2, q = 0.2, \mu_0 = 0.1, \mu_1 = 0.6$. 图 6(a) 中假设 $\beta = 1.3, \delta = 0.3$, 此时模型产生后向分支, 在 $R_0 < 1$ 时既存在局部稳定的无病平衡点, 还存在两个地方病平衡点, 其中不稳定的鞍点会随 R_0 的增加最终消失, 稳定的平衡点会逐渐趋于一个稳定水平. 图 6(b) 中假设 $\beta = 0.5, \delta = 0.5$, 此时模型发生前向分支, 即 $R_0 < 1$ 时只存在一个稳定的无病平衡点, 而 $R_0 > 1$ 时模型存在唯一一个稳定的地方病平衡点. 研究后向分支的目的就是为避免选取使模型产生后向分支的参数, 以使疾病可以在 $R_0 < 1$ 时走向消亡.

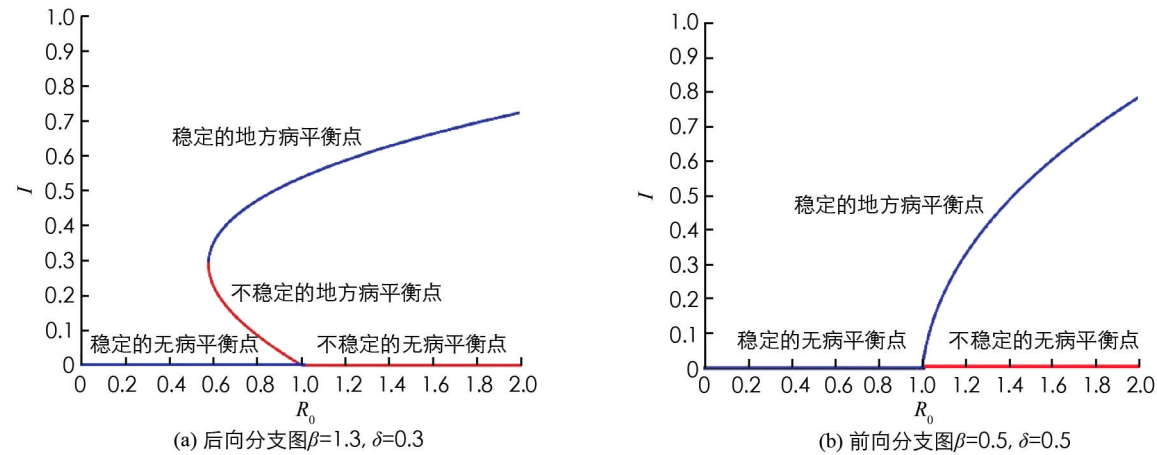


图 6 模型后向分支和前向分支图

4 理论结果比较

4.1 基本再生数

根据本文得到的基本再生数式(3), 相较于文献[14] 得到的基本再生数:

$$\bar{R}_0 = \frac{\beta \Lambda (\theta + d + \sigma m')}{d(d + \mu_1)(m' + \theta + d)} \tag{8}$$

其中 d 表示自然死亡率. 特殊地, 当总人口恒定, 即 $\frac{\Lambda}{d} = 1$ 时, 属于文献[14] 的特殊情况, 此时与本文所作假设相同.

对于基本再生数式(3):

1) 当 $q = 0$ 时, 基本再生数(3) 式转化为

$$R_0^{(1)} = \frac{\beta[\theta + d + \sigma m' - (1 - \sigma)mb]}{(m' + \theta + d)(\mu_1 + b)}$$

与式(7) 比较后可以看出, 新生儿接种比例 m 与基本再生数 $R_0^{(1)}$ 呈负相关, 即增加对易感者和接种者新生儿的预防接种因素后, 会使基本再生数减小, 从而缩短疾病消失或稳定的时间.

当 $m = 0$ 时, 基本再生数式(3) 转化为:

$$R_0^{(2)} = \frac{\beta(\theta + b + \sigma m')}{(m' + \theta + d)[\mu_1 + (1 - q)b]}$$

可以看出, 垂直传染率 q 与基本再生数 $R_0^{(2)}$ 呈正相关, 即增加新生儿垂直传染的传播特征后, 会使基本再生数增大, 从而延长疾病消失或稳定的时间.

4.2 平衡点类型

平衡点的相关结论与文献[14] 所得到的结果基本一致, 均得到了当基本再生数大于 1 时系统存在一个稳定的地方病平衡点和一个不稳定的无病平衡点; 当基本再生数小于 1 时, 除稳定的无病平衡点外系统还存在一个或两个地方病平衡点, 其稳定条件类似.

4.3 后向分支条件

相较于文献[14] 所得到的后向分支产生条件:

$$\delta < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)m'(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma m'(1 - \sigma)} \quad (9)$$

依据本章得到的发生后向分支的条件:

$$\delta < \frac{(\mu_1 - \mu_0)(m' + \theta + b)^2}{\beta(m' + \theta + b)^2 - \beta(1 - \sigma)(mb + m')(m' + \theta + b) - \beta^2\sigma(1 - \sigma)(mb + m')}$$

可以看出, 在加入对易感者和接种者新生儿的预防接种因素后, 产生后向分支的参数 δ 范围相对扩大, 这对于控制疾病而言, 参数 δ 在发生后向分支的范围之外选取才有显著作用.

5 小结与展望

本文基于乙型肝炎等传染病, 考虑疫苗接种存在暂时性免疫且有一定接种效率的实际情况, 同时考虑到乙肝病毒可以垂直传染, 建立了具有暂时性免疫仓室的一类考虑垂直传染、接种及医院病床数的 SIVS 传染病模型, 通过理论证明和定量模拟, 进一步完善具有暂时性免疫的传染病研究, 并得到相关结论:

1) 当疾病的基本再生数大于 1 时, 随时间推移疾病的染病者数量会逐渐趋于一个稳定水平; 当疾病的基本再生数小于 1 且人均医院病床数大于一定值时, 随时间推移疾病将逐渐消亡.

2) 当疾病接触率 $\beta > \beta_c$ 或人均医院病床数量 $\delta < \delta_c$ 时, 疾病会发生后向分支, 此时无病平衡点在 $R_0 = 1$ 时为右鞍左结点. 这意味着在基本再生数小于 1 时, 既存在稳定的无病平衡点也存在稳定的地方病平衡点, 而控制疾病流行需要调节参数使其处于不发生后向分支的范围.

3) 通过理论研究发现, 加入垂直传染的传播特点后, 基本再生数会相对增大并延长疾病走向消亡的时间; 而加入对易感者和接种者新生儿的预防接种措施后, 可以有效缓解基本再生数的增加, 控制疾病的流行, 同时发生后向分支的参数 δ 范围也会扩大, 控制疾病时应使得接触率和人均病床数处于不发生后向分支的范围内.

4) 通过以上理论证明及数值模拟的结果, 可作如下解释: 通过尽量减少易感者、接种者与染病者的有效接触, 极大的丰富包括人均病床数在内的医疗资源, 可以避免发生后向分支, 从而使疾病走向消无; 同时也可以通过增加对新生儿的预防接种比例和接种效率控制疾病.

在实际生活中, 曾有报道乙肝患者的子代由于未接种乙肝疫苗导致多年后患病并死亡的实例, 所以还可考虑对未发生垂直传播的染病者新生儿进行接种的实际情形, 今后可根据这一特点继续进行研究. 同时, 也可以考虑年龄结构、心理效应及媒体报道等对此类疾病的影响.

参考文献:

- [1] 彭文伟. 传染病学 [M]. 6 版. 北京: 人民卫生出版社, 2006.
- [2] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] KRIBS-ZALETA C M, VELASCO-HERNÁNDEZ J X. A Simple Vaccination Model with Multiple Endemic States [J]. *Mathematical Biosciences*, 2000, 164(2): 183-201.
- [4] 成小伟, 胡志兴. 具有垂直传染和预防接种的 SIVR 模型的研究 [J]. *科学技术与工程*, 2008, 8(15): 4051-4054, 4059.
- [5] DUAN X C, YUAN S L, LI X Z. Global Stability of an SVIR Model with Age of Vaccination [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 226: 528-540.
- [6] LI J Q, MA Z E. Global Analysis of SIS Epidemic Models with Variable Total Population Size [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, 39(11-12): 1231-1242.
- [7] ARIFUL KABIR K M, TANIMOTO J. A Cyclic Epidemic Vaccination Model: Embedding the Attitude of Individuals Toward Vaccination into SVIS Dynamics through Social Interactions [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2021, 581: 126230.
- [8] 韩熙瑞, 池建昌, 刘阳. 探讨婴幼儿接种乙肝疫苗在预防乙型肝炎方面的作用 [J]. *智慧健康*, 2020, 6(27): 73-74.
- [9] 崔倩, 方宝莲. 不同人群接种乙肝疫苗免疫效果分析 [J]. *中西医结合肝病杂志*, 2020, 30(4): 363-364.
- [10] 张玉兰. 接种乙肝疫苗能管多久 [J]. *人人健康*, 2006(3): 25.
- [11] SHAN C H, YI Y F, ZHU H P. Nilpotent Singularities and Dynamics in an SIR Type of Compartmental Model with Hospital Resources [J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 260(5): 4339-4365.
- [12] 康彩丽. 考虑医疗资源影响下传染病模型的建立与研究 [D]. 太原: 中北大学, 2015.
- [13] 张永鑫, 李桂花, 康彩丽. 具有接种项且考虑医院病床数的 SVIS 模型的性态分析 [J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2016, 33(5): 606-610.
- [14] 白婵, 万辉. 一个传染病模型中的后向分支问题 [J]. *南京师大学报(自然科学版)*, 2017, 40(3): 5-12.
- [15] 董宜静, 李桂花. 考虑潜伏期及医疗资源影响的 SEIS 模型动力学分析 [J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2017, 34(2): 169-174.
- [16] CARLOS C C, SONG B J. Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering: MBE*, 2004, 1(2): 361-404.

责任编辑 张杓