DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.10.005

带类 $p(x)$-拉普拉斯算子的问题在全空间上的多重解[①]

唐映，　储昌木

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：研究了全空间中一类带类 $p(x)$-拉普拉斯算子的问题.在非线性项不满足(AR)条件时，通过证明该类问题的泛函满足 Cerami 条件，利用对称山路引理和变分方法，获得了该类问题无穷多解的存在性.

关　键　词：类 $p(x)$-拉普拉斯算子；对称山路引理；Cerami 条件

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)10-0037-08

Infinitely Many Solutions Involving $p(x)$-Laplacian-like Operator

TANG Ying，　CHU Changmu

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: In this paper, a class of problems have been studied with $p(x)$-Laplacian-like operator in $\mathbb{R}^N$. Under the condition that the Nonlinear term does not satisfy the (AR) condition, it has been proved that the functional of such problems satisfies Cerami condition, and the existence of infinitely many solutions via the symmetric mountain pass lemma and the variational method has been proved.

Key words: $p(x)$-Laplacian-like operator; symmetric mountain pass lemma; Cerami condition

考虑如下带类 $p(x)$-拉普拉斯算子的椭圆方程：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)+V(x)|u|^{p(x)-2}u=f(x,u) & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N\geqslant 2$，$V:\mathbb{R}^N\longrightarrow(0,\infty)$ 是连续函数.$p:\mathbb{R}^N\longrightarrow(1,\infty)$ 满足

$$1<p^-=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}p(x)\leqslant p^+=\sup_{x\in\mathbb{R}^N}p(x)<N$$

近年来，包含 $p(x)$-拉普拉斯算子的椭圆方程及变分方法的研究，受到了学者们的广泛关注(见文献[1-14]).涉及变指数的数学模型可用于描述弹性力学和电流变液等物理现象.文献[6]研究了如下椭圆方

① 收稿日期：2022-03-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11861021，11861021).
作者简介：唐映，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：储昌木，教授.

程的特征值问题：

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)=\lambda f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$p(x)\in C(\overline{\Omega})$ 且 $p(x)>2$，$\lambda>0$. 令 $f(x,u)$ 满足以下(AR)条件：

(AR) 存在 $M>0$，$\theta>p^+$，使得

$$0<\theta F(x,t)\leqslant tf(x,t)\qquad |t|\geqslant M,\ x\in\Omega$$

其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$.

当 $f(x,u)$ 满足(AR)条件和一些附加条件时，文献[6]证明了：任意的 $\lambda>0$ 均为方程(2)的一个特征值.

最近，文献[15]在 $\lambda=1$ 的情形下考虑了方程(2)解的存在性和多重性，当 $f(x,u)$ 满足超线性增长条件但不满足(AR)条件时，利用山路引理获得了方程(2)非平凡解的存在性. 然而，当 $\Omega=\mathbb{R}^N$ 时，对该类椭圆方程的研究不多. 本文将研究 $f(x,u)$ 满足超线性增长条件但不满足(AR)条件(见文献[16])时，方程(1)非平凡解的存在性.

我们给出如下假设条件：

(V) $V\in C(\mathbb{R}^N)$ 满足 $V^-=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)>0$ 且 $\operatorname{meas}\{x\in\mathbb{R}^N:-\infty<V(x)\leqslant v_0\}<+\infty$，其中 v_0 为一常数，$\operatorname{meas}(\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的 Lebesgue 测度；

(H) $p,q\in C_+(\mathbb{R}^N)=\{h\in C(\mathbb{R}^N):\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}h(x)>1\}$，满足 $1<p^-\leqslant p^+<q^-\leqslant q^+<p^*(x)=\dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$；

(F_1) $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件，即对所有的 $t\in\mathbb{R}$，$f(\cdot,t)$ 可测，对所有的 $x\in\mathbb{R}^N$，$f(x,\cdot)$ 连续；

(F_2) 存在非负函数 $\rho\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)\cap L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 和 $\sigma\in L^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-p^-}}(\mathbb{R}^N)\cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$，使得对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$，$|f(x,t)|\leqslant\rho(x)+\sigma(x)|t|^{q(x)-1}$；

(F_3) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{F(x,t)}{|t|^{p^+}}=\infty$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立；

(F_4) $\lim\limits_{|t|\to 0}\dfrac{F(x,t)}{|t|^{p^+}}<\infty$ 关于 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立；

(F_5) 存在常数 $c_0,r_0\geqslant 0$ 及 $k(x)>\dfrac{N}{p(x)}$，使得对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$，当 $|t|\geqslant r_0$ 时，有

$$|F(x,t)|^{k(x)}\leqslant c_0|t|^{k(x)p(x)}\mathscr{F}(x,t)$$

其中 $\mathscr{F}(x,t)=\dfrac{1}{p^+}f(x,t)t-F(x,t)\geqslant 0$；

(F_6) $f(x,-t)=-f(x,t)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 成立.

本文的主要结果如下：

定理1　假设条件(V),(H)和(F_1)-(F_6)成立，则方程(1)有无穷多解.

记 $\zeta(\mathbb{R}^N)$ 是由所有可测实函数组成的集合. 变指数 Lebesgue 空间

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in\zeta(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

对应的范数为

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}$$

变指数 Sobolev 空间

$$W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)=\{u\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N):|\nabla u|\in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)\}$$

对应的范数为

$$\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}=\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

定义

$$X=\left\{u\in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^{p(x)}+V(x)|u|^{p(x)})\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

其对应的范数为

$$\|u\|_X=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\frac{\nabla u}{\lambda}\right|^{p(x)}+V(x)\left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}$$

当 V 满足条件(V) 时，容易验证范数 $\|u\|_X$ 与 $\|u\|_{1,p(x)}$ 等价[16].

命题 1[2]　对所有的 $u\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$，$v\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}uv\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{(p')^-}\right)\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\leqslant 2\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}$$

其中 $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{p'(x)}=1$.

命题 2[3]　设 $\rho(u)=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^{p(x)}+V(x)|u|^{p(x)})\mathrm{d}x$，则：

(i) $\rho(u)>1(=1;<1)\Leftrightarrow\|u\|_X>1(=1;<1)$；

(ii) 若 $\|u\|_X>1$，则 $\|u\|_X^{p^-}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|_X^{p^+}$；

(iii) 若 $\|u\|_X<1$，则 $\|u\|_X^{p^+}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|_X^{p^-}$.

定义泛函

$$\varphi(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)}+\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}+V(x)|u|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x$$

则 $\varphi(u)\in C^1(X,R)$ 且

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u+\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)\nabla v+V(x)|u|^{p(x)-2}uv\right]\mathrm{d}x$$

定义

$$\psi(u)=\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x$$

则 $\psi(u)\in C^1(X,\mathbb{R})$，且

$$\langle\psi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

类似文献[6,16] 的证明，有如下命题成立：

命题 3　若条件(V) 成立，则泛函 $\varphi:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 X 中是凸泛函且弱下半连续；若条件(V)，(H)，(F_1)，(F_2) 成立，则 ψ 在 X 中弱连续，$\psi':X\longrightarrow X'$ 是一个紧算子.

命题 4　假设 $p:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ Lipschitz 连续，$q\in C_+(\mathbb{R}^N)$，$p(x)\leqslant q(x)\leqslant p^*(x)$，$1<p^-\leqslant p^+<N$，则 $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 是连续嵌入.

命题 5[4]　假设 $p:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ Lipschitz 连续，有 $1<p^-\leqslant p^+<N$，

(i) 若条件(V) 成立，则 $X\hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 是紧嵌入；

(ii) 若条件(V) 成立，可测函数 $q(x)$ 满足 $p(x)<q(x)$ 且 $\lim\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(p^*(x)-q(x))>0$，则 $X\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 是紧嵌入.

定义 1　若对所有的 $v\in X$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u+\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)\nabla v+V(x)|u|^{p(x)-2}uv\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

则称 $u\in X$ 是方程(1)的弱解.

方程(1)对应的能量泛函为

$$I(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)}+\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}+V(x)|u|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x$$

众所周知,方程(1)的弱解与泛函 I 的临界点等价.

定义 2 设 E 是 Banach 空间,$J\in C^1(E,\mathbb{R})$,$c\in\mathbb{R}$. 如果满足 $J(u_n)\to c$ 且 $\|J'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0$ 的序列 $\{u_n\}\subset E$ 有收敛子序列,则称泛函 J 满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件.

引理 1[17] 设 E 是无限维 Banach 空间,$E=Y\oplus Z$,其中 Y 为有限维空间. 若对于任意 c 都有 $J\in C^1(E,\mathbb{R})$ 满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件,$J(0)=0$,$J(-u)=J(u)$,且

(i) 存在常数 $\rho_0,\alpha>0$,使得 $J|_{\partial B_{\rho_0}\cap Z}\geqslant\alpha$;

(ii) 对任意有限维子空间 $\widetilde{E}\in E$,存在 $R=R(\widetilde{E})>0$,使得在 $\widetilde{E}\backslash B_R$ 上有 $J(u)\leqslant 0$.

则 J 有一列临界值趋于 ∞ 的序列.

令 $\{e_i\}$ 为 X 上的标准正交基,且定义 $E_i=\mathrm{span}\{e_i\}$. 记

$$Y_k=\bigoplus_{i=1}^{k}E_i\qquad Z_k=\overline{\bigoplus_{i\geqslant k}E_i}$$

则

$$E=\mathrm{span}\{e_i:i\in\mathbb{N}\}=Y_k\oplus Z_k$$

引理 2[15] 若条件(V)成立,对于 $p(x)<s(x)<p^*$,当 $k\to\infty$ 时,有

$$\alpha_k(s)=\sup_{u\in Z_k,\|u\|=1}\|u\|_{s(x)}\to 0$$

由引理 2,我们可以选择一个正整数 $m\geqslant 1$,使得

$$\|u\|_{p^+}^{p^+}\leqslant\frac{1}{p^+C_1}\|u\|^{p^+}\qquad\forall u\in Z_m\tag{3}$$

设

$$E=X\qquad Y=Y_m\qquad Z=Z_m$$

则 $X=Y\oplus Z$.

引理 3 如果条件(V),(H),$(\mathrm{F}_1)-(\mathrm{F}_5)$ 成立,则泛函 I 满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件.

证 设 $\{u_n\}$ 是 I 在 X 中的 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列,即

$$I(u_n)\to c\qquad\|I'(u_n)\|_{X^*}(1+\|u_n\|_X)\to 0\qquad n\to\infty\tag{4}$$

首先验证 $\{u_n\}$ 在 X 中有界. 假设 $\{u_n\}$ 在 X 中无界,则存在一个子列仍记为 $\{u_n\}$,使得当 $n\to\infty$ 时,$\|u_n\|_X\to\infty$. 定义 $\omega_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|_X}$,则 $\|\omega_n\|_X=1$. 因此,存在收敛子序列仍记为 $\{\omega_n\}$,使得当 $n\to\infty$ 时,在 X 中 $\{\omega_n\}$ 弱收敛到 ω;在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\{\omega_n\}$ 几乎处处收敛到 ω;在 $L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 中 $\{\omega_n\}$ 强收敛到 ω. 其中 $s(x)\geqslant p(x)$ 满足 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(p^*(x)-s(x))>0$.

若 $\omega\neq 0$,设

$$\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}^N:\omega(x)\neq 0\}$$

当 $x\in\Omega_1$ 时,有 $|u_n(x)|\to+\infty$. 通过条件(F_3),有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n(x))}{|u_n(x)|^{p^+}}=\infty\tag{5}$$

因此,由(4),(5)式及 Fatou 引理,有

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{I(u_n)}{\|u_n\|_X^{p^+}}\leqslant\frac{2}{p^-}-\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^{p^+}}|\omega_n|^{p^+}\mathrm{d}x=-\infty\tag{6}$$

矛盾.

若 $w=0$，在 $L^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 中，$w_n\to 0$，其中

$$p(x)\leqslant s(x)<p^*$$

当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}
&c+1\geqslant I(u_n)-\frac{1}{p^+}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\\
&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_n|^{p(x)}+\sqrt{1+|\nabla u_n|^{2p(x)}}+V(x)|u_n|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x-\\
&\frac{1}{p^+}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^{p(x)}+\frac{|\nabla u_n|^{2p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u_n|^{2p(x)}}}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{p^+}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x+\\
&\frac{1}{p^+}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n(x))u_n\mathrm{d}x\geqslant\\
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p^+}\right)\left(|\nabla u_n|^{p(x)}+\sqrt{1+|\nabla u_n|^{2p(x)}}+V(x)|u_n|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{F}(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant\\
&\int_{\mathbb{R}^N}\mathscr{F}(x,u_n)\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{7}$$

设

$$\Omega_n(a,b)=\{x\in\mathbb{R}^N:a\leqslant|u_n(x)|<b\}\qquad a\geqslant 0$$

$$c+o(1)=I(u_n)\geqslant\frac{1}{p^+}\|u_n(x)\|_X^{p^-}-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x+o(1)\tag{8}$$

由(8)式可知

$$0<\frac{1}{p^+}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x\tag{9}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，由条件(F_2)可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n(0,r_0)}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\int_{\Omega_n(0,r_0)}\frac{\rho(x)|u_n|+\dfrac{\sigma(x)}{q(x)}|u_n|^{q(x)}}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{2}{\|u_n\|_X^{p^-}}\|\rho\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\frac{1}{q^-}\int_{\Omega_n(0,r_0)}|u_n|^{q(x)-p^-}\sigma(x)|w_n|^{p^-}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\frac{2}{\|u_n\|_X^{p^-}}\|\rho\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|u_n\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\frac{2r_0^{\alpha-p^-}}{q^-}\|\sigma\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-p^-}}(\mathbb{R}^N)}\|w_n\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}^{p^-}\leqslant\\
&\frac{C_2}{\|u_n\|_X^{p^--1}}+\frac{2r_0^{\alpha-p^-}}{q^-}\|\sigma\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)-p^-}}(\mathbb{R}^N)}\|w_n\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}^{p^-}\to 0
\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\alpha=q^+,q^-$，C_1 是正常数. $k(x)>\dfrac{N}{p(x)}$，$p(x)<k'(x)p(x)<p^*(x)$. 当 $n\to\infty$ 时，由条件(F_5)和(7)式可得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n(r_0,\infty)}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x\leqslant&\int_{\Omega_n(r_0,\infty)}\frac{|F(x,u_n)|}{|u_n|^{p(x)}}|w_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant\\
&2\left\|\frac{|F(x,u_n)|}{|u_n|^{p(x)}}\right\|_{L^{k(\cdot)}(\Omega_n(r_0,\infty))}\|w_n^{p(x)}\|_{L^{k'(\cdot)}(\Omega_n(r_0,\infty))}\leqslant\\
&2\|(c_0\mathscr{F}(x,u_n))^{\frac{1}{k(x)}}\|_{L^{k(\cdot)}(\Omega_n(r_0,\infty))}\|w_n\|_{L^{k'(\cdot)p(\cdot)}(\Omega_n(r_0,\infty))}^{p_0}\leqslant\\
&2c_0^{\frac{1}{k_0}}\|\mathscr{F}(x,u_n))\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{k^-}}\|w_n\|_{L^{k'(\cdot)p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}^{p_0}\leqslant
\end{aligned}$$

$$2c_0^{\frac{1}{k_0}}(K+1)^{\frac{1}{k_-}}\|w_n\|^{p_0}_{L^{k'(\cdot)p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\to 0 \tag{11}$$

其中 $k_0=k_+,k_-$，$p_0=p^+,p^-$. 当 $n\to\infty$ 时，结合(10),(11)式，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x=\int_{\Omega_n(0,r_0)}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x+\int_{\Omega_n(r_0,\infty)}\frac{|F(x,u_n)|}{\|u_n\|_X^{p^-}}\mathrm{d}x\to 0$$

与(9)式矛盾.

综上所述，在 X 中序列 $\{u_n\}$ 有界. 由命题 5 可知，当 $n\to\infty$ 时，存在 $u\in X$，使得：在 X 中 $\{u_n\}$ 弱收敛到 u；在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\{u_n\}$ 几乎处处收敛到 u；在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$ 中 $\{u_n\}$ 强收敛到 u. 通过条件(F_2)和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}[2\rho(x)+\sigma(x)(|u_n|^{q(x)-1}+|u|^{q(x)-1})]|u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant\\&4\|\rho\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\|u_n-u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\\&2\|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}(\|u_n\|^{q^+-1}_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\|u_n\|^{q^--1}_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\|u\|^{q^+-1}_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}+\|u\|^{q^--1}_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)})\|u_n-u\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x=0 \tag{12}$$

当 $n\to\infty$ 时，在 X 中 $u_n\rightharpoonup u$，在 X^* 中 $I'(u_n)\to 0$，有

$$\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle\to 0$$

则

$$\begin{aligned}o(1)=&\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle=\\&\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

结合(12)式，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u\rangle=0 \tag{13}$$

由文献[1]可知存在著名的 Simon 不等式，即对所有的 $\xi,\eta\in\mathbb{R}^N$，C 是只依赖 p^-,p^+ 的常数，

$$\Delta_1=\{x\in\mathbb{R}^N:p(x)\geqslant 2\}\qquad\Delta_2=\{x\in\mathbb{R}^N:1<p(x)<2\}$$

满足

$$|\xi-\eta|^{p(x)}\leqslant\begin{cases}C(|\xi|^{p(x)-2}\xi-|\eta|^{p(x)-2}\eta)\cdot(\xi-\eta) & x\in\Delta_1\\ C[(|\xi|^{p(x)-2}\xi-|\eta|^{p(x)-2}\eta)\cdot(\xi-\eta)]^{\frac{p(x)}{2}}\times(|\xi|^{p(x)}+|\eta|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}} & x\in\Delta_2\end{cases} \tag{14}$$

假设 $x\in\Delta_1$，当 $n\to\infty$ 时，结合(13),(14)式，有

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1}|\nabla u_n-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant&C\int_{\Delta_1}(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)\mathrm{d}x\leqslant\\&C\int_{\Delta_1}(|\nabla u_n|^{p(x)}-|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla u-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla u_n+|\nabla u|^{p(x)})\mathrm{d}x\leqslant\\&C\int_{\Delta_1}\Big(|\nabla u_n|^{p(x)}+\frac{|\nabla u_n|^{2p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u_n|^{2p(x)}}}+V(x)|u_n|^{p(x)}-|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla u-\\&\frac{|\nabla u_n|^{2p(x)-2}\nabla u_n\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u_n|^{2p(x)}}}-V(x)|u_n|^{p(x)-2}u_nu-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla u_n-\\&\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u\nabla u_n}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}-V(x)|u|^{p(x)-2}uu_n+|\nabla u|^{p(x)}+\frac{|\nabla u|^{2p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}+\\&V(x)|u|^{p(x)}\Big)\mathrm{d}x=\\&C(\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle-\langle\varphi'(u_n),u\rangle-\langle\varphi'(u),u_n\rangle+\langle\varphi'(u),u\rangle)=\end{aligned}$$

$$C\langle \varphi'(u_n)-\varphi'(u),\ u_n-u\rangle \to 0 \tag{15}$$

利用条件(V) 和(14) 式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\Delta_1} V(x)\,|u_n-u|^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\Delta_1} V(x)(|u_n|^{p(x)-2}u_n-|u|^{p(x)-2}u)(u_n-u)\mathrm{d}x \to 0 \tag{16}$$

假设 $x\in\Delta_2$，在 X 中序列 $\{u_n\}$ 有界，存在 $H>0$，有 $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant H$. 利用(14) 式和 Hölder 不等式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_2}|\nabla u_n-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\int_{\Delta_2}[(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)]^{\frac{p(x)}{2}}(|\nabla u_n|^{p(x)}+|\nabla u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|[(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)]^{\frac{p(x)}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Delta_2)}\|(|\nabla u_n|^{p(x)}+|\nabla u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}}\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(\Delta_2)}\leqslant\\
&C\|[(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)]^{\frac{p(x)}{2}}\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(\Delta_2)}\to 0
\end{aligned}\tag{17}$$

存在 $L>0$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\,|u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant L$$

利用(14) 式和 Hölder 不等式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_2}V(x)\,|u_n-u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\int_{\Delta_2}V(x)[(|u_n|^{p(x)-2}u_n-|u|^{p(x)-2}u)(u_n-u)]^{\frac{p(x)}{2}}(|u_n|^{p(x)}+|u|^{p(x)})^{\frac{2-p(x)}{2}}\mathrm{d}x\to 0
\end{aligned}\tag{18}$$

结合(15),(16),(17),(18) 式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n-\nabla u|^{p(x)}+V(x)\,|u_n-u|^{p(x)})\mathrm{d}x\to 0$$

则 $\|u_n-u\|_X\to 0$. 因此泛函 I 满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件.

引理 4　假设定理 1 中的条件都成立，则存在常数 $\rho_0,\alpha>0$，使得 $I|_{\partial B_{\rho_0}\cap Z}\geqslant\alpha$.

证　由命题 5 可知存在常数 $C_3>0$，使得

$$|u|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C_3\|u\|_X \tag{19}$$

由条件(F_2),(F_4)，存在 $C_1>0$，$C_4>0$，有

$$|F(x,t)|\leqslant C_1|t|^{p^+}+C_4|t|^{q(x)}\qquad \forall(x,t)\in(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) \tag{20}$$

对于 $u\in Z_m$，由(3),(19) 和(20) 式可得

$$\begin{aligned}
I(u)=&\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)}+\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}+V(x)|u|^{p(x)})\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\\
&\frac{2}{p^+}\|u\|_X^{p^+}-\int_{\mathbb{R}^N}(C_1|u|^{p^+}+C_4|u|^{q(x)})\mathrm{d}x\geqslant\\
&\frac{2}{p^+}\|u\|_X^{p^+}-\frac{1}{p^+}\|u\|_X^{p^+}-C_5\|u\|_X^{q^-}\geqslant\\
&\frac{1}{p^+}\|u\|_X^{p^+}(1-C_5\|u\|_X^{q^--p^+})
\end{aligned}$$

取 $\|u\|_X=\rho_0$，由 $p^+<q^-$ 知，当 ρ_0 充分小时，有

$$I|_{\partial B_{\rho_0}}\geqslant\frac{1}{p^+}\rho_0^{p^+}(1-C_5\rho_0^{q^--p^+})=\alpha>0$$

引理 5　假设定理 1 中的条件都成立，对任意有限维空间 $\widetilde{X}\subset X$，若序列 $\{u_n\}\subset\widetilde{X}$ 满足 $\|u_n\|\to\infty$，则 $I(u_n)\to-\infty$.

证　利用反证法. 假设存在序列 $\{u_n\}\subset\widetilde{X}$，当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n\|\to\infty$，且存在 $M>0$ 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$

有 $I(u_n) \geqslant -M$. 定义 $\omega_n = \dfrac{u_n}{\| u_n \|_X}$, 则 $\| \omega_n \|_X = 1$. 因此, 存在收敛子序列仍记为 $\{\omega_n\}$, 我们可以假设在 X 中 $\{\omega_n\}$ 弱收敛到 ω; 因为 $\widetilde{X}$ 是有限维的, 则在 $\widetilde{X}$ 中 $\{\omega_n\}$ 强收敛到 ω; 在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\{\omega_n\}$ 几乎处处收敛到 ω, 且 $\| \omega \|_X = 1$. 类似引理 3 的证明中(5),(6) 式的论述可导出矛盾.

定理 1 的证明 由引理 3 可知, 泛函 I 满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件. 由引理 4 和引理 5 可知, 泛函 I 满足引理 1 的所有假设. 故定理 1 得证.

参考文献:

[1] XIANG M Q, WANG F L, ZHANG B L. Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Curl Systems Arising in Electromagnetism [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 448(2): 1600-1617.

[2] FAN X L, ZHAO D. On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 263(2): 424-446.

[3] FAN X L, HAN X Y. Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2004, 59(1-2): 173-188.

[4] ALVES C O, LIU S B. On Superlinear $p(x)$-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 73(8): 2566-2579.

[5] FAN X L, ZHANG Q H. Existence of Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet Problem [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2003, 52(8): 1843-1852.

[6] RODRIGUES M M. Multiplicity of Solutions on a Nonlinear Eigenvalue Problem for $p(x)$-Laplacian-Like Operators [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2012, 9(1): 211-223.

[7] 冉玲, 陈尚杰, 李麟. 一类半线性退化 Schrödinger 方程的无穷多大能量解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(2): 21-26.

[8] 鲁雄, 王跃. 一类传送带问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(2): 96-102.

[9] 蒙璐, 储昌木, 雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 82-88.

[10] CHENG Y, O'REGAN D. Characteristic of Solutions for Non-Local Fractional $p(x)$-Laplacian with Multi-valued Nonlinear Perturbations [J]. Mathematische Nachrichten, 2021, 294(7): 1311-1332.

[11] BOUDJERIOU T. Global Existence and Blow-Up of Solutions for a Parabolic Equation Involving the Fractional $p(x)$-Laplacian [J]. Applicable Analysis, 2022, 101(8): 2903-2921.

[12] LI Y, YAO F P. Besov Regularity Estimates for the Elliptic $p(x)$-Laplacian Equation with the Logarithmic Growth [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021, 498(2): 124974.

[13] CHAMMEM R, GHANMI A, SAHBANI A. Existence and Multiplicity of Solutions for Some Styklov Problem Involving $p(x)$-Laplacian Operator [J]. Applicable Analysis, 2022, 101(7): 2401-2417.

[14] FERRARI F, LEDERMAN C. Regularity of Flat Free Boundaries for a $p(x)$-Laplacian Problem with Right Hand Side [J]. Nonlinear Analysis, 2021, 212: 112444.

[15] CHEN S T, TANG X H. Existence and Multiplicity of Solutions for Dirichlet Problem of $p(x)$-Laplacian Type without the Ambrosetti-Rabinowitz Condition [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 501(1): 123882.

[16] LEE J, KIM J M, KIM H Y. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff-Schrödinger Type Equations Involving $p(x)$-Laplacian on the Entire Space $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2019, 45: 620-649.

[17] LI Y, LI L. Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(4): 1455-1463.

责任编辑 廖坤