DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.10.006

非正规子群阶的个数是 2 的有限群[①]

黄硕安， 吕恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 有限群的非正规子群的数量性质对有限群的结构有重要影响. 本文设 $J(G)$ 表示有限群 G 的非正规子群阶的个数，讨论了 $J(G)=2$ 的有限群 G 的结构，并给出了这类有限群的分类.

关 键 词： 非正规子群；可解群；幂零群

中图分类号：O152.1 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000-5471(2022)10-0045-05

Finite Groups with the Number of Non-Normal Subgroups of Order 2

HUANG Shuoan， LYU Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The numerical properties of the non-normal subgroups of a finite group have an important influence on the structure of a finite group. In this paper, let $J(G)$ denote the number of non-normal subgroups orders of finite group G, the structure of finite group G with $J(G)=2$ has been discussed and the classification of the finite group been given.

Key words: non-normal subgroup; solvable group; nilpotent group

本文所涉及的群皆为有限群. 利用非正规子群去研究群的性质和结构是有限群研究的一个重要方向. 例如：群 G 的非正规子群的个数为 0，则 G 为 Dedekind 群，关于它结构的研究可参见文献[1]. 文献[2]利用有限单群分类定理证明了：如果有限非可解群 G 恰有 2 个非正规极大子群同阶类，那么

$$G/S(G) \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$$

其中 $S(G)$ 表示 G 的极大可解正规子群. 文献[3]研究了 $U(G)=1$ 时群 G 的结构，其中 $U(G)$ 表示群 G 的非正规子群的共轭类数. 文献[4]给出了幂零群 G 的幂零类 $c(G)$ 和 $U(G)$ 之间的一个关系式. 文献[5]研究了奇阶幂零群 G 的群结构，并给出了 $U^{*}(G)$ 和 $c(G)$ 之间的一个关系式，其中 $U^{*}(G)$ 表示群 G 的非正规循环子群的共轭类数. 文献[6]给出了幂零群 G 的幂零类 $c(G)$ 和 $U^{*}(G)$ 之间的一个关系式. 文献[7]证明了：若 G 是非幂零群，$J(G)=1$ 当且仅当 $G=[N]P$ 是裂扩张，其中 N 是 G 的正规子群，且阶是素数 q，P 是素数幂阶的循环 p-群，且 $[N, \Phi(P)]=1$，素数 $p<q$. 本文将继续这一研究，考虑 $J(G)=2$ 的情形，

---

① 收稿日期：2022-03-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11971391，12071376)；重庆市科学创新项目(CYB20087).
作者简介：黄硕安，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：吕恒，教授.

得到了群 G 的结构分类.

记 $\pi(G)$ 为群 G 的阶的所有素因子的集合，$J(G)$ 为群 G 的非正规子群阶的个数. 设 G 是可解群，

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \qquad G_{p_i} \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G) \qquad i = 1, \cdots, s$$

如果对任意的 i, j 都满足

$$G_{p_i} G_{p_j} = G_{p_j} G_{p_i} \qquad i, j = 1, \cdots, s$$

那么称 $S = \{G_{p_1}, \cdots, G_{p_s}\}$ 为 G 的一个 Sylow 系. 群 G 是 Dedekind 群表示它的每个子群都是正规子群. 非交换的 Dedekind 群叫做 Hamilton 群.

引理 1 设 G 是群，如果 $J(G) \leqslant 4$，则 G 是可解群.

证 若 G 非可解，设 M/N 是 G 的非可解主因子，

$$M/N \cong S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k \qquad k \geqslant 1$$

其中 $S_1, \cdots, S_k$ 是彼此同构的非交换单群，则

$$J(G) \geqslant J(G/N) \geqslant J(M/N) \geqslant J(A_5) \geqslant 5$$

矛盾，于是 G 是可解群.

引理 2[8] 设 π'-群 H 作用在交换 π-群 G 上，则 $G = C_G(H) \times [G, H]$.

引理 3 设 G 是非幂零群，$J(G) = 2$，则 $\pi(G) \leqslant 3$.

证 若 $\pi(G) > 3$，设 P_i 是 G 的 Sylow p_i-子群($i=1,2,\cdots,k$, $k \geqslant 4$). 由 G 非幂零，不妨设 G 的 Sylow p_1-子群 P_1 是 G 的非正规子群. 若 $P_2 \ntrianglelefteq G$，由 $J(G) = 2$，有 P_1P_2, P_1P_3 在 G 中正规，从而

$$P_1P_2 \cap P_1P_3 = P_1 \trianglelefteq G$$

矛盾. 故 G 的所有 Sylow 子群中只有 Sylow p_1-子群是 G 的非正规子群. 由 $J(G) = 2$，$P_1 \ntrianglelefteq G$，有 P_1P_2，P_1P_3，P_1P_4 中至少有 2 个子群在 G 中正规，不妨设 P_1P_2, P_1P_3 在 G 中正规，于是 $P_1 \trianglelefteq G$，矛盾. 因此，$\pi(G) \leqslant 3$.

定理 1 设 G 是非幂零群，$\pi(G) = 3$，$J(G) = 2$，则

$$G = (\langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle) \times \langle z \rangle \qquad x^p = y^{q^m} = z^r = 1$$

$$[x, y^q] = 1 \qquad [x, y] = x^k \qquad q \mid p - 1$$

其中 p, q, r 为互异素数，m, k 为正整数，且 $(k, p) = 1$.

证 设 $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$，由引理 1，$G$ 是可解群，则 G 中存在 Sylow 系 $S = \{P_1, P_2, P_3\}$，其中 $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$，$i = 1,2,3$. 由 G 非幂零，不妨设 G 的 Sylow p_1-子群 P_1 是 G 的非正规子群.

若 P_1P_2, P_1P_3 都在 G 中正规，则

$$P_1P_2 \cap P_1P_3 = P_1 \trianglelefteq G$$

矛盾. 由

$$J(G) = 2 \qquad P_1 \ntrianglelefteq G$$

有 P_1P_2, P_1P_3 中必有一个子群是 G 的非正规子群. 不妨设 $P_1P_2 \ntrianglelefteq G$，于是 P_2, P_3, P_1P_3 都在 G 中正规，从而

$$G = (P_3 \rtimes P_1) \times P_2$$

若 P_1 有两个不同的极大子群 M_1, M_2，由 $J(G) = 2$，有

$$M_1 \trianglelefteq G \qquad M_2 \trianglelefteq G$$

又由 $P_1 = \langle M_1, M_2 \rangle$ 得 $P_1 \trianglelefteq G$，矛盾于 $P_1 \ntrianglelefteq G$，于是 P_1 只有一个极大子群，从而 P_1 为循环群. 若 $\alpha_2 > 1$，设 N 是 P_2 的极大子群，则 $P_1N = P_1 \times N$，又由 $P_1N \trianglelefteq G$ 得 $P_1 \trianglelefteq G$，矛盾，于是 $\alpha_2 = 1$，即 P_2 为 p_2 阶循环群.

设 K_1, K_2 是 P_3 中的两个不同的 p_3 阶子群，则 $P_1K_1 \trianglelefteq G$，$P_1K_2 \trianglelefteq G$，又由 $P_1 = P_1K_1 \cap P_1K_2$ 得 $P_1 \trianglelefteq G$，矛盾. 于是 P_3 只有唯一的 p_3 阶子群，从而 P_3 为循环群或者广义四元数群. 若 P_3 是广义四元数群，由 P_3 中每一个子群都在 P_3 中正规，有 $P_3 \cong Q_8$，即 P_3 为 8 阶的四元数群. 又由 $[P_1, P_3] \neq 1$ 知，P_3 中存在 4 阶循环群在 G 中非正规，矛盾于 $J(G) = 2$，故 P_3 为循环群.

设 H 是 P_3 的真子群，则 $H \trianglelefteq P_3$. 考虑 P_1 互素作用在 P_3 上，有

$$P_3=[P_1, P_3]\times C_{P_3}(P_1)$$

于是

$$P_3=[P_1, P_3]\qquad C_{P_3}(P_1)=1$$

故

$$[P_1H, P_3]=[P_1, P_3]=P_3\not\leqslant P_1H\qquad P_1H\ntrianglelefteq G$$

因此

$$P_1H=P_1\qquad H=1$$

即 P_3 为 p_3 阶循环群.

综上所述，

$$G=(\langle x\rangle\rtimes\langle y\rangle)\times\langle z\rangle\qquad x^p=y^{q^m}=z^r=1$$
$$[x, y^q]=1\qquad [x, y]=x^k\qquad q\mid p-1$$

其中 p,q,r 为互异素数，m,k 为正整数，且$(k,p)=1$.

定理 2　设 G 是非幂零群，$\pi(G)=2$，$J(G)=2$，则下述之一成立：

(a) $G=\langle x\rangle\ltimes\langle y\rangle$，$x^{p^m}=y^q=1$，$p^m\geqslant p^2$，$[x, y^{p^2}]=1$，$[x, y^p]\neq 1$；

(b) $G=(\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle)\ltimes\langle y\rangle$，$x_1^p=x_2^p=y^q=1$，$[x_2, y]\in\langle y\rangle$，$[x_1, y]=y^k$，$(k, q)=1$；

(c) $G=(\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle)\ltimes\langle y\rangle$，$x_1^{p^m}=x_2^p=y^q=1$，$p^m\geqslant p^2$，$[x_1^p, y]=[x_2, y]=1$；

(d) $G=Q_8\ltimes C_q$；

(e) $G=\langle y\rangle\ltimes\langle x\rangle$，$[y, x]\notin\langle y\rangle$，$y^{p^m}=x^{q^2}=1$，$[y^p, x]=1$；

(f) $G=\langle y\rangle\ltimes(\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle)$，$y^{p^m}=x_i^q=1$，$[y^p, x_i]=1$，$[y, x_i]=x_i^{k_i}$，$(k_i, q)=1$，$i=1,2$；

(g) $G=\langle y\rangle\ltimes(\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle)$，$y^{p^m}=x_i^q=1$，$[y^p, x_i]=1$，$[y, x_i]\notin\langle x_i\rangle$，$i=1,2$.

其中 p,q 是互异素数，m,k_1,k_2 为正整数.

证　设 $|G|=p^aq^b$，由 G 非幂零，不妨设 G 的 Sylow p-子群 P 是 G 的非正规子群，即 $P\ntrianglelefteq G$. 设 Q 为 G 的 Sylow q-子群. 我们分下面几种情形来讨论：

情形 1　$M\ntrianglelefteq G$，$1<M<P$.

由 M 的所有真子群都在 G 中正规知，M 只有一个极大子群，故 M 是循环群. 由 $J(G)=2$ 得 $Q\trianglelefteq G$，且对 G/Q 的任意子群 H/Q 都满足 $H/Q\trianglelefteq G/Q$，于是 G/Q 为 Dedekind 群. 同理 G/N 也是 Dedekind 群，其中 N 是 Q 的非平凡子群.

下面证明 Q 是循环群. 设

$$N_1\neq N_2\leqslant Q\qquad |N_1|=|N_2|=q$$

则 $PN_1\trianglelefteq G$，$PN_2\trianglelefteq G$，于是 $P\trianglelefteq G$，矛盾. 故 Q 只有一个 q 阶子群，因此 Q 是循环群或者是广义四元素群. 若 Q 是广义四元素群，则由 Q 中每一个子群都在 Q 中正规得 $Q\cong Q_8$. 又由$[P, Q]\neq 1$ 知，Q 中存在 4 阶循环群是 G 的非正规子群，矛盾. 故 Q 是循环群.

若 $b>1$，设 N 是 Q 的 q 阶子群，则 $N\trianglelefteq G$，于是

$$G/N=(PN/N)\times(Q/N)\qquad [\langle g\rangle, Q]\leqslant N$$

其中 $g\in P$. 考虑$\langle g\rangle$ 互素作用在 Q 上，有

$$Q=[\langle g\rangle, Q]\times C_Q(\langle g\rangle)$$

于是$[\langle g\rangle, Q]=1,Q$. 若$[\langle g\rangle, Q]=Q$，则与 N 是 Q 的真子群矛盾，于是

$$[\langle g\rangle, Q]=1\qquad \langle g\rangle N=\langle g\rangle\times N$$

由 $J(G)=2$，有$\langle g\rangle\times N\trianglelefteq G$，于是$\langle g\rangle\trianglelefteq G$. 又由 g 的任意性得 $P\trianglelefteq G$，矛盾，故 Q 为 q 阶循环群. 设 $Q=\langle y\rangle$，$y^q=1$.

下面探究 P 的结构. 由 $P\cong G/Q$ 得 P 也是 Dedekind 群. 我们分为两种情形：

情形 1.1　P 是交换群，则 P/M 为循环群.

如果 P/M 不是循环群，设

$$P/M=\langle a_1M\rangle\times\langle a_2M\rangle\times\cdots\times\langle a_sM\rangle \qquad s\geqslant 2$$

则 P 中存在两个不同的子群 M_1, M_2，使得

$$|M_1/M|=|M_2/M|=p$$

由

$$M\leqslant M_1\cap M_2<M_1$$

以及 M 的极大性得 $M=M_1\cap M_2$. 又由 $M_1\trianglelefteq G$，$M_2\trianglelefteq G$ 得 $M\trianglelefteq G$，矛盾.

如果 $M\leqslant\Phi(P)$，则 P 为循环群，设 $P=\langle x\rangle$. 显然，M 为 P 的极大子群，否则 $M\trianglelefteq G$. 因此 $G=\langle y\rangle\rtimes\langle x\rangle$，其中

$$y^q=1 \qquad |x|\geqslant p^2 \qquad p^2\mid q-1 \qquad [x^{p^2}, y]=1 \qquad [x^p, y]\neq 1$$

即 G 为(a)型群.

如果 $M\not\leqslant\Phi(P)$，取 P 中子群 P_1 使得 M 是 P_1 的极大子群，于是 $P=M\times\langle b\rangle$，其中 $|b|=p$. 若 $P_1\neq P$，由 $P_1\trianglelefteq G$ 得$[P_1, Q]=1$，于是$[M, Q]=1$，矛盾于 $M\ntrianglelefteq G$，故 $P_1=P$. 若 $|M|=p$，由 M 是 P 的极大子群，有 $|P|=p^2$，于是 P 的型不变量为(p^2)和(p, p). 若 P 的型不变量为(p^2)，与 $M\not\leqslant\Phi(P)$ 矛盾，故 P 的型不变量为(p, p)，即 G 为(b)型群. 若 $|M|\geqslant p^2$，由 $J(G)=2$，$M\ntrianglelefteq G$，有$\langle b\rangle\trianglelefteq G$，故$[\langle b\rangle, Q]=1$，即 G 为(c)型群.

情形1.2 P 是非交换群.

由 $P\cong G/Q$ 得 P 是 Hamilton 群，于是 $P=Q_8\times C_2^n$，其中 n 是正整数.

如果 P/M 是交换群，则 P/M 是循环群. 若否，设

$$P/M=\langle a_1M\rangle\times\langle a_2M\rangle\times\cdots\times\langle a_sM\rangle \qquad s\geqslant 2$$

则 P 中存在两个不同的子群 M_1, M_2，使得

$$|M_1/M|=|M_2/M|=p$$

由

$$M\leqslant M_1\cap M_2<M_1$$

以及 M 的极大性得 $M=M_1\cap M_2$. 又由 $M_1\trianglelefteq G$，$M_2\trianglelefteq G$ 得 $M\trianglelefteq G$，矛盾. 因 M 循环，故 $P=\langle x, y\rangle\cong Q_8$，于是 $G=C_q\rtimes Q_8$，即 G 为(d)型群.

如果 P/M 是非交换群，则 P/M 是 Hamilton 群. 令 $P_1=P'\times M$，于是

$$P_1\trianglelefteq G \qquad [P_1, Q]=1$$

故 $M\trianglelefteq G$，矛盾. 因此，这类群不存在.

情形2 设 G 的非正规子群为 H，$(|H|, |Q|)\neq 1$.

若 $Q\ntrianglelefteq G$，不妨设 $p>q$，显然 P, Q 都是循环群，于是 $P\trianglelefteq G$，矛盾，故 $Q\trianglelefteq G$. 由 $J(G)=2$，$P\ntrianglelefteq G$ 得 P 只有一个极大子群，故 P 为循环群，设 $P=\langle y\rangle$.

情形2.1 Q 是交换群.

考虑 P 互素作用在 Q 上，有 $Q=C_Q(P)\times[P, Q]$，故

$$G=P\ltimes Q=P\ltimes(C_Q(P)\times[P, Q])=(P\ltimes[P, Q])\times C_Q(P)$$

若 $|C_Q(P)|>q$，由

$$P\ntrianglelefteq G \qquad \langle P, x\rangle=P\times\langle x\rangle$$

得$\langle P, x\rangle\ntrianglelefteq G$，其中 $x\in C_Q(P)$，故至少可以构造出2个不同阶的 G 的非正规子群，与 $J(G)=2$ 矛盾. 若 $|C_Q(P)|=q$，设 $C_Q(P)=\langle x\rangle$，其中 $x^q=1$. 由 $P\ntrianglelefteq G$，$P\times\langle x\rangle\ntrianglelefteq G$ 知，G 的其他阶子群均正规于 G，于是存在 $x_1\in[P, Q]$ 且 $|x_1|=q$，使得$\langle x_1\rangle\trianglelefteq G$，故$[P, \langle x_1\rangle]=\langle x_1\rangle$. 又由

$$[P, \langle xx_1\rangle]=\langle x_1\rangle\neq\langle xx_1\rangle$$

有$\langle xx_1\rangle\ntrianglelefteq G$，与 $J(G)=2$ 矛盾，于是

$$|C_Q(P)|=1 \qquad Q=[Q, P]$$

考虑 $\Omega_1(Q)$. 若 $\Omega_1(Q)\neq Q$，则

$$[P\Omega_1(Q), Q]=Q\not\leqslant P\Omega_1(Q)$$

于是 $P\Omega_1(Q)\ntrianglelefteq G$，故对 $\forall x \in \Omega_1(Q)$，有 $\langle x\rangle \ntrianglelefteq G$. 又由

$$[P\langle x\rangle, Q]=Q \nleqslant P\langle x\rangle$$

有 $P\langle x\rangle \ntrianglelefteq G$，故 $P\langle x\rangle = P\Omega_1(Q)$，因此 Q 只能是循环群，且 $|Q|=q^2$，$[\langle y^p\rangle, Q]=1$. 设 $Q=\langle x\rangle$，$x^{q^2}=1$，即 G 为(e) 型群. 若 $\Omega_1(Q)=Q$，则 Q 为初等交换 q-群.

若存在 $x \in Q$，使得 $\langle x\rangle \ntrianglelefteq G$，则 $P\langle x\rangle \ntrianglelefteq G$，故 Q 的子群均正规于 G. 由 $Q=[Q, P]$ 得 $|Q|=q^2$，于是

$$G=P \ltimes (\langle x_1\rangle \times \langle x_2\rangle) \qquad x_1^q=x_2^q=1$$

又由 P 的极大子群都是 G 的正规子群得$[\langle y^p\rangle, Q]=1$，$p \mid q-1$，即 G 为(f) 型群.

若对 $\forall x \in Q$ 有 $\langle x\rangle \ntrianglelefteq G$，则 Q 中所有阶大于 1 的真子群都是 G 的非正规子群，于是 Q 是 q^2 阶的初等交换 q-群，因此

$$G=P \ltimes (C_q \times C_q) \qquad [\langle y^p\rangle, Q]=1$$

即 G 为(g) 型群.

情形 2.2　Q 是非交换群

若对 $\forall H \leqslant Q$ 有 $H \trianglelefteq G$，则 $Q \cong Q_8 \times C_2^n$，其中 n 是正整数，于是 $Q' \leqslant Z(G)$，$P \times Q' \ntrianglelefteq G$，故对 $\forall x \in Q$ 有 $\langle x\rangle \trianglelefteq G$. 又由 $x^4=1$ 得$[P, \langle x\rangle]=1$，于是$[P, Q]=1$，矛盾. 因此，这类群不存在.

若存在 $H \leqslant Q$ 使得 $H \ntrianglelefteq G$. 设 $N \leqslant Z(Q)$，且 N 是 G 的极小正规子群，则

$$PN/N \times Q/N = G/N$$

由

$$N=C_N(P) \times [N, P]$$

得 $N=C_N(P)$ 或 $N=[N, P]$. 若 $N=C_N(P)$，则 $PN=P \times N \ntrianglelefteq G$，于是$P \trianglelefteq G$，矛盾，故 $N=[N, P]$. 取 $x \in Q\backslash N$ 且 $x^q \in N$，则 $M=\langle x, N\rangle$ 是交换群. 由 $G/N=PN/N \times Q/N$ 得$[M, P] \leqslant N$. 又由

$$M=C_M(P) \times [M, P] \qquad N=[N, P] \leqslant [M, P]$$

得 $M=C_M(P) \times N$，故 $|C_M(P)|=q$. 考虑 $PC_M(P)$，由

$$PC_M(P)=P \times C_M(P) \ntrianglelefteq G$$

得 $P \trianglelefteq G$，矛盾. 因此，这类群不存在.

参考文献：

[1] ROBINSIN D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York：Springer-Verlag，1982.

[2] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数=2 的有限群 [J]. 数学学报，1990，33(3)：388-392.

[3] BRANDL R. Groups with Few Non-Normal Subgroups [J]. Communications in Algebra，1995，23(6)：2091-2098.

[4] POLAND J，RHEMTULLA A. The Number of Conjugacy Class of Non-Normal Subgroups in Nilpotent Groups [J]. Communications in Algebra，1996，24(10)：3237-3245.

[5] LI S R. The Number of Conjugacy Classes of Non-Normal Cyclic Subgroups in Nilpotent Groups of Odd Order [J]. Journal of Group Theory，1998，1(2)：165-171.

[6] 钟祥贵，李世荣. 幂零群中非正规循环子群的共轭类数 [J]. 数学研究与评论，2006，26(3)：557-561.

[7] 向建国，李梓明. 非正规子群阶的个数与有限群的结构 [J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版)，2007，25(6)：7-10.

[8] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

责任编辑　廖坤