

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.10.007

一类阶为 $2p^2q$ 的 CA-群^①

仝巍, 林子靖, 周伟

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 如果对于任意 $x \in G \setminus Z(G)$, 都有 $C_G(x)$ 交换, 则称群 G 为 CA-群. 通过反证法, 证明了 $2p^2q$ 阶群是 CA-群, 其中 $p < q$ 为奇素数, $p \nmid q-1$.

关键词: CA-群; 中心化子; Sylow 子群; 直积

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)10-0050-04

A Kind of CA-Groups of Order $2p^2q$

TONG Wei, LIN Zijing, ZHOU Wei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: If $C_G(x)$ is commutative for any $x \in G \setminus Z(G)$, then the group G is called a CA-group. It is proved in this paper that the group of order $2p^2q$ is a CA-group by using reduction to absurdity, where $p < q$ are all odd primes and $p \nmid q-1$.

Key words: CA-group; centralier; Sylow subgroup; direct product

对特殊子群的研究一直是有限群论中的一个热门课题. 例如文献[1-6]通过研究交换子群、极大交换子群、循环子群等, 得到了群的性质与结构. 群的交换性是群结构复杂程度的一个重要体现, 而群中元素的中心化子也与群的交换性有密切联系, 并且对群结构有着很大的影响.

如果对于任意 $x \in G \setminus Z(G)$, 都有 $C_G(x)$ 交换, 则群 G 被称为 CA-群. CA-群在群结构的研究中有着非常重要的作用, 关于 CA-群的研究也是人们一直十分感兴趣的问题. 文献[7]证明了 CA-群是单群或者可解群. 文献[8]构造出了偶数阶 CA-单群. 文献[9]证明了偶数阶 CA-群是 Frobenius-群、交换群或特殊射影线性群 $\text{PSL}(2, 2^m)$, 其中 $m > 2$. 文献[10-11]研究了根据群的阶去判定 CA-群. 文献[12-15]研究了根据中心化子的个数去确定群的结构.

本文继续进行这方面的研究, 得出结论: 若 $|G| = 2p^2q$, 其中 $p < q$ 为奇素数, $p \nmid q-1$, 则群 G 的 Sylow q -子群正规(定理 1), 且群 G 是 CA-群(定理 2). 有群例说明条件 $p \nmid q-1$ 不可省略(例 2).

① 收稿日期: 2022-01-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971391).

作者简介: 仝巍, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.

通信作者: 周伟, 副教授.

为了便于证明本文的结论, 下面给出几个相关的引理:

引理 1^[14] 设 p 为有限群 G 的最小质因子, 如果 G 的 Sylow p -子群循环, 则 G 有正规 p -补.

引理 2^[15] 设 G 是一个群, 如果 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是交换群.

引理 3^[16] 对于素数 $p < q$, 若 $p \nmid q-1$, 则 pq 阶群是循环群.

引理 4^[10] 如果 $|G : Z(G)| = pqr$, 则群 G 是 CA-群, 其中 p, q, r 是素数 (p, q, r 可以相同).

本文所涉及的群都是有限群, 所用符号都是标准的.

有了前面的预备知识, 现在可以对本文的主要结论进行证明.

定理 1 若 $|G| = 2p^2q$, 其中 $p < q$ 为奇素数且 $p \nmid q-1$, 则群 G 的 Sylow q -子群正规.

证 群 G 的 Sylow p -子群的个数 $n_p = 1 + ap$, $n_p \mid 2q$. 由条件 q 为奇素数, $p \nmid q-1$ 可知 $n_p \neq 2, q$. 下面对 n_p 的值分情况讨论.

如果 $n_p = 1$, 此时 G 的 Sylow p -子群只有一个, 记为 P , $P \trianglelefteq G$. 设 $Q \in \text{Syl}_q(G)$, 则 $PQ = P \rtimes Q$. 考虑 Q 在 P 上的作用, 若 P 为 p^2 阶循环群, 则

$$|\text{Aut}(P)| = p(p-1)$$

若 P 为 (p, p) 型初等交换 p -群, 则

$$|\text{Aut}(P)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$$

而 $(|Q|, |\text{Aut}(P)|) = 1$, 故 Q 在 P 上作用平凡, 因此 $PQ = P \times Q$. 又因 $|G : PQ| = 2$, 从而有 $Q \text{ char } PQ \trianglelefteq G$, 则 $Q \trianglelefteq G$, 结论成立.

如果 $n_p = 1 + ap = 2q$, 考虑 G 的 Sylow q -子群的个数 $n_q = 1 + bq$, $n_q \mid 2p^2$. 由条件 $p < q$ 为奇素数可知 $n_q \neq 2, p$.

若 $n_q = 1 + bq = p^2$, 则 $q \mid p^2 - 1$, 即 $q \mid (p+1)(p-1)$, 与 p, q 均为奇素数矛盾.

若 $n_q = 1 + bq = 2p^2$, 此时 G 中 q 阶元的个数为 $2p^2(q-1) = 2p^2q - 2p^2$, G 中只剩下 $2p^2$ 个元. 而此时 G 有 $2q$ 个 Sylow p -子群, 分别记为 $P_i (i=1, 2, \dots, 2q, 2q > 3)$, 它们最少需要的元素个数不小于

$$\begin{aligned} & |P_1 \cup P_2 \cup P_3| = \\ & 3|P_1| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3| \geq \\ & 3p^2 - 3p + 1 > 2p^2 \end{aligned}$$

矛盾.

若 $n_q = 1 + bq = 2p$, 此时 $n_p = 1 + ap = 2q$, 从而有

$$(4 - ab)q = a + 2$$

其中 a, b 为正整数, $q \geq 5$ 为奇素数. 此等式只有在 $a=3, b=1, q=5$ 时才可能成立, 在此种情况下有

$$|G| = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

由引理 1 可知 G 有正规 2-补, 记为 H . $|H| = 3^2 \cdot 5$, H 的 Sylow 5-子群的个数为 $1 + 5k \mid 3^2$, 则 H 只有唯一的 Sylow 5-子群, 记为 M . 从而有 $M \text{ char } H \trianglelefteq G$, 则 $M \trianglelefteq G$, 即 90 阶群的 Sylow 5-子群正规, 结论成立. 若 $n_q = 1$, 则 $Q \trianglelefteq G$, 结论成立.

综上所述, 群 G 的 Sylow q -子群正规.

定理 2 设 $|G| = 2p^2q$, 其中 $p < q$ 为奇素数且 $p \nmid q-1$, 则群 G 是 CA-群.

证 反证法. 若群 G 不是 CA-群, 则存在 $x \in G \setminus Z(G)$, 有 $C_G(x)$ 不交换. 由 $x \in G \setminus Z(G)$, 可知 $Z(G) \not\subseteq \langle x, Z(G) \rangle$. 又根据 $C_G(x)$ 不交换, 可知 $Z(C_G(x)) \not\subseteq C_G(x)$, 从而可以得到一个子群链, 即

$$\{1\} \subseteq Z(G) \not\subseteq \langle x, Z(G) \rangle \subseteq Z(C_G(x)) \not\subseteq C_G(x) \not\subseteq G \quad (1)$$

当 $|Z(G)| > 1$ 时, 由 (1) 式可知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶是一个素数, 则是循环群. 根据引理 2 知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

当 $|Z(G)|=1$ 时, $\langle x, Z(G) \rangle = \langle x \rangle$, 此时子群链变为

$$\{1\} \subsetneq \langle x \rangle \subseteq Z(C_G(x)) \subsetneq C_G(x) \subsetneq G \tag{2}$$

接下来考虑 x 的阶. 当 x 的阶为合数时, 由(2)式可知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶是一个素数, 则它必为循环群, 故 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 当 x 的阶为素数时, 若 $\langle x \rangle \neq Z(C_G(x))$, 则 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶是一个素数, 则为循环群, 故 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 因此只需考虑 x 的阶为素数且 $\langle x \rangle = Z(C_G(x))$, 即 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 的阶为两个素因子的情况.

下面对 $|x|$ 的值分情况讨论.

情形 1 $|x|=2$.

因为 $|x| \mid |C_G(x)|$, 则 $|C_G(x)|=2pq, 2p^2$.

若 $|C_G(x)|=2pq$, 则有

$$|C_G(x)/Z(C_G(x))|=pq$$

又因 $p \nmid q-1$, 则根据引理 3 可知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 为循环群, 又根据引理 3 知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

若 $|C_G(x)|=2p^2$, 则有 $C_G(x)=HK$, 其中 H, K 分别为 $C_G(x)$ 的 Sylow 2-子群和 Sylow p -子群. 又因为 $H \leq Z(C_G(x))$, 则 $C_G(x)=H \times K$, 故 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

情形 2 $|x|=p$.

此时 $|C_G(x)|=p^2q, 2pq, 2p^2$.

若 $|C_G(x)|=p^2q$, 则有

$$|C_G(x)/Z(C_G(x))|=pq$$

根据上面的讨论可知 $C_G(x)/Z(C_G(x))$ 为循环群, 故由引理 2 可知 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

若 $|C_G(x)|=2pq$, 由 $|x|=p$ 可知 $\langle x \rangle$ 包含在某个 Sylow p -子群内, 记为 P , $|P|=p^2$, 因此 $C_G(x)$ 为交换群. 又因 $\langle x \rangle \subseteq P$, 则 x 与 P 中的元可交换, 则有 $P \subseteq C_G(x)$, 故 $|P| \mid |C_G(x)|$, 即 $p^2 \mid 2pq$, 矛盾.

若 $|C_G(x)|=2p^2$, 由定理 1 可知 G 有唯一 Sylow q -子群, 记为 Q , $Q \trianglelefteq G$, 则 $Q\langle x \rangle$ 为 G 的 pq 阶子群, 由引理 3 知 $Q\langle x \rangle$ 为 pq 阶循环群, 则 Q 中的元与 x 可交换, 故 $Q \subseteq C_G(x)$, $|Q| \mid |C_G(x)|$ 即 $q \mid 2p^2$, 矛盾.

情形 3 $|x|=q$.

此时 $|C_G(x)|=p^2q, 2pq$.

若 $|C_G(x)|=p^2q$, 则有 $C_G(x)=PQ$, 其中 P, Q 分别为 $C_G(x)$ 的 Sylow p -子群和 Sylow q -子群. 又因为 $Q \leq Z(C_G(x))$, 则 $C_G(x)=P \times Q$, 故 $C_G(x)$ 交换, 矛盾.

若 $|C_G(x)|=2pq$, 根据上面的讨论可知

$$\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle \subseteq C_G(x) = \langle y \rangle \rtimes \langle a \rangle$$

其中 $\langle y \rangle$ 为 $C_G(x)$ 的 pq 阶正规子群, $|a|=2$. 考虑 $\langle a \rangle$ 在 $\langle x \rangle$ 和 $\langle y \rangle$ 上的共轭作用, 因为 $\langle x \rangle = Z(C_G(x))$, 则 $x^a = x$. 如果 $y^a = y$, 则

$$C_G(x) = \langle y \rangle \rtimes \langle a \rangle$$

则 $C_G(x)$ 交换, 矛盾. 如果 $y^a = y^{-1}$, 又因为 $x = y^p$, 则

$$x^a = (y^p)^a = (y^a)^p = (y^{-1})^p = (y^p)^{-1} = x^{-1}$$

与 $x^a = x$ 矛盾.

综上所述, 群 G 是 CA-群.

由定理 2 可得到如下群例:

例 1 因为 $3 \nmid 5-1$, 所以, 若 $|G|=2 \cdot 3^2 \cdot 5=90$, 则群 G 是 CA-群.

下面例子说明定理 2 中的条件 $p \nmid q-1$ 不可缺少.

例 2 构造一个群

$G = \langle a, b, c, d \mid a^2 = 1, b^3 = 1, c^3 = 1, d^7 = 1, [a, b] = 1, [a, d] = 1, [b, c] = 1, [c, d] = 1, c^a = c^2, d^b = d^2 \rangle$
从而

$$G \cong ((C_2 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_7 \quad |G| = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$$

由定义关系可知 $d \in G \setminus Z(G)$, $a, c \in C_G(d)$. 而 a, c 不交换, 故 $C_G(d)$ 是非交换群, 则群 G 不是 CA-群.

参考文献:

- [1] 钱焱, 陈贵云. 用交换子群的个数刻画 A_5 和 S_5 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 5-8.
- [2] 高丽, 汪忠碧, 陈贵云. 用极大交换子群阶的集合刻画 S_n [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 21-24.
- [3] 姜富铭, 周伟. 具有特殊循环子群个数的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(2): 14-17.
- [4] 苗雷星, 曹洪平. 真子群个数与极小真子群覆盖数相等的群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 7-9.
- [5] 钱焱, 陈贵云. 同阶交换子群个数之集为 $\{1, 3\}$ 的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 100-104.
- [6] 雷倩, 何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 96-100.
- [7] WEISNER L. Groups in Which the Normaliser of Every Element Except Identity is Abelian [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1925, 31(8): 413-416.
- [8] SUZUKI M. The Nonexistence of a Certain Type of Simple Groups of Odd Order [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1957, 8(4): 686-695.
- [9] BRAUER R, SUZUKI M, WALL G E. A Characterization of the One-Dimensional Unimodular Projective Groups Over Finite Fields [J]. Illinois Journal of Mathematics, 1958, 2(4B): 718-745.
- [10] BAISHYA S J. On Finite Groups with Specific Number of Centralizers [J]. International Electronic Journal of Algebra, 2013, 13(13): 53-62.
- [11] 陈佳琪, 周伟. 一类阶为 $2pqr$ 的 CA-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(12): 1-4.
- [12] ASHRAFI A R. On Finite Groups with a Given Number of Centralizers [J]. Algebra Colloquium, 2000, 7(2): 139-146.
- [13] ABDOLLAHI A, AMIRI S M J, HASSANABADI M. Groups with Specific Number of Centralizers [J]. Houston Journal of Mathematics, 2007, 33: 43-57.
- [14] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [15] 丘维声. 近世代数 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.
- [16] DAS K. Characterizations of a Finite Groups of Order pq and p^2q [J]. International Journal of Mathematics Research, 2015, 7(2): 203-207.

责任编辑 廖坤