第 47 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 10 月
Vol. 47 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.10.008

有限群的 *SS*-半置换 *p*-子群与 *p*-幂零性①

李彬彬, 钟祥贵, 张博儒, 卢家宽

广西师范大学 数学与统计学院, 广西 桂林 541006

摘要: 设 G 是有限群, H 是群 G 的子群. 如果群 G 中存在子群 B 使得 $G=HB$, 并且 H 与 B 的所有 Sylow p-子群置换, 其中素数 p 满足 $(p, |H|)=1$, 则称 H 在 G 中 SS-半置换. 假设 P 是群 G 的 Sylow p-子群, D 是 P 的非平凡子群. 利用有限群 G 的 Sylow p-子群 P 的 $|D|$ 阶子群的 SS-半置换性来研究有限群 G 的结构, 给出了有限群 G 是 p-幂零群的两个充分条件.

关 键 词: p-子群; SS-半置换; p-幂零

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2022)10-0054-05

On *SS*-Semipermutable *p*-Subgroups and *p*-Nilpotency of Finite Groups

Li Binbin, Zhong Xianggui, Zhang Boru, Lu Jiakuan

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi 541006, China

Abstract: Let G is a finite group, and H is a subgroup of G. If there exists a subgroup B of G such that $G=HB$ and H permutes with all of Sylow p-subgroup of B, where prime p is a coprime with the order of H, then H is SS-semipermutable group of G. Suppose P is a Sylow p-subgroup of group G and D is a nontrivial subgroup of P. In this note, two sufficient conditions for a Sylow p-nilpotency of finite group G are obtained by using the SS-semipermutation of some subgroups of Sylow p-subgroup of group G.

Key words: p-subgroup; SS-semipermutable; p-nilpotency

本文所涉及的群都是有限群. 在有限群论中, 利用具有某些性质的子群来研究有限群的结构是人们感兴趣的课题[1-4]. 而素数幂阶子群相对于其他子群而言, 结构简单、可控性强, 于是许多学者通过对 p-子群的研究, 给出了有限群的 p-幂零性的判别条件[5-9], 例如 Frobenius 定理[10]. 从 Frobenius 定理出发, 人们希望运用较少的 p-子群给出有限群的 p-幂零性的判别条件, 例如 Glauberman-Thompson 定理[10].

为了方便起见, 我们给出一些概念. 设 H 为群 G 的子群, 如果 H 与 G 的每个 Sylow 子群置换, 则称子群 H 为群 G 的 S-置换子群[11]. 文献[11]引入 S-置换的概念之后, 文献[12]进一步推广了 S-置换性, 提出了 SS-置换的概念: 设 H 为群 G 的子群, 如果 G 中存在子群 B 使得 $G=HB$, H 与 B 的每个 Sylow 子

① 收稿日期: 2022-02-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11861015, 12161010); 广西省自然科学基金项目(2020GXNSFAA 238045); 广西省自然科学基金项目(2020 GXNSFBA297121); 2020 年度广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2020KY02019).

作者简介: 李彬彬, 硕士研究生, 主要从事有限群的研究.

通信作者: 张博儒, 讲师.

群都置换，则称子群 H 在群 G 中 SS-置换. 在此基础上，文献[13] 提出了 SS-半置换的概念：设 H 为群 G 的子群，如果 G 中存在子群 B 使得 $G=HB$，H 与 B 的所有 Sylow p-子群置换，其中素数 p 满足 $(p, |H|)=1$，则称 H 是 SS-半置换的. 本文主要通过研究较少的素数幂阶子群的 SS-半置换性对有限群的结构的影响，给出了有限群 G 是 p-幂零群的两个充分条件.

引理 1[13]　设 H 是群 G 的 SS-半置换子群，则：

(i) 如果 $H \leqslant K \leqslant G$，则 H 是 K 的 SS-半置换子群；

(ii) 如果 N 是 G 的正规子群，H 是 p-子群，则 HN/N 是 G/N 的 SS-半置换子群.

引理 2[14]　设有限群 G 是 π-可分的. 如果 $O_{\pi'}(G)=1$，则 $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$.

引理 3[6]　设 A，B 是有限群 G 的真子群. 如果 $G=AB$，则 $G=AB^x$，$G \neq AA^x$ 对任意 $x \in G$ 成立.

引理 4　设 N 是 G 的初等交换正规 p-子群. 如果 N 中存在一个子群 D，$1<|D|<|N|$，使得 N 的所有 $|D|$ 阶子群在 N 中 SS-半置换，则 N 中存在一个极大子群正规于 G.

证　令 $\{M_1, M_2, \cdots, M_s\}$ 是 N 在 G 中互不共轭的极大子群的集合. 由于 N 是初等交换 p-群，则 M_i 是 N 中一些 $|D|$ 阶子群的乘积. 因为 N 的 $|D|$ 阶子群都在 G 中 SS-半置换，则 M_i 在 G 中 SS-半置换，即存在 B，使得

$$G=M_iB \qquad M_iQ=QM_i$$

其中 Q 是 B 的任一 Sylow q-子群，$q \neq p$. 由 M_i 是 p-子群知 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. 又由 $M_i < N \leqslant O_p(G)$ 知

$$M_i = O_p(G) \cap M_iQ$$

从而 $Q \leqslant N_G(M_i)$. 由 q 的任意性知 $O^p(G) \leqslant N_G(M_i)$. 于是 $|G : N_G(M_i)| = p^{f_i}$. 故在 G 中与 M_i 共轭的子群个数为 p^{f_i}，由 $N \trianglelefteq G$ 知这些子群均在 N 中. 于是 N 中所有极大子群的个数为 $\sum_{i=1}^{s} |G : N_G(M_i)|$. 由 p-群计数原理：

$$\sum_{i=1}^{s} |G : N_G(M_i)| \equiv 1 (\bmod p)$$

存在 $t \in \{1, 2, \cdots, s\}$ 使得 $f_t = 0$. 从而 $M_t \trianglelefteq G$.

定理 1　设 G 是有限群，P 是 G 的 Sylow p-子群，p 是奇素数. 如果 P 的每个极大子群 P_1 在 G 中都是 SS-半置换群，且 $N_G(P_1)$ 是 p-幂零的，则 G 是 p-幂零的.

证　假设 G 是极小阶反例，则 G 是非 p-幂零的.

步骤 1　$O_{p'}(G)=1$.

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$. 为了方便起见，记 $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$，并且令 $\bar{M}=M/O_{p'}(G)$ 是 $\bar{P}$ 的极大子群. 易知 $P \cap M$ 是 P 的极大子群，则根据引理 1(ii) 可知 $\overline{P \cap M}$ 在 $\bar{G}$ 中也是 SS-半置换的. 根据假设，我们可知 $N_G(P \cap M)$ 是 p-幂零的，进一步可知

$$N_{\bar{G}}(\overline{P \cap M}) = N_G(P \cap M)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$$

是 p-幂零的. 由此可见 $\bar{G}$ 满足定理假设条件，因此 $\bar{G}$ 是 p-幂零的，从而 G 也是 p-幂零的，与题设矛盾. 因此 $O_{p'}(G)=1$.

步骤 2　如果 $P \leqslant T < G$，则 T 是 p-幂零的.

根据引理 1(i) 和 $N_T(P_1) \leqslant N_G(P_1)$，我们容易看到 T 满足定理假设，因此根据 G 的极小性知 T 是 p-幂零的.

步骤 3　$G/O_p(G)$ 是 p-幂零的，且 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$. 实际上，$G$ 是 p-可解的.

设 $J(P)$ 是 P 的 Thompson 子群，容易看到 $P \leqslant N_G(Z(J(P)))$.

如果 $N_G(Z(J(P)))<G$，则根据步骤 2 可知 $N_G(Z(J(P)))$ 是 p-幂零的. 进一步根据 Glauberman-Thompson 定理知 G 是 p-幂零的，与题设矛盾. 因此 $N_G(Z(J(P)))=G$.

进一步，我们可知 $O_p(G) \neq 1$. 假设 N 为 G 的极小正规 p-子群. 注意到 $N \leqslant O_p(G) \leqslant P$. 如果 $N=P$，则 $G/O_p(G)=G/P$ 是 p-幂零的. 因此可设 $N<P$. 当 N 是 P 的极大子群时，则由假设知 $G=N_G(N)$ 是

p-幂零的，与题设矛盾.

进一步我们假设 $|P:N| \geqslant p^2$，根据引理 1(ii) 可知 G/N 满足定理假设条件，再由 G 的极小性可知 G/N 是 p-幂零的，从而 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零的. 进一步可知，G 是 p-可解的. 再根据 $O_{p'}(G)=1$ 和引理 2 可知 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$.

步骤 4 $G=PQ$，$Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$p \neq q$.

设 $q \neq p$ 是 $|G|$ 的素因子. 由于 G 是 p-可解的，因此根据文献[15] 的定理 6.3.5 可知，存在 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ 使得 $PQ \leqslant G$. 如果 $PQ < G$，则由步骤 2 知 PQ 是 p-幂零的，从而 $Q \trianglelefteq PQ$. 于是

$$O_p(G)Q = O_p(G) \times Q$$

再根据步骤 3 可知

$$Q \leqslant C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$$

矛盾. 因此 $G=PQ$.

步骤 5 G 有唯一的极小正规子群 N，并且 $\Phi(G)=1$. 实际上，$N=O_p(G)$.

如果极小正规子群 N 不唯一，则存在另一个 G 的极小正规子群 $N_1 \neq N$. 由于 G 是 p-可解的并且 $O_{p'}(G)=1$，那么 N_1 和 N 都包含在 P 中. 运用步骤 3 的方法，我们可知 G/N_1 和 G/N 都是 p-幂零的. 因此 $G \lesssim G/N_1 \times G/N$ 是 p-幂零的，与题设矛盾. 因此 N 是唯一的.

如果 $\Phi(G) \neq 1$，则 $N \leqslant \Phi(G)$. 然而 G/N 是 p-幂零的，所以 $G/\Phi(G)$ 是 p-幂零的. 进一步可知，G 是 p-幂零的，矛盾. 因此 $\Phi(G)=1$. 再根据文献[16] 的定理 4.5 可知 $O_p(G)=N$.

步骤 6 $|N|=p$，且存在 G 的极大子群 M，使得 $P \cap M$ 是 P 的极大子群.

因为 $\Phi(G)=1$，所以存在 G 的极大子群 M_1，使得 $N \nsubseteq M_1$. 故 $G=NM_1$. 设 M'_p 为 M_1 的 Sylow p-子群，则 NM'_p 是 G 的 Sylow p-子群. 根据 Sylow 定理可知，存在 $g \in G$ 使得

$$(NM'_p)^g = N(M'_p)^g = P$$

不妨取 $M=M_1^g$. 由引理 3 可得 $G=NM$，并且 $M_p = P \cap M$ 是 M 的 Sylow p-子群. 由于 G 是 p-可解的，且 N 是 G 的极小正规 p-子群，所以 N 是初等交换 p-群. 又由于 $N \cap M \trianglelefteq M$，因此 $N \cap M \trianglelefteq G$. 进一步，根据 N 的极小性可知 $N \cap M=1$. 因为 N 为 p-群，所以 $P \cap M$ 是 P 的真子群. 进一步可知，存在 P 的极大子群 P_1 使得 $P \cap M \leqslant P_1$. 显然

$$M = \langle M_q \mid M_q \in \mathrm{Syl}_q(M),\ q \in \pi(M) \rangle$$

由于 P_1 是 P 的极大子群，所以 P_1 是 SS-半置换的. 再根据 SS-半置换的定义可知，$P_1M_q = M_qP_1$ 对任意的素数 $q \neq p$ 成立. 因为 $M_p \leqslant P$，所以 $P_1M = MP_1$. 由 M 的极大性，我们可知 $P_1M=G$ 或者 $P_1 \leqslant M$. 若 $P_1M=G$，则

$$P = P \cap P_1M = P_1(P \cap M) = P_1$$

矛盾. 故 $P_1 \leqslant M$. 因此我们可以得到 $|N|=p$.

步骤 7 最后的矛盾.

因为 G 是 p-可解的，并且 $O_{p'}(G)=1$，所以根据引理 2 及 N 的极小性可知

$$C_G(O_p(G)) = O_p(G)$$

又由于 $N=O_p(G)$ 是交换群，因此 $N=C_G(N)$. 再根据文献[16] 的定理 5.7 可得

$$M \simeq G/N = N_G(N)/C_G(N) \lesssim \mathrm{Aut}(N)$$

又因为 N 是 p 阶循环群，因此 $\mathrm{Aut}(N)$ 也是循环群. 进一步，我们可知 M 也是循环群. 故

$$M \leqslant N_G(P \cap M)$$

因为 $P \cap M$ 是 P 的极大子群，所以

$$P \cap M \trianglelefteq P \qquad N \leqslant N_G(P \cap M)$$

进一步，根据题设可以得到 $G=NM \leqslant N_G(P \cap M)$ 是 p-幂零的，矛盾.

定理 2 设 G 是有限群，P 是 G 的 Sylow p-子群，p 是奇素数. 如果 P 存在一子群 D，$1<|D|<|P|$，使得 P 中所有 $|D|$ 阶的子群 H 在 P 中 SS-半置换，且 $N_G(H)$ 是 p-幂零的，则 G 是 p-幂零的.

证　假设定理 2 不成立，设 G 是极小阶反例.

步骤 1　$O_{p'}(G)=1$.

设 $O_{p'}(G)\neq 1$. 令 $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$. 容易看到 $\bar{G}$ 满足定理 2 的假设条件，因此根据 G 的极小性可知 $\bar{G}$ 是 p -幂零的. 进一步可知 G 是 p -幂零的，矛盾. 因此 $O_{p'}(G)=1$.

步骤 2　$P\leqslant T<G$，则 T 是 p -幂零的.

由于 $N_T(H)\leqslant N_G(H)$，且 $N_G(H)$ 是 p -幂零的，因此 $N_T(H)$ 也是 p -幂零的. 再根据引理 1(i) 可知 T 满足定理中的假设条件，故由 G 的极小性可知 T 是 p -幂零的.

步骤 3　$G/O_p(G)$ 是 p -幂零的，且 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$.

设 $J(P)$ 是 P 的 Thompson 子群，容易得到 $P\leqslant N_G(Z(J(P)))$. 如果 $N_G(Z(J(P)))<G$，那么根据步骤 2 可知 $N_G(Z(J(P)))$ 是 p -幂零的. 进一步根据 Glauberman-Thompson 定理可得 G 是 p -幂零的，与题设矛盾. 因此 $N_G(Z(J(P)))=G$，即 $Z(J(P))\trianglelefteq G$. 故 $O_p(G)\neq 1$. 为了方便起见，我们设 $\bar{G}=G/O_p(G)$，并且令

$$G_1/O_p(G)=N_{\bar{G}}(Z(J(\bar{P})))\qquad P_1/O_p(G)=Z(J(\bar{P}))$$

如果 $G_1=G$，那么 $P_1\trianglelefteq G$. 容易看出 $P_1>O_p(G)$，则与 $O_p(G)$ 是 G 中最大的正规 p -子群矛盾. 故 $G_1<G$. 进一步，根据步骤 2 可知 G_1 是 p -幂零的，因此 $N_{\bar{G}}(Z(J(\bar{P})))$ 也是 p -幂零的. 再根据 Glauberman-Thompson 定理可知 $G/O_p(G)$ 是 p -幂零的. 显然可得 G 是 p -可解的. 再根据 $O_{p'}(G)=1$ 和引理 2 可得 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$.

步骤 4　$G=PQ$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$p\neq q$.

设 $q\neq p$，$q\in\pi(G)$. 由于 G 是 p -可解的，因此根据文献[15]的定理 6.3.5 可知，存在 $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$ 使得 $PQ\leqslant G$. 如果 $PQ<G$，则由步骤 2 知 PQ 是 p -幂零的，从而 $Q\trianglelefteq PQ$. 于是

$$O_p(G)Q=O_p(G)\times Q$$

再根据步骤 3 可知

$$Q\leqslant C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$$

矛盾. 因此 $G=PQ$.

步骤 5　G 中存在唯一的极小正规子群 N，且 G/N 是 p -幂零的. 实际上，$\Phi(G)=1$，$N=O_p(G)$.

因为 G 是 p -可解的，且 $O_{p'}(G)=1$，所以 N 是初等交换 p -群.

首先我们断言 $|N|<|D|$. 如果 $|N|=|D|$，则根据定理假设可知 $G=N_G(N)$ 是 p -幂零的，与题设矛盾.

现在我们假设 $|N|>|D|$，则 N 的所有 $|D|$ 阶子群在 G 中 SS -半置换. 再根据引理 4 可知，N 中存在的极大子群 N_2 正规于 G，与 N 的极小性矛盾. 因此 $|N|<|D|$.

如果 $|P:D|=p$，则 D 是 P 的极大子群. 进一步根据定理 1 可得 G 是 p -幂零的，与题设矛盾. 因此 $|D|>p$. 容易验证 G/N 满足定理假设，则根据 G 的极小性可得 G/N 是 p -幂零的.

若存在另外一个极小正规子群 $N_1\neq N$，则 $G\simeq G/(N\cap N_1)\lesssim G/N\times G/N_1$ 是 p -幂零的，与题设矛盾. 因此 N 是唯一的. 在这里容易验证 $\Phi(G)=1$. 再根据文献[16]Ⅴ的定理 4.5 可得 $N=O_p(G)$.

步骤 6　最后的矛盾.

根据步骤 4 和 Burnside p^aq^b 定理可得 G 可解. 进一步根据文献[16]Ⅲ 的定理 1.7 可得，G 中存在极大子群 M，使得 $M\trianglelefteq G$，且 $|G:M|$ 是素数. 如果 $|G:M|=q$，则 $P\leqslant M$. 再根据步骤 2 可知 M 是 p -幂零的. 设 M 的正规 p -补为 K，则 K char $M\trianglelefteq G$，由步骤 1，$K\leqslant O_{p'}(G)=1$，从而

$$P=M\trianglelefteq G\qquad N=O_p(G)=P$$

进一步，根据引理 4 可得 N 中存在 G 的极大子群 N_2 正规于 G，与 N 的极小性矛盾. 因此 $|G:M|=p$. 由于 $M\trianglelefteq G$，那么根据文献[16]Ⅱ的命题 2.3(6) 可得 $P\cap M\in \mathrm{Syl}_p(M)$. 进一步可得 $P\cap M$ 是 P 的极大子群. 再根据引理 1(i) 可知 $P\cap M$ 的每个 $|D|$ 阶子群 H_1 在 M 中 SS -半置换，$N_M(H_1)\leqslant N_G(H_1)$ 是 p -幂零的，从而 M 满足定理假设，由 G 的极小性知 M 是 p -幂零的，$M=(P\cap M)\times O^p(M)$，其中

$$O^p(M) \text{ char } M \qquad M \trianglelefteq G$$

从而 $O^p(M) \trianglelefteq G$. 于是

$$G = PM = P(P \cap M)O^p(M) = PO^p(M)$$

故 G 是 p -幂零的，矛盾.

参考文献:

[1] 曹建基，高建玲. 非正规循环子群的正规化子皆极大的两类有限可解群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(12)：81-85.

[2] 高建玲，毛月梅. 有限群的 δ -置换子群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：105-109.

[3] 高丽，汪忠碧，陈贵云. 用极大交换子群阶的集合刻画 S_n [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(4)：21-24.

[4] 周红，刘建军. 有限群的局部化$\mathscr{HC}$-子群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(2)：7-10.

[5] 郭秀云，岑嘉评. 有限群的极小子群与 p -幂零性 [J]. 中国科学(A 辑)，2002，32(9)：782-790.

[6] GUO W B，SHUM K P，SKIBA A N. X-Semipermutable Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，2007，315(1)：31-41.

[7] 庞琳娜，邱燕燕，卢家宽. p -幂零群的若干充分条件 [J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2014，32(2)：64-66.

[8] KONG Q J. New Characterizations of p-Nilpotency of Finite Groups [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2021，20(11)：1-6.

[9] 袁媛，唐康，刘建军. S -拟正规嵌入子群与有限群的 p -幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：1-4.

[10] 徐明曜. 有限群导引(下册) [M]. 北京：科学出版社，1999.

[11] KEGEL O H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Mathematische Zeitschrift，1962，78(1)：205-221.

[12] LI S R，PENG F，BAI Y R. C-Supplemented and SS-Quasinormal Subgroups of Finite Groups [J]. Guangxi Sciences，2010，17(1)：1-4.

[13] 玉素贞. ss -半置换子群对有限群结构的影响 [D]. 桂林：广西师范大学，2009.

[14] ISAACS I. Finite Group Theory [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，2008.

[15] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York：Chelsea Publishing Company，1980.

[16] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1999.

责任编辑　廖坤