DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.002

无穷时滞测度泛函微分方程的 Lyapunov 逆定理①

李宝麟, 王雪莲

西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070

摘要: 利用无穷时滞测度泛函微分方程在一定条件下与广义常微分方程的等价关系,借助广义常微分方程的 Lypunov 逆定理,建立了无穷时滞测度泛函微分方程的 Lyapunov 逆定理.

关 键 词: 广义常微分方程;无穷时滞测度泛函微分方程;Banach 空间;Kurzweil 积分;Lyapunov 泛函;正则稳定性

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2022)11-0010-10

Lyapunov's inverse theorems for measure functional differential equations with infinite delay

LI Bao Lin[1], WANG Xue Lian[2]

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we use the equivalence relation between measure functional differential equations with infinite delay and generalized ordinary differential equations under some certain conditions, and use the Lyapunov's inverse theorems of generalized ordinary differential equations to establish the Lyapunov's inverse theorems for measure functional differential equations with infinite delay.

Key words: generalized ordinary differential equations; measure functional differential equations with infinite delay; Banach space; Kurzweil integral; Lyapunov functional; regular stability

Kurzweil J[1-2] 于 1957 年建立了广义常微分方程理论. 文献[2]建立了测度微分方程与广义常微分方程的等价关系. 文献[3]给出了无穷时滞测度泛函微分方程的稳定性结果,证明了无穷时滞测度泛函微分方程在某些条件下等价于广义常微分方程. 文献[4]建立了广义常微分方程的 Lyapunov 稳定性定理. 文献[5]定义了广义常微分方程的正则稳定性,建立了测度泛函微分方程的 Lyapunov 定理. 文献[6]提出了具有无穷时滞的经典泛函微分方程或脉冲泛函微分方程的相空间. 文献[7]定义了广义常微分方程的正则稳定性和 Lyapunov 泛函,证明了广义常微分方程关于正则稳定性的 Lyapunov 逆定理;定义了测度泛函微分方程的积分稳定性,并建立了测度泛函微分方程关于积分稳定性的 Lyapunov 逆定理. 文献[8]研究了测度微分方程和时间尺度上动力方程的 Lyapunov 稳定性. 文献[9]建立了测度泛函微分方程和广义常微分方程之间的等价关系. 文献[10]建立了无穷时滞测度泛函微分方程的周期和非周期平均化定理. 文献[11]利用广义常

① 收稿日期:2021-12-05
基金项目:国家自然科学基金项目(12161080).
作者简介:李宝麟 (1963-),男,教授,主要从事常微分方程与动力系统的研究.

微分方程建立了一类滞后泛函微分方程

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=f(y_t, t)\\ y_{t_0}=\phi\end{cases} \tag{1}$$

的 Lyapunov 逆定理，其中 $\phi\in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，$r\geqslant 0$，函数 $f(\phi, t)$ 将一个开子集 $G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)\times[t_0, +\infty]$ 映射到 $\mathbb{R}^n$，y_t：$[-r, 0]\longrightarrow\mathbb{R}^n$，$y_t(\theta)=y(t+\theta)$，$\theta\in[-r, 0]$. 文献[12]建立了测度中立型泛函微分方程的一致稳定性和一致渐进稳定性定理. 文献[13]给出了测度微分方程的稳定性结果. 文献[14-15]给出了无穷时滞脉冲泛函数分方程的稳定性结果.

受到以上工作的启发，本文将在文献[7]的基础上，利用无穷时滞测度泛函微分方程在一定条件下可以转化为广义常微分方程的特点(文献[3]中给出了详细的证明)，讨论无穷时滞测度泛函微分方程

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(y_s, s)\mathrm{d}g(s) \tag{2}$$

的 Lyapunov 逆定理. 其中 y 是一个未知函数，其值在 X 上取，符号 y_s 表示定义在$(-\infty, 0]$上的函数，$y_s(\tau)=y(s+\tau)$. 方程(2)右侧的积分是关于不减函数 g 的 Kurzweil-Stieltjes 积分. 用 $G((-\infty, 0], X)$ 表示所有正则函数 f：$(-\infty, 0]\longrightarrow X$ 的集合，无穷时滞测度泛函微分方程的候选相空间为一个线性空间 $H_0\subset G((-\infty, 0], X)$，对 H_0 赋于一个范数，并用 $\|\cdot\|_*$ 表示. 假设这个赋范线性空间 H_0 满足以下条件：

(H1) H_0 是完备的；

(H2) 如果 $y\in H_0$，$t<0$，则 $y_t\in H_0$；

(H3) 存在一个局部有界函数 κ_1：$(-\infty, 0]\longrightarrow\mathbb{R}^+$，使得如果 $y\in H_0$，$t\leqslant 0$，则 $\|y(t)\|\leqslant\kappa_1(t)\|y\|_*$；

(H4) 存在函数 κ_2：$(0, \infty)\longrightarrow[1, \infty)$，使得如果 $\sigma>0$，$y\in H_0$ 是一个支集包含在$[-\sigma, 0]$上的函数，则 $\|y\|_*\leqslant\kappa_2(\sigma)\sup\limits_{t\in[a, b]}\|y(t)\|$；

(H5) 存在局部有界函数 κ_3：$(-\infty, 0]\longrightarrow\mathbb{R}^+$，使得如果 $y\in H_0$，$t\leqslant 0$，则 $\|y_t\|_*\leqslant\kappa_3(t)\|y\|_*$；

(H6) 果 $y\in H_0$，则函数 $t\longmapsto\|y_t\|_*$ 在$(-\infty, 0]$上是正则的.

在本文中也需要一个合适的空间 $H_{t_0+\sigma}\subset G((-\infty, t_0+\sigma], X)$，$t_0\in\mathbb{R}$，$\sigma>0$，这个空间由定义在$(-\infty, t_0+\sigma]$上的正则函数组成，它满足引理 1 的 6 个结论.

1　预备知识

本节将简要介绍 Kurzweil 积分、广义常微分方程、无穷时滞测度泛函微分方程以及 Lyapunov 泛函的相关概念以及定理.

设 X 为一 Banach 空间，并用 $\|\cdot\|$ 表示 X 上的范数. 假设 F：$\Omega\longrightarrow X$，$\Omega=O\times[t_0, t_0+\sigma]$，$t_0\in\mathbb{R}$，$\sigma>0$，$O\subset X$ 是一个开集.

给定一个正值函数 δ：$[a, b]\longrightarrow(0, +\infty)$，对区间$[a, b]$上的一个分划 D：$a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=b$，如果有$[\alpha_{j-1}, \alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j), \tau_j+\delta(\tau_j)]$，$j=1,2,\cdots,k$，则称$[a, b]$上的划分 D 是δ-精细分划.

设 $s\geqslant t_0$，$x\in O$，$A(s, x)$：$=\{\varphi\in G([t_0, t_0+\sigma], X)$：$\varphi(t_0)=0$，$\varphi(s)=x$，$\varphi$ 在$(t_0, t_0+\sigma]$上是左连续的$\}$.

对 $s\geqslant t_0$，$x\in O$，定义 V：$[t_0, t_0+\sigma]\times O\longrightarrow\mathbb{R}$，

$$V(s, x):=\begin{cases}\inf\limits_{\varphi\in A(s, x)}\{\sup\limits_{\sigma\in[t_0, s]}\|\varphi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau), t)\|\}, & s>t_0,\\ \|y\|, & s=t_0\end{cases}$$

如果 $\varphi\in A(s, x)$ 是正则函数，则 Kurzweil-Henstock 积分 $\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau), t)$ 存在(Kurzweil-Henstock 积分详见后文定义 1)，且函数

$$[t_0, s] \ni \xi \longmapsto f(\xi) := \varphi(\xi) - \int_{t_0}^{\xi} DF(\varphi(\tau), t)$$

也是正则的. 由于每个正则函数在紧区间上是有界的，即 $\sup_{\xi \in [t_0, s]} \| f(\xi) \| < \infty$. 因此，对所有$(s, x) \in [t_0, t_0 + \sigma] \times O$, V 被很好地定义出来.

定义 1[2] 函数 $U: [a, b] \times [a, b] \longrightarrow X$ 在区间$[a, b]$上 Kurzweil 可积，如果存在 $I \in X$，使得对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正值函数 $\delta: [a, b] \longrightarrow (0, +\infty)$，使得对$[a, b]$的任何 δ-精细分划 $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \cdots, k\}$，都有

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right\| < \varepsilon$$

此时定义$\int_a^b DU(\tau, t) = I$ 为 U 在$[a, b]$上的 Kurzweil-Henstock 积分.

特别的，函数 $f: [a, b] \longrightarrow X$, $g: [a, b] \longrightarrow X$，若 $U(\tau, t) = f(\tau) g(t)$, $\tau, t \in [a, b]$，则记

$$\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^b f(s) \mathrm{d}g(s)$$

定义 2[2] 设函数 $F: \Omega \longrightarrow X$，如果 $x: [a, b] \longrightarrow X$ 是广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t) \tag{3}$$

在区间$[a, b] \subset [t_0, t_0 + \sigma]$上的解，是指对所有的 $t \in [a, b]$, $(x(t), t) \in \Omega$ 和对任意的 $s_1, s_2 \in [a, b]$,

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s1}^{s2} DF(x(\tau), t)$$

成立.

定义 3[2] 给定一个不减函数 $h: [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$，称函数 $F: \Omega \longrightarrow X$ 属于 $\mathscr{F}(\Omega, h)$，如果对所有的$(x, s_1), (x, s_2), (y, s_1), (y, s_2) \in \Omega$，我们有

$$\| F(x, s_2) - F(x, s_1) \| \leqslant | h(s_2) - h(s_1) |$$

$$\| F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1) \| \leqslant \| x - y \| \; | h(s_2) - h(s_1) |$$

引理 1[3] 如果 $H_0 \subset G((-\infty, 0), X)$ 是满足条件(H1)-(H6)的空间，则对任意 $a \in \mathbb{R}$，以下结论成立：

1) H_a 是完备的.

2) 如果 $y \in H_a$, $t \leqslant a$，则 $y_t \in H_0$.

3) 如果 $y \in H_a$, $t \leqslant a$，则 $\| y(t) \| \leqslant \kappa_1(t - a) \| y \|_*$.

4) 如果 $\sigma > 0$, $y \in H_{a+\sigma}$ 是支集包含在$[a, a + \sigma]$上的函数，则

$$\| y \|_* \leqslant \kappa_2(\sigma) \sup_{t \in [a, a+\sigma]} \| y(t) \|$$

5) 如果 $y \in H_{a+\sigma}$, $t \leqslant a + \sigma$，则

$$\| y_t \|_* \leqslant \kappa_3(t - a - \sigma) \| y \|_/$$

6) 如果 $y \in H_{a+\sigma}$，则函数 $t \longmapsto \| y_t \|_*$ 在$(-\infty, a + \sigma]$上是正则的.

引理 2[7] 如果 $g: [a, b] \longrightarrow X$ 是一个左连续的正则函数，则

$$\sup_{s \in [a, b]} \| g(s) \| = c$$

其中存在 $\sigma \in [a, b]$ 使得 $c = \| g(\sigma) \|$，或存在 $\sigma \in [a, b)$ 使得 $c = \| g(\sigma^+) \|$.

引理 3[3] 如果 $y: (-\infty, t_0 + \sigma] \longrightarrow X$ 是正则函数，则 $t \longmapsto \| y_t \|_\infty$ 在$(-\infty, 0]$上是正则的.

定义 4[5] 广义常微分方程(3)的平凡解 $x \equiv 0$ 被称作

(i) 正则稳定的. 如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon)$，使得如果 $\bar{x}: [a, b] \subset [t_0, +\infty) \longrightarrow X$ 是一个在$(a, b]$上左连续的正则函数，满足

$$\| \bar{x}(a) \| < \delta, \; \sup_{s \in [a, b]} \left\| \bar{x}(s) - \bar{x}(a) - \int_a^s DF(\bar{x}(\tau), t) \right\| < \delta$$

则 $\| \bar{x}(t) \| < \varepsilon$, $t \in [a, b]$;

(ii) 正则吸引的. 如果存在 $\delta_0 > 0$ 和对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $T = \overline{T}(\varepsilon) \geqslant 0$ 和 $\rho = \overline{\rho}(\varepsilon) > 0$，使得如果 $\overline{x}:[a, b] \subset [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow X$ 是一个在 $(a, b]$ 上左连续的正则函数，满足

$$\| \overline{x}(a) \| < \delta_0,\ \sup_{s \in [a, b]} \| \overline{x}(s) - \overline{x}(a) - \int_a^s DF(\overline{x}(\tau), t) \| < \rho$$

则对所有 $t \in [a, b] \cap [a + T, t_0 + \sigma]$，$\| \overline{x}(t) \| < \varepsilon$；

(iii) 正则渐近稳定. 如果它既是正则稳定又是正则吸引的.

引理 4[7]　设 $V:[t_0, t_0 + \sigma] \times O \longrightarrow \mathbb{R}$，则 V 满足下列条件：

1) 对所有 $s \geqslant t_0$，$V(s, 0) = 0$；

2) 对所有 $y \in O$ 和 $s \geqslant t_0$，$V(s, y) \geqslant 0$.

引理 5[7]　设 O 是 X 的一个子集，$V:[t_0, t_0 + \sigma] \times O \longrightarrow \mathbb{R}$ 是关于广义常微分方程(3) 的一个 Lyapunov 泛函，如果满足以下条件：

1) 对所有的 $x \in O$，$V(\cdot, x):[t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $(t_0, t_0 + \sigma]$ 上左连续；

2) 存在一个连续严格递增函数 $b:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$，满足 $b(0) = 0$，使得对 $(t, x) \in [t_0, t_0 + \sigma] \times O$，

$$V(t, x) \geqslant b(\| x \|)$$

3) 对广义常微分方程(3) 的每个解 $x:[s_0, \omega] \subset [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow O$，对所有 $t \in [s_0, \omega)$

$$\dot{V}(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leqslant 0$$

成立，则 V 的右导数关于广义常微分方程(3) 的解是非正的.

引理 6[7]　对所有 $s \geqslant t_0$，$y \in O$，$A(s, y)$ 是闭的.

引理 7[7]　设 $V:[t_0, t_0 + \sigma] \times O \longrightarrow \mathbb{R}$，则函数 $t \longmapsto V(t, y(t))$ 沿初始条件为 $y(s_0) = y_0$ 的测度泛函微分方程(2) 的每个饱和解 $y(t) = y(t, s_0, y_0)$，$(s_0, y_0) \in [t_0, t_0 + \sigma] \times O$ 是不增的.

引理 8[7]　设 $V:[t_0, t_0 + \sigma] \times O \longrightarrow \mathbb{R}$，则对所有 $x, y \in O$ 和 $s \in [t_0, t_0 + \sigma]$，有

$$V(s, y) - V(s, x) \leqslant \| y - x \|$$

引理 9[3]　给定 $H_0 \subset G((-\infty, 0], X)$ 是一个满足条件(H1)－(H6) 的 Banach 空间，$t_0 \in \mathbb{R}$，$\sigma > 0$，$O \subset H_{t_0+\sigma}$，$P = \{y_t;\ y \in O,\ t \in [t_0, t_0 + \sigma]\} \subset H_0$，考虑一个不减函数 $g:[t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ 和函数 $f:P \times [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow X$，则测度泛函微分方程

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)\mathrm{d}g(s),\ t \in [t_0, t_0 + \sigma] \tag{4}$$

等价于广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t),\ t \in [t_0, t_0 + \sigma] \tag{5}$$

其中 x 取值于 O，给定 $F:O \times [t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow G((-\infty, t_0 + \sigma], X)$，

$$F(x, t)(v) = \begin{cases} 0, & -\infty < v \leqslant t_0 \\ \int_{t_0}^{v} f(x_s, s)\mathrm{d}g(s), & t_0 \leqslant v \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma \\ \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\mathrm{d}g(s), & t \leqslant v \leqslant t_0 + \sigma \end{cases}$$

对每个 $x \in O$，$t \in [t_0, t_0 + \sigma]$，方程(5) 的解 x 和方程(4) 的解 y 之间的关系如下：

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in (-\infty, t] \\ y(t), & v \in [t, t_0 + \sigma] \end{cases}$$

2　主要结果

本节简要介绍了无穷时滞测度泛函微分方程的 Lyapunov 泛函和正则稳定性，建立了无穷时滞测度泛函微分方程的 Lyapunov 逆定理. 假设 $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$，其中 $\Omega = O \times [t_0, t_0 + \sigma]$，$O \subset H_{t_0+\sigma}$ 是一个开集，$h:[t_0, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是不减且左连续的.

定义5 设 $P=\{y_t;\ y\in O,\ t\in[t_0,\ t_0+\sigma]\}\subset H_0$,若满足以下条件,则 $W:[t_0,\ t_0+\sigma]\times P\longrightarrow\mathbb{R}$ 是关于测度泛函微分方程(4)的 Lyapunov 泛函:

(i) 对所有 $y\in P$,$W(\cdot,\ \psi):[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $(t_0,\ t_0+\sigma]$ 上是左连续的;

(ii) 存在一个连续严格递增函数 $b:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 满足 $b(0)=0$,使得对所有 $(t,\ \psi)\in[t_0,\ t_0+\sigma]\times P$,$W(t,\ \psi)\geqslant b(\|\psi\|)$;

(iii) 对每个 $t\geqslant t_0$ 和 $\psi\in P$,

$$\dot{W}(t,\ \psi):=\limsup_{\eta\to0+}\frac{W(t+\eta,\ y_{t+\eta}(t,\ \psi))-W(t,\ y_t(t,\ \psi))}{\eta}\leqslant0$$

成立.其中 $y(t,\ \psi)$ 表示初始条件为 $y_t=\psi$ 的测度泛函微分方程(4)的解,$y_{t+\eta},y_t:(-\infty,\ 0]\longrightarrow X$,对所有 $\theta\in(-\infty,\ 0]$,$y_{t+\eta}(\theta)=y(t+\eta+\theta)$,$y_t(\theta)=y(t+\theta)$.

定义6 测度泛函微分方程(4)的平凡解 $y\equiv0$ 称作

(i) 正则稳定的.如果对每个 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\bar{\delta}(\varepsilon)$,使得如果 $\bar{y}:[a,\ b]\subset[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow X$ 是一个在 $(a,\ b]$ 上左连续的正则函数,满足

$$\|\bar{y}(a)\|<\delta,\ \sup_{s\in[a,\ b]}\|\bar{y}(s)-\bar{y}(a)-\int_a^s DF(\bar{y}(\tau),\ t)\|<\delta$$

则 $\|\bar{y}(t)\|<\varepsilon$,$t\in[a,\ b]$;

(ii) 正则吸引的.如果存在 $\delta_0>0$ 和对每个 $\varepsilon>0$,存在 $T=\bar{T}(\varepsilon)\geqslant0$ 和 $\rho=\bar{\rho}(\varepsilon)>0$,使得如果 $\bar{y}:[a,\ b]\subset[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow X$ 是一个在 $(a,\ b]$ 上左连续的正则函数,满足

$$\|\bar{y}(a)\|<\delta_0,\ \sup_{s\in[a,\ b]}\|\bar{y}(s)-\bar{y}(a)-\int_a^s DF(\bar{y}(\tau),\ t)\|<\rho$$

则对所有 $t\in[a,\ b]\cap[a+T,\ t_0+\sigma]$,$\|\bar{y}(t)\|<\varepsilon$;

(iii) 正则渐近稳定.如果它既是正则稳定又是正则吸引的.

定理1 若测度泛函微分方程(4)的平凡解 $y\equiv0$ 是正则稳定的,则存在一个泛函 $W:[t_0,\ t_0+\sigma]\times P\longrightarrow\mathbb{R}$,满足:

(i) 对所有 $\psi\in P$,$W(\cdot,\ \psi):[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $(t_0,\ t_0+\sigma]$ 上是左连续的;

(ii) 存在一个连续(严格)递增函数 $b:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 满足 $b(0)=0$,使得对所有 $(t,\ y)\in[t_0,\ t_0+\sigma]\times P$,$W(t,\ y)\geqslant b(\|y\|)$;

(iii) 函数 $t\longmapsto W(t,\ y_t(s,\ \psi))$,$t\in(-\infty,\ t_0+\sigma]$ 沿初始条件为 $y_s=\psi$ 的测度泛函微分方程(4)的每个饱和解 $y:(-\infty,\ t_0+\sigma]$ 是不增的;

(iv) 对所有 $t\in[t_0,\ t_0+\sigma]$,$W(t,\ 0)=0$;

(v) 存在一个连续递增函数 $a:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$,满足 $a(0)=0$,使得对所有 $z\in P$,$t\in[t_0,\ t_0+\sigma]$,$W(t,\ z)\leqslant a(\|z\|)$;

(vi) 对测度泛函微分方程(4)的每个饱和解 $y:[s_0,\ t_0+\sigma]\subset[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow P$,对所有 $t\in[s_0,\ t_0+\sigma]$,导数

$$\dot{W}(t,\ \psi):=\limsup_{\eta\to0+}\frac{W(t+\eta,\ y_{t+\eta}(t,\ \psi))-W(t,\ y_t(t,\ \psi))}{\eta}\leqslant0$$

成立.即函数 W 的右导数关于测度泛函微分方程(4)的解是非正的.

证 给定 $t\geqslant t_0$ 和 $\psi\in P$,设 y 是初始条件为 $y_t=\psi$ 的测度泛函微分方程(4)的解,$x:[t,\ t+\sigma]\longrightarrow O$ 是广义常微分方程(5)的解,对所有 $\theta\in(-\infty,\ 0]$,$x(t)(t+\theta)=y(t+\theta)$,因此 $(x(t))_t=y_t$,在后文中,用 $x_\psi(t)$ 代替 $x(t)$.根据引理5,对所有 $t\in[t_0,\ t_0+\sigma]$,$\psi\in P$,定义 $W(t,\ \psi)=V(t,\ x_\psi(t))$.

先证明(i):设 $F\in\mathscr{F}(\Omega,\ h)$,其中函数 $h:[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是不减且左连续的.给定 $\psi\in P$,需证明 $W(\cdot,\ \psi)$ 在 $(t_0,\ t_0+\sigma]$ 上左连续,令 $\sigma_0\in(t_0,\ t_0+\sigma]$,$\varepsilon>0$,由引理6,存在 $\psi\in A(\sigma_0,\ x_\psi)$,使得

$$V(\sigma_0,\ x_\psi)=\sup_{\sigma\in[t_0,\ \sigma_0]}\|y_t(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(y_t(\tau),\ t)\|$$

由于 $\sigma_0\in(t_0,\ t_0+\sigma]$,$\varepsilon>0$,$h$ 和 y_t 在 $(t_0,\ t_0+\sigma]$ 上左连续,存在 $\delta>0$ 使得对每个 $t\in[\sigma_0-\delta,\ \sigma_0)$

有

$$|h(t)-h(\sigma_0)|<\varepsilon \qquad \|y_t(t)-y_t(\sigma_0)\|<\varepsilon \tag{6}$$

下面证明对每个 $t\in[\sigma_0-\delta,\sigma_0)$ 有

$$|V(t,,x_\psi)-V(\sigma_0,,x_\psi)|<\varepsilon$$

设任意 $t\in[\sigma_0-\delta,\sigma_0)$，有

$$V(\sigma_0,x_\psi)=\sup_{\sigma\in[t_0,\sigma_0]}\|y_t(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(y_t(\tau),s)\|\geqslant\sup_{\sigma\in[t_0,t]}\|y_t(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(y_t(\tau),s)\|\geqslant V(t,x_\psi(t))$$

由引理 8 和(6) 式有

$$V(t,x_\psi)-V(\sigma_0,x_\psi)\leqslant V(t,x_\psi)-V(t,y_t(t))\leqslant\|x_\psi-y_t(t)\|=\|\psi(\sigma_0)-y_t(t)\|<\varepsilon \tag{7}$$

另一方面，令 $\psi:[t,t+\sigma]\longrightarrow X$ 是初始条件为 $y_t=\psi$ 的测度泛函微分方程(4) 的解，由引理 7 有

$$V(\sigma_0,y_t(\sigma_0))-V(t,y_t(t))\leqslant 0$$

因此

$$V(\sigma_0,x_\psi)-V(t,x_\psi)=V(\sigma_0,x_\psi)-V(\sigma_0,y_t(\sigma_0))+V(\sigma_0,y_t(\sigma_0))-V(t,y_t(t))\leqslant V(\sigma_0,x_\psi)-V(\sigma_0,y_t(\sigma_0)) \tag{8}$$

由于 ψ 是初始条件为 $y_t=\psi$ 的测度泛函微分方程(4) 的解，

$$y_t(\sigma_0)-x_\psi=\int_t^{\sigma_0}DF(y_t(\tau),s) \tag{9}$$

由引理 8 有

$$V(\sigma_0,x_\psi)-V(\sigma_0,\psi(\sigma_0))\leqslant\|y_t(\sigma_0)-x_\psi\| \tag{10}$$

由(8),(9) 和(10) 式有

$$V(\sigma_0,x_\psi)-V(t,x_\psi)\leqslant\|\int_t^{\sigma_0}DF(y_t(\tau),s)\|<\varepsilon \tag{11}$$

根据(7) 和(11) 式，对所有 $t\in[\sigma_0-\delta,\sigma_0)$，

$$|V(\sigma_0,x_\psi)-V(t,x_\psi)|<\varepsilon$$

因此，

$$|W(\sigma_0,\psi)-W(t,\psi)|<\varepsilon$$

下面证明(ii)：存在 $\varepsilon>0$ 和一个序列对 $(t_k,y_k)\in[t_0,t_0+\sigma]\times O$，$k=1,2,\cdots$，使得

$$\varepsilon\leqslant\|y_k\| \tag{12}$$

当 $k\to\infty$ 时，$t_k\to\infty$，$V(t_k,y_k)\to 0$. 取 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，存在 $k_0\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k>k_0$，$V(t_k,y_k)<\delta$. 又因为 $A(t_k,y_k)$ 是一个闭集，存在 $\varphi_k\in A(t_k,y_k)$，使得

$$\sup_{\sigma\in[t_0,t_k]}\|\varphi_k(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi_k(\tau),t)\|<\delta$$

定义 $P_k:[t_0,t_k]\longrightarrow X$，

$$P_k(\sigma)=\varphi_k(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi_k(\tau),t),\ \sigma\in[t_0,t_k]$$

由于 $\varphi_k(t_0)=0$，$P_k(t_0)=0$，因此，

$$\sup_{\sigma\in[t_0,t_k]}\|P_k(\sigma)-P_k(t_0)\|=\sup_{\sigma\in[t_0,t_k]}\|P_k(\sigma)\|=\sup_{\sigma\in[t_0,t_k]}\|\varphi_k(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi_k(\tau),t)\|<\delta$$

对 $\sigma\in[t_0,t_k]$，有

$$\varphi_k(\sigma)=\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi_k(\tau),t)+\varphi_k(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi_k(\tau),t)+\varphi_k(t_0)=\varphi_k(t_0)+\int_{t_0}^{\sigma}D[F(\varphi_k(\tau),t)+P_k(t)]$$

因此，对所有 $t\geqslant t_0$，$\|\varphi_k(t)\|<\varepsilon$，$\|\varphi_k(t_k)\|=\|y_k\|<\varepsilon$，与(12) 式矛盾.

下面证明(iii)：设 $x:[s_0,t_0+\sigma]\longrightarrow X$ 是广义常微分方程(5) 的解，$t_1,t_2\in[s_0,t_0+\sigma]$，使得

$t_2 > t_1$. 令 $\varphi \in A(t_1, x_\psi(t_1))$，定义 $\phi: [t_0, t_0+\sigma] \longrightarrow X$，

$$\phi(\sigma) := \begin{cases} \varphi(\sigma), & \sigma \in (t_0, t_1] \\ x_\psi(\sigma), & \sigma \in [t_1, t_2) \\ 0, & \sigma \in [t_2, t_0+\sigma] \end{cases}$$

注意 $\phi \in A(t_2, x_\psi(t_2))$，因此，

$$V(t_2, x_\psi(t_2)) \leqslant \sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \tag{13}$$

由定义 3 和 $\phi \in A(t_2, x_\psi(t_2))$，可知函数 $\sigma \longmapsto \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s)$，$\sigma \in [t_0, t_2]$ 是正则且左连续的，则根据引理 2，考虑关于

$$\sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \|$$

的两种情况：

1) 假设对 $v \in [t_0, t_2]$，

$$\sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \| = \| \phi(v) - \int_{t_0}^{v} DF(\phi(\tau), s) \|$$

在这种情况下，$v \in [t_0, t_1]$ 或 $v \in [t_1, t_2]$. 如果 $v \in [t_0, t_1]$，则

$$\sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \| = \sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \|$$

由于 $\phi|_{[t_0, t1]} = y_t$，有

$$\sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \| = \sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \|$$

再由(13) 式有

$$V(t_2, x_\psi(t_2)) \leqslant \sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \tag{14}$$

现在，假定 $v \in [t_1, t_2]$，考虑到 $\phi|_{[t1, t_2]} = y$，有

$$\begin{aligned} \| \phi(v) - \int_{t_0}^{v} DF(\phi(\tau), s) \| &= \| \phi(v) - \int_{t_0}^{t1} DF(\phi(\tau), s) - \int_{t1}^{v} DF(\phi(\tau), s) \| = \\ &\| x_\psi(v) - \int_{t_0}^{t1} DF(y_t(\tau), s) - \int_{t1}^{v} DF(x_\psi(\tau), s) \| \end{aligned} \tag{15}$$

因为 x 是广义常微分方程(5) 的解，我们推断出

$$x_\psi(v) - \int_{t1}^{v} DF(x_\psi(v)(\tau), s) = x_\psi(v)(t_1) = y_t(t_1) \tag{16}$$

由(13) 和(16) 式，

$$\begin{aligned} \| \phi(v) - \int_{t_0}^{v} DF(\phi(\tau), s) \| &= \| y_t(t_1) - \int_{t_0}^{t1} DF(y_t(\tau), s) \| = \\ &\sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \end{aligned} \tag{17}$$

再由(13) 和(17) 式，我们得到

$$V(t_2, x_\psi(t_2)) \leqslant \sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \tag{18}$$

2) 假设对 $v \in [t_0, t_2]$，

$$\sup_{\sigma \in [t_0, t_2]} \| \phi(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \| = \| \phi(v^+) - \lim_{\sigma \to v^+} \int_{t_0}^{\sigma} DF(\phi(\tau), s) \|$$

在这种情况下，$v \in [t_0, t_1]$ 或 $v \in [t_1, t_2]$. 如果 $v \in [t_0, t_1)$，因为 $\phi|_{[t_0, t1]} = y_t$，则

$$V(t_2, x_\psi(t_2)) \leqslant \| \varphi(v^+) - \lim_{\sigma \to v^+} \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \leqslant \sup_{\sigma \in [t_0, t1]} \| y_t(\sigma) - \int_{t_0}^{\sigma} DF(y_t(\tau), s) \| \tag{19}$$

现在，假设 $v \in [t_1, t_2]$，考虑到 $\phi|_{[t1, t_2]} = x_\psi$，有

$$\sup_{\sigma\in[t_0,t_2]}\left\|\phi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi(\tau),s)\right\|=\left\|\phi(v^+)-\lim_{\sigma\to v+}\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi(\tau),s)\right\|=$$

$$\left\|x_\psi(v^+)-\lim_{\sigma\to v+}\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi(\tau),s)\right\|=$$

$$\left\|x_\psi(v^+)-\int_{t_0}^{t1}DF(\varphi(\tau),s)-\lim_{\sigma\to v+}\int_{t1}^{\sigma}DF(x_\psi(\tau),s)\right\|=$$

$$\left\|x_\psi(v)-\int_{t_0}^{t1}DF(\varphi(\tau),s)-\int_{t1}^{v}DF(x_\psi(\tau),s)\right\|=$$

$$\left\|x_\psi(t_1)-\int_{t_0}^{t1}DF(\varphi(\tau),s))\right\|=$$

$$\left\|\varphi(t_1)-\int_{t_0}^{t1}DF(\varphi(\tau),s))\right\|\leqslant$$

$$\sup_{\sigma\in[t_0,t1]}\left\|\varphi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau),s)\right\|$$

再由(13)式，有

$$V(t_2,x_\psi(t_2))\leqslant\sup_{\sigma\in[t_0,t1]}\left\|y_t(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(y_t(\tau),s)\right\| \tag{20}$$

在(14)，(18)和(20)式中，$y_t\in A(t_1,x_\psi(t_1))$，有

$$V(t_2,x_\psi(t_2))\leqslant V(t_1,x_\psi(t_1))$$

因此，

$$W(t_2,y_{t_2}(t,\psi))\leqslant W(t_1,y_{t1}(t,\psi))$$

由引理 4 可得(iv)显然成立.

下面证明(v)：由引理 4 和引理 8，考虑 a 是一个单位函数，对所有 $z\in X$，$t\in[t_0,t_0+\sigma]$，

$$V(t,z)\leqslant\|V(t,z)-V(t,0)\|\leqslant\|z\|$$

下面证明(vi)：仿照证明(iii)的方法，对所有 $t\in[s_0,t_0+\sigma)$ 和 $\eta>0$，有

$$V(t+\eta,x_\psi(t+\eta))\leqslant V(t,x_\psi(t))$$

即

$$V(t+\eta,x_\psi(t+\eta))-V(t,x_\psi(t))\leqslant 0$$

因此

$$\dot W(t,\psi):=\limsup_{\eta\to0+}\frac{W(t+\eta,y_{t+\eta}(t,\psi))-W(t,y_t(t,\psi))}{\eta}:=$$

$$\limsup_{\eta\to0+}\frac{V(t+\eta,x_\psi(t+\eta))-V(t,x_\psi(t))}{\eta}\leqslant 0$$

定理 2　如果测度泛函微分方程(4)的平凡解 $y\equiv0$ 是正则吸引的，则存在一个泛函

$$W:[t_0,t_0+\sigma]\times P\longrightarrow\mathbb{R}$$

满足：

(i) 对所有 $\psi\in P$，$W(\cdot,\psi):[t_0,t_0+\sigma]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在$(t_0,t_0+\sigma]$上是左连续的；

(ii) 存在一个连续(严格)递增函数 $b:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 满足 $b(0)=0$，使得对所有$(t,\psi)\in[t_0,t_0+\sigma]\times P$，$W(t,\psi)\geqslant b(\|\psi\|)$；

(iii) 对测度泛函微分方程(4)的每个饱和解 $y:[s_0,t_0+\sigma]\subset[t_0,t_0+\sigma]\longrightarrow O$，我们有

$$\dot W(t,\psi)\leqslant-W(t,\psi),\ t\in[s_0,t_0+\sigma]\subset[t_0,t_0+\sigma]$$

(iv) 对所有 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$，$W(t,0)=0$；

(v) 存在一个连续递增函数 $a:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 满足 $a(0)=0$，使得对所有 $z\in P$，$t\in[t_0,t_0+\sigma]$，$W(t,z)\leqslant a(\|z\|)$；

(vi) 函数 $t\longmapsto W(t,y_t(s,\psi))$，$t\in(-\infty,t_0+\sigma]$沿初始条件为 $y_s=\psi$ 的测度泛函微分方程(4)的

每个饱和解 $y:(-\infty,\ t_0+\sigma]$ 是不增的;

证 (i),(ii),(iv),(v),(vi) 的证明过程与定理 1 类似,因此在这里省略. 这里来证明一下(iii):首先,对 $s \geqslant t_0$, $x \in O$,定义 $V:[t_0,\ t_0+\sigma]\times O \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$V(s,\ x):=\begin{cases}\inf\limits_{\varphi\in A(s,\ x)}\{\sup\limits_{\sigma\in[t_0,\ s]}\|\varphi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau),\ t)\|\mathrm{e}^{-s}\},\ s>t_0,\\ \|x\|,\ s=t_0.\end{cases}\tag{21}$$

设 $x:[s_0,\ t_0+\sigma]\subset[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow X$ 是广义常微分方程(5) 的饱和解,$t\in[s_0,\ t_0+\sigma]$. 设 $\varphi\in A(t,\ x_\psi(t))$,$\eta>0$. 定义 $\phi_\eta:[t_0,\ t_0+\sigma]\longrightarrow X$,

$$\phi_\eta(\sigma):=\begin{cases}\varphi(\sigma), & \sigma\in(t_0,\ t]\\ x_\psi(\sigma), & \sigma\in[t,\ t+\eta)\\ 0, & \sigma\in[t+\eta,\ t_0+\sigma)\end{cases}$$

注意 $\phi_\eta\in A(t+\eta,\ y(t+\eta))$. 因此

$$V(t+\eta,\ x_\psi(t+\eta))\leqslant\sup_{\sigma\in[t_0,\ t+\eta]}\|\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}$$

则函数 $\sigma\longmapsto\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)$,$\sigma\in[t_0,\ t+\eta]$ 是正则且左连续的. 根据引理 2 和引理 6,考虑关于

$$\sup_{\sigma\in[t_0,\ t+\eta]}\|\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}$$

的两种情况:

1) 假设对 $V\in[t_0,\ t+\eta]$,

$$\sup_{\sigma\in[t_0,\ t+\eta]}\|\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}=\|\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}$$

考虑到 $\phi_\eta|_{[t_0,\ t]}=\varphi$ 和 $\phi_\eta|_{[t,\ t+\eta]}=x_\psi$,有

$$V(t+\eta,\ x_\psi(t+\eta))\leqslant\sup_{\sigma\in[t_0,\ t+\eta]}\|\phi_\eta(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_\eta(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}=$$

$$\begin{cases}\|\varphi(v)-\int_{t_0}^{v}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t_0,\ t],\\ \|x_\psi(v)-\int_{t_0}^{t}DF(\varphi(\tau),\ s)-\int_{t}^{v}DF(x_\psi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t,\ t+\eta].\end{cases}$$

因为 $x_\psi(v)-\int_t^v DF(x_\psi(\tau),\ s)=x_\psi(t)$ 和 $\varphi(t)=x_\psi(t)$,有

$$V(t+\eta,\ x_\psi(t+\eta))\leqslant\begin{cases}\|\varphi(v)-\int_{t_0}^{v}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t_0,\ t]\\ \|x_\psi(t)-\int_{t_0}^{t}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t,\ t+\eta]\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\|\varphi(v)-\int_{t_0}^{v}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t_0,\ t]\\ \|\varphi(t)-\int_{t_0}^{v}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)},\ v\in[t,\ t+\eta]\end{cases}\leqslant$$

$$\begin{cases}\sup\limits_{\sigma\in[t_0,\ t]}\|\varphi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\eta}\\ \sup\limits_{\sigma\in[t_0,\ t]}\|\varphi(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\varphi(\tau),\ s)\|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\eta}\end{cases}$$

又因为 $\varphi\in A(t,\ x_\psi(t))$,有

$$V(t+\eta,\ x_\psi(t+\eta))\leqslant V(t,\ x_\psi(t))\mathrm{e}^{-\eta}$$

所以,

$$V(t+\eta,\ x_{\psi}(t+\eta))-V(t,\ x_{\psi}(t))\leqslant V(t,\ x_{\psi}(t))(\mathrm{e}^{-\eta}-1)$$

因此，

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\ x_{\psi}(t)):=&\limsup_{\eta\to 0+}\frac{V(t+\eta,\ x_{\psi}(t+\eta))-V(t,\ x_{\psi}(t))}{\eta}\leqslant\\&\limsup_{\eta\to 0+}\frac{V(t,\ x_{\psi}(t))(\mathrm{e}^{-\eta}-1)}{\eta}=\\&V(t,\ y(t))\limsup_{\eta\to 0+}\frac{(\mathrm{e}^{-\eta}-1)}{\eta}=\\&-V(t,\ x_{\psi}(t))\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\dot{W}(t,\ \psi):=&\limsup_{\eta\to 0+}\frac{W(t+\eta,\ y_{t+\eta}(t,\ \psi))-W(t,\ y_{t}(t,\ \psi))}{\eta}:=\\&\limsup_{\eta\to 0+}\frac{V(t+\eta,\ x_{\psi}(t+\eta))-V(t,\ x_{\psi}(t))}{\eta}\leqslant -W(t,\ \psi)\end{aligned}$$

2）假设对 $V\in[t_0,\ t+\eta]$，

$$\sup_{\sigma\in[t_0,\ t+\eta]}\left\|\phi_{\eta}(\sigma)-\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_{\eta}(\tau),\ s)\right\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}=\left\|\phi_{\eta}(v^{+})-\lim_{\sigma\to v+}\int_{t_0}^{\sigma}DF(\phi_{\eta}(\tau),\ s)\right\|\mathrm{e}^{-(t+\eta)}$$

因为情况 2）的证明过程与定理 1 中(iii) 的情况 2）的证明过程相似，因此在这里省略.

参考文献：

[1] KURZWEIL J. Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter [J]. Czechoslovak Mathematical Journal，1957，7(3)：418-449.

[2] SCHWABIK Š. Generalized Ordinary Differential Equations [M]. Singapore：World Scientific，1992.

[3] SLAVÍK A. Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2013，79：140-155.

[4] SCHWABIK Š. Variational Stability for Generalized Ordinary Differential Equations [J]. Časopis Pro Pěstování Matematiky，1984，109(4)：389-420.

[5] FEDERSON M，MESQUITA J G，TOON E. Lyapunov Theorems for Measure Functional Differential Equations via Kurzweil-Equations [J]. Mathematische Nachrichten，2015，288(13)：1487-1511.

[6] HALE J K，KATO J. Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay[J]. Funkcialaj Ekvacioj，1978，21：11-41.

[7] DA SILVA F A，FEDERSON M，GRAU R，et al. Converse Lyapunov Theorems for Measure Functional Differential Equations [J]. Journal of Differential Equations，2021，286：1-46.

[8] FEDERSON M，GRAU R，MESQUITA J G，et al. Lyapunov Stability for Measure Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales [J]. Journal of Differential Equations，2019，267(7)：4192-4223.

[9] FEDERSON M，G MESQUITA J，SLAVÍK A. Measure Functional Differential Equations and Functional Dynamic Equations on Time Scales [J]. Journal of Differential Equations，2012，252(6)：3816-3847.

[10] 李宝麟，王保弟. 无限滞后测度泛函微分方程的平均化 [J]. 数学杂志，2017，37(5)：987-998.

[11] FEDERSON M，SCHWABIK Š. Stability for Retarded Functional Differential Equations [J]. Ukrainian Mathematical Journal，2008，60(1)：121-140.

[12] 李宝麟，席娅. 测度中立型泛函微分方程的稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(2)：79-89.

[13] DAS P C，SHARMA R R. Existence and Stability of Measure Differential Equations [J]. Czechoslovak Mathematical Journal，1972，22(1)：145-158.

[14] FARIA T，GADOTTI M C，OLIVEIRA J J. Stability Results for Impulsive Functional Differential Equations with Infinite Delay [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2012，75(18)：6570-6587.

[15] FU X L，ZHOU L. Stability for Impulsive Functional Differential Equations with Infinite Delays [J]. Acta Mathematica Sinica，English Series，2010，26(5)：909-922.

责任编辑　张枸