

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.003

具有 logistic 输入率的结核病模型的动力学分析^①

郭雅妮, 侯强

中北大学 理学院, 太原 030051

摘要: 建立了一个具有 logistic 输入率和外源性再感染的结核病模型. 分析发现模型会出现余维 1 的跨临界、后向分支和 Hopf 分支; 接着利用规范型理论, 证明模型会经历退化的 Hopf 分支和一个余维 2 尖点; 最后通过数值模拟说明理论结果, 并发现模型会出现 B-T 分支.

关键词: 结核病; 基本再生数; Hopf 分支; 尖点分支

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)11-0020-07

Dynamic Analysis of a Tuberculosis Model with logistic input Rate

GUO Yani, HOU Qiang

School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China

Abstract: A tuberculosis model with logistic input rate and exogenous reinfection is established. It is found that the model has transcritical bifurcation, backward bifurcation and Hopf bifurcation of codimension 1. Using the normal form theory, it is proved that the model will undergo a degenerate Hopf bifurcation and a cusp of codimension 2. At last, the theoretical results are illustrated by numerical simulation, and B-T bifurcation is found in the model.

Key words: tuberculosis; basic reproduction number; Hopf bifurcation; B-T bifurcation

结核病是一种慢性传染病, 主要由结核分枝杆菌感染引起^[1]. 关于结核病的传播机制和动态, 已经有了许多研究成果^[2-7]. 其中, 文献[6]考虑结核病的外源性传染因素, 建立了动力学模型. 但该模型将人口输入设定为常数, 与实际情况不吻合. 本文在已有研究的基础上, 建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S}{m}\right) - \beta SI \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - p\beta EI - (\mu + k)E \\ \frac{dI}{dt} = p\beta EI + kE - (\mu + \mu_d)I \end{cases} \quad (1)$$

① 收稿日期: 2021-10-05

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(20210302123019, 20210302123031).

作者简介: 郭雅妮, 硕士研究生, 主要从事动力系统及其应用.

通信作者: 侯强, 博士, 副教授.

其中: $S(t), E(t), I(t)$ 分别表示易感者、潜伏者、染病者的数量; m 为环境容纳量; r 为内禀增长率; β 为易感人群与感染者的接触率; k 为潜伏者向染病者的转移率; μ 为自然死亡率; μ_d 为因病死亡率; p 为潜伏者遇到染病者的加速感染率. 所有参数均为正.

本文结构如下: 第一节求模型(1)的基本再生数, 并分析模型平衡点的存在性; 第二节主要研究模型的 Hopf 分支和尖点分支; 第三节用数值模拟验证分析结果; 第四节进行总结.

1 基本再生数和平衡点的存在性

根据文献[8]的方法, 模型(1)有正不变集

$$\Omega = \left\{ (S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq \frac{M}{\eta} \right\}$$

其中: $\eta, M = \frac{(r + \eta)^2 m}{4r}$ 都为正. 模型的无病平衡点为 $\mathbf{P}_0 = (S^0, 0, 0) = (m, 0, 0)$, 根据下一代矩阵法^[9], 模型的基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta k m}{(\mu + k)(\mu + \mu_d)} \quad (2)$$

正平衡点 $\mathbf{P}_* = (S^*, E^*, I^*)$ 满足:

$$\begin{cases} rS^* \left(1 - \frac{S^*}{m}\right) - \beta S^* I^* = 0 \\ \beta S^* I^* - p\beta E^* I^* - (\mu + k)E^* = 0 \\ p\beta E^* I^* + kE^* - (\mu + \mu_d)I^* = 0 \end{cases} \quad (3)$$

可得 $S^* = \frac{(\mu + \mu_d)(p\beta I^* + \mu + k)}{\beta(p\beta I^* + k)}$, $E^* = \frac{(\mu + \mu_d)I^*}{p\beta I^* + k}$.

且 I^* 满足

$$g(I^*) = D(I^*)f(I^*) \quad (4)$$

$$D(I^*) = -\frac{(\mu + \mu_d)(p\beta I^* + \mu + k)}{\beta^2 m (p\beta I^* + k)^2} \quad (5)$$

$$f(I^*) = AI^{*2} + BI^* + C = 0 \quad (6)$$

其中

$$A = p\beta^3 m$$

$$B = rp\beta(\mu + \mu_d) + \beta^2 m(k - rp)$$

$$C = r(1 - R_0)(\mu + k)(\mu + \mu_d)$$

由于 $D(I^*) = 0$ 时 I^* 的解小于零, 所以只需考虑 $f(I^*) = 0$ 的情况. 因此, 有以下定理:

定理 1 当 $R_0 > 1$ 时, $C < 0$, 模型(1)有一个正平衡点; 当 $R_0 < 1$ 时, $C > 0$, 如果 $B < 0$, 模型(1)有两个正平衡点; 当 $R_0 = 1$ 时, $C = 0$, 如果 $B < 0$, 模型(1)有一个正平衡点.

2 分支分析

当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $\mathbf{P}_0$ 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 $\mathbf{P}_0$ 是不稳定的. 根据 Sotomayor's 定理^[10], 当 $R_0 = 1$ 且 $p\mu r \neq \mu k + k^2$ 时, 模型(1)发生跨临界分支. 由于 $R_0 < 1$ 时, 模型(1)可能有两个正平衡点, 根据文献[6]的方法, 当 $R_0 = 1$ 且 $p\mu r > \mu k + k^2$ 时, 模型经历后向分支. 接下来讨论模型的 Hopf 分支和尖点分支.

2.1 Hopf 分支

对模型(1)作变换 $(x, y, z) = (S - S^*, E - E^*, I - I^*)$, 在原点泰勒展开, 我们得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_0 + ax + cz + a_{101}xz + a_{200}x^2 \\ \frac{dy}{dt} = q_0 + dx + ey + fz + b_{101}xz + b_{011}yz \\ \frac{dz}{dt} = c_0 + hy + jz + c_{011}yz \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} p_0 &= rS^* \left(1 - \frac{S^*}{m}\right) - \beta S^* I^*, & a &= r \left(1 - \frac{2S^*}{m}\right) - \beta I^*, & q_0 &= \beta S^* I^* - p\beta E^* I^* - (\mu + k)E^*, \\ e &= -(p\beta I^* + \mu + k), & f &= -p\beta E^* + \beta S^*, & c_0 &= p\beta E^* I^* + kE^* - (\mu + \mu_d)I^*, \\ j &= p\beta E^* - \mu_d - \mu, & h &= p\beta I^* + k, & c &= -\beta S^*, & d &= \beta I^*, \\ a_{200} &= -\frac{r}{m}, & a_{101} &= -\beta, & b_{101} &= \beta, & b_{011} &= -p\beta, & c_{011} &= p\beta \end{aligned}$$

此时, 正平衡点 P_* 的特征方程为

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (8)$$

其中

$$\alpha_2 = -(a + e + j), \alpha_1 = -(fh - ae - aj - ej), \alpha_0 = -aej + afh - cdh$$

当 $p = p_1$ 时, 我们有 $\alpha_1(p_1) > 0$ 和 $\alpha_2(p_1)\alpha_1(p_1) - \alpha_0(p_1) = 0$, 那么特征方程变为

$$(\lambda + \alpha_2(p_1))(\lambda^2 + \alpha_1(p_1)) = 0 \quad (9)$$

有一个负根 $\lambda_1 = -\alpha_2(p_1)$ 和一对纯虚根 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\alpha_1(p_1)}$. 对于足够小的 $\varepsilon > 0$, 当 $p \in (p_1 - \varepsilon, p_1 + \varepsilon)$ 时, 特征值的形式如下

$$\lambda_1 = -\alpha_2(p), \lambda_2 = w(p) + iv(p), \lambda_3 = w(p) - iv(p)$$

将 λ_2 代入特征方程(8)中, 对 p 求导, 分离实部和虚部, 得到

$$\begin{aligned} Z_1(p) \frac{d\omega(p)}{dp} - Z_2(p) \frac{dv(p)}{dp} + Z_3(p) &= 0 \\ Z_2(p) \frac{d\omega(p)}{dp} + Z_1(p) \frac{dv(p)}{dp} + Z_4(p) &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= 3(\omega^2(p) - v^2(p)) + 2\alpha_2(p)\omega(p) + \alpha_1(p) \\ Z_2(p) &= 6\omega(p)v(p) + 2\alpha_2(p)v(p) \\ Z_3(p) &= \alpha'_2(p)(\omega^2(p) - v^2(p)) + \alpha'_1(p)\omega(p) + \alpha'_0(p) \\ Z_4(p) &= 2\alpha'_2(p)\omega(p)v(p) + \alpha'_1(p)v(p) \end{aligned}$$

则有

$$\left. \frac{d\omega(p)}{dp} \right|_{p=p_1} = \frac{\alpha'_0(p) - \alpha_2(p)\alpha'_1(p) - \alpha'_2(p)\alpha_1(p)}{2\alpha_1(p) + 2\alpha_2^2(p)} \Big|_{p=p_1} \neq 0$$

当 p 穿过临界值 p_1 时, Hopf 分支发生.

通过变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\alpha_2 + a} & \frac{c}{-a + \sqrt{\alpha_1}} & \frac{c}{-a - \sqrt{\alpha_1}} \\ -\frac{\alpha_2 + j}{h} & \frac{-j + \sqrt{\alpha_1}}{h} & \frac{-j - \sqrt{\alpha_1}}{h} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

我们得到

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\alpha_2 u_1 + \sum_{m+n+s \geq 2} M_{mns} u_1^m u_2^n u_3^s \\ \dot{u}_2 = -\sqrt{\alpha_1} u_3 + \sum_{m+n+s \geq 2} N_{mns} u_1^m u_2^n u_3^s \\ \dot{u}_3 = \sqrt{\alpha_1} u_2 + \sum_{m+n+s \geq 2} L_{mns} u_1^m u_2^n u_3^s \end{cases} \quad (11)$$

其中 M_{mns}, N_{mns} 和 L_{mns} 是依赖于 p, β, r, μ, μ_d 和 k 的系数. $\mathbf{P}_*$ 的局部中心流形有以下形式

$$w_l = h_{20} u_2^2 + h_{11} u_2 u_3 + h_{02} u_3^2$$

其中

$$\begin{aligned} h_{20} &= \frac{2\alpha_1 M_{002} + (2\alpha_1 - \alpha_2^2) M_{020} + \alpha_2 \sqrt{\alpha_1} M_{011}}{-\alpha_2 (\alpha_2^2 - 4\alpha_1)} \\ h_{11} &= \frac{\alpha_2 M_{011} - 2(M_{002} - M_{020}) \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2^2 - 4\alpha_1} \\ h_{02} &= \frac{(2\alpha_1 - \alpha_2^2) M_{002} + 2\alpha_1 M_{020} - \alpha_2 \sqrt{\alpha_1} M_{011}}{-\alpha_2 (\alpha_2^2 - 4\alpha_1)} \end{aligned}$$

模型限制在中心流形

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = -\sqrt{\alpha_1} u_3 + \sum_{n+s=2} N_{0ns} u_2^n u_3^s + \sum_{n+s=3} K_{ns} u_2^n u_3^s + O(|u_2, u_3|^4) \\ \dot{u}_3 = \sqrt{\alpha_1} u_2 + \sum_{n+s=2} L_{0ns} u_2^n u_3^s + \sum_{n+s=3} E_{ns} u_2^n u_3^s + O(|u_2, u_3|^4) \end{cases} \quad (12)$$

上, 其中

$$\begin{aligned} K_{12} &= h_{02} N_{110} + h_{11} N_{101} + N_{012} & E_{12} &= h_{02} L_{110} + h_{11} L_{101} + L_{012} \\ K_{21} &= h_{20} N_{101} + h_{11} N_{110} + N_{021} & E_{21} &= h_{20} L_{101} + h_{11} L_{110} + L_{021} \\ K_{30} &= h_{20} N_{110} + N_{030} & E_{30} &= h_{20} L_{110} + L_{030} \\ K_{03} &= h_{02} N_{101} + N_{003} & E_{03} &= h_{02} L_{101} + L_{003} \end{aligned}$$

Lyapunov 第一系数可以表示为

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{8} (3N_{030} + 3h_{20} N_{110} + 3L_{003} + 3h_{02} L_{101} + h_{02} N_{110} + h_{11} N_{101} + N_{012} + h_{20} L_{101} + h_{11} L_{110} + L_{021}) + \\ &\quad \frac{1}{8\sqrt{\alpha_1}} (N_{011} N_{020} + N_{011} N_{002} - L_{011} L_{020} - L_{011} L_{002} + 2N_{002} L_{002} - 2N_{020} L_{020}) \end{aligned}$$

基于上述分析, 我们有以下定理:

定理 2 对于模型(1), 如果 $l_1 < 0 (> 0)$, 那么 Hopf 分支是超临界的(亚临界的), 如果 $l_1 = 0$, 那么 Hopf 分支是退化的.

2.2 尖点分支

对于正平衡点 $\mathbf{P}_* = (S^*, E^*, I^*)$ 的特征方程(8)式, 如果 $\alpha_1 = 0$ 且 $\alpha_0 = 0$, 则特征值为 $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = -\alpha_2$, 模型(1) 可能发生一个余维 2 的 B-T 分支. 特征值 $\lambda_{1,2} = 0$ 对应的特征向量和广义特征向量为 $\mathbf{U}_1 = \left(\frac{ch}{a}, j, -h\right)^T$ 和 $\mathbf{U}_2 = \left(\frac{ch}{a^2}, -1, 0\right)^T$, $\lambda_3 = -\alpha_2$ 对应的特征向量为 $\mathbf{U}_3 = \left(\frac{ch}{e+j}, a+e, h\right)^T$. 令 $(x, y, z) = (S - S^*, E - E^*, I - I^*)$, 将模型(1) 在原点泰勒展开成(7)式, 通过变换

$$(X, Y, Z)^T = \mathbf{G}(n_1, n_2, n_3)^T \quad (13)$$

其中 $\mathbf{G} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3)$, 模型变为

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = n_2 + A_{20}n_1^2 + A_{11}n_1n_2 + A_{02}n_2^2 + n_3 \cdot O(|n_1, n_2|) + O(|n_1, n_2, n_3|^3) \\ \frac{dn_2}{dt} = B_{20}n_1^2 + B_{11}n_1n_2 + B_{02}n_2^2 + n_3 \cdot O(|n_1, n_2|) + O(|n_1, n_2, n_3|^3) \\ \frac{dn_3}{dt} = (a + e + j)n_3 + C_{20}n_1^2 + C_{11}n_1n_2 + C_{02}n_2^2 + n_3 \cdot O(|n_1, n_2|) + O(|n_1, n_2, n_3|^3) \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{20} &= \frac{a^2(e+j)\left(-\frac{a_{101}h}{a} + \frac{a_{200}ch}{a^2}\right) + (e+j)\left(-b_{011}jh - \frac{b_{101}ch^2}{a}\right)}{(a+e+j)^2} - \\ &\quad \frac{(-a^2 - ae - aj - e^2 - ej)c_{011}j}{(a+e+j)^2} \\ A_{11} &= \frac{a^2(e+j)\left(-\frac{a_{101}ch^2}{a^2} + \frac{2a_{200}c^2h^2}{a^3}\right)}{ch(a+e+j)^2} + \frac{b_{011}h(e+j) - b_{101}\frac{ch^2}{a^2}(e+j)}{(a+e+j)^2} - \\ &\quad \frac{c_{011}(a^2 + ae + aj + e^2 + ej)h}{(a+e+j)^2h} \\ A_{02} &= \frac{(e+j)a_{200}ch}{a^2(a+e+j)^2}, B_{02} = \frac{(e+j)a_{200}ch}{a^2(a+e+j)} \\ B_{20} &= \frac{a^2(e+j)\left(-\frac{a_{101}h}{a} + \frac{a_{200}ch}{a^2}\right)}{(a+e+j)^2} - \frac{a\left(-b_{011}jh - \frac{b_{101}ch^2}{a}\right)}{a+e+j} - \frac{aec_{011}j}{a+e+j} \\ B_{11} &= \frac{a^2(e+j)\left(-\frac{a_{101}ch^2}{a^2} + \frac{2a_{200}c^2h^2}{a^3}\right)}{ch(a+e+j)} - \frac{a\left(b_{011}h - \frac{b_{101}ch^2}{a^2}\right)}{a+e+j} + \frac{aec_{011}h}{(a+e+j)h} \\ C_{20} &= A_{20} - c_{011}j, C_{11} = A_{11} + c_{011}, C_{02} = A_{02} \end{aligned}$$

根据文献[11]的方法, 模型(14)存在一个中心流形, 可以局部表示为

$$W^c = \{(n_1, n_2, n_3) \mid n_3 = G(n_1, n_2), |n_1| < \varepsilon_1, |n_2| < \varepsilon_2, G(0, 0) = 0, DG(0, 0) = 0\}$$

ε_1 和 ε_2 足够小. 考虑中心流形

$$n_3 = G(n_1, n_2) = s_0n_1^2 + s_1n_1n_2 + s_2n_2^2 + O(|n_1, n_2|^3)$$

将中心流形带入模型(14)的第三式, 得到

$$s_0 = -\frac{C_{20}}{a+e+j}, s_1 = -\frac{2C_{20}}{(a+e+j)^2} - \frac{C_{11}}{a+e+j}, s_2 = -\frac{2C_{20}}{(a+e+j)^3} - \frac{C_{11}}{(a+e+j)^2} - \frac{C_{02}}{a+e+j}$$

限制在中心流形上的模型为

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = n_2 + A_{20}n_1^2 + A_{11}n_1n_2 + A_{02}n_2^2 + O(|n_1, n_2|^3) \\ \frac{dn_2}{dt} = B_{20}n_1^2 + B_{11}n_1n_2 + B_{02}n_2^2 + O(|n_1, n_2|^3) \end{cases} \quad (15)$$

通过变换

$$\xi_1 = n_1 - \frac{1}{2}(A_{11} + B_{02})n_1^2 - A_{02}n_1n_2 + O(|n_1, n_2|^3)$$

$$\xi_2 = n_2 + A_{20}n_1^2 - B_{02}n_1n_2 + O(|n_1, n_2|^3)$$

得到

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + O(|\xi_1, \xi_2|^3) \\ \frac{d\xi_2}{dt} = B_{20}\xi_1^2 + (2A_{20} + B_{11})\xi_1\xi_2 + O(|\xi_1, \xi_2|^3) \end{cases} \quad (16)$$

则有以下定理成立:

定理 3 令 $R_0 = 1, \alpha_1 = 0, B_{20} \neq 0$ 且 $B_{11} + 2A_{20} \neq 0$. 则正平衡点 $\mathbf{P}_*$ 是一个余维 2 的尖点.

3 数值模拟

本节通过数值模拟, 分析模型(1)的动力学性态. 固定参数 $r=4, m=70, p=0.5, \mu=0.95, k=0.05$, 模型随着 d 的变化发生后向分支, $R_0 < 1$ 时出现了一个 Hopf 点(图 1). 再选择 p 作为分支参数, 固定参数 $r=0.04, m=35, \beta=0.01, \mu=0.07, \mu_d=0.01, k=0.1$, 模型随着参数 p 的变化出现两个 Hopf 点, 从第一个 Hopf 点出发到第二个 Hopf 点右侧出现一个稳定的极限环, 然后变得不稳定, 最后在第二个 Hopf 点消失(图 2). 选择 p 和 k 作为分支参数, 随着参数 p 和 k 的变化模型会出现 B-T 分支点, CP 分支点和退化的 Hopf 分支点 GH(图 3). 随着参数 p 和 r 的变化, 模型在第二个 Hopf 分支点右侧出现中性鞍点(图 4).

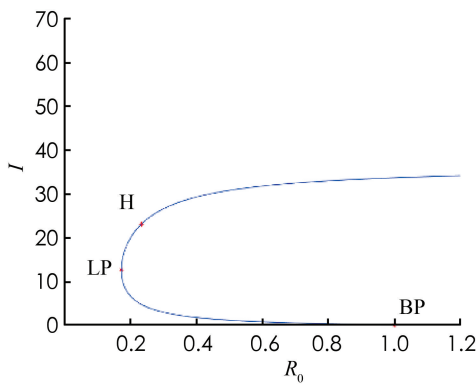


图 1 后向分支

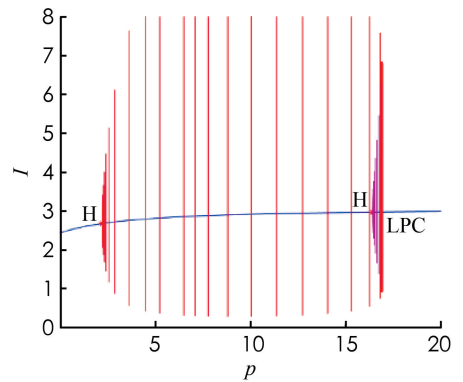


图 2 Hopf 分支

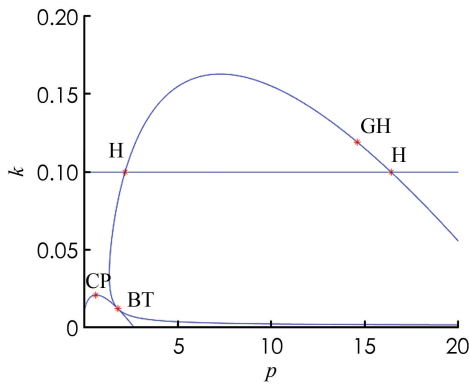


图 3 B-T 分支、尖点分支和退化的 Hopf 分支

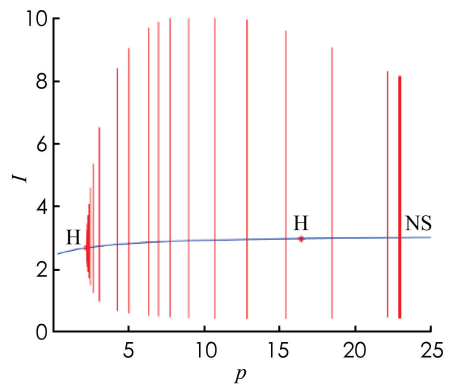


图 4 中性鞍点

4 结论

本文基于结核病传播的特点, 考虑 logistic 出生和外源性再感染, 建立一个反映结核病传播特点的动力学模型. 利用稳定性分析方法, 首先确定了模型的基本再生数, 分析了正平衡点的存在性; 然后利用规范型理论研究发现, 模型(1)不仅出现余维 1 的跨临界、后向和 Hopf 分支, 还会出现余维 2 的尖点和 Hopf 分支(退化的 Hopf 分支); 最后通过数值模拟验证理论结果, 分析给出周期解出现与消失的情况, 并发现模型会出现 B-T 分支. 这些复杂的动力学性态说明: 当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 外源性感染也可能导致地方

病存在; 周期解的存在意味着即使疾病处在低水平也不能说明疾病会逐渐消亡, 这给疾病防控措施的制定带来很多困难.

参考文献:

- [1] WORLD HEALTH ORGANIZATION. Global Tuberculosis Report [EB/OL]. (2020-10-12) [2021-05-06]. <https://www.who.int/multi-media/details/who-virtual-press-conference-to-launch-2020-global-tuberculosis-report>.
- [2] ZHAO Y, LI M T, YUAN S L. Analysis of Transmission and Control of Tuberculosis in Mainland China, 2005-2016, Based on the Age-Structure Mathematical Model [J]. International Journal of Environmental Research and Public Health, 2017, 14(10): 1192.
- [3] DAS D K, KHAJANCHI S, KAR T K. The Impact of the Media Awareness and Optimal Strategy on the Prevalence of Tuberculosis [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 366: 1-23.
- [4] KAR T K, MONDAL P K. Global Dynamics of a Tuberculosis Epidemic Model and the Influence of Backward Bifurcation [J]. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 2012, 11(4): 433-459.
- [5] GERBERRY DJ. Practical Aspects of Backward Bifurcation in a Mathematical Model for Tuberculosis [J]. Journal of Theoretical Biology, 2016, 388: 15-36.
- [6] WANGARI I M, DAVIS S, STONE L. Backward Bifurcation in Epidemic Models: Problems Arising with Aggregated Bifurcation Parameters [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(2): 1669-1675.
- [7] BUONOMO B, DELLA-MARCA R. Oscillations and Hysteresis in an Epidemic Model with Information-Dependent Imperfect Vaccination [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2019, 162: 97-114.
- [8] JAYANTA-KUMAR G, PRAHLAD M, UTTAM G. Qualitative Analysis and Optimal Control of an SIR Model with Logistic Growth, Non-Monotonic Incidence and Saturated Treatment [J]. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2021, 16: 13.
- [9] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [10] GUAN X Y, CHEN F D. Dynamical Analysis of a Two Species Amensalism Model with Beddington-DeAngelis Functional Response and Allee Effect on the Second Species [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2019, 48: 71-93.
- [11] KUZNETSOV Y A. Elements of Applied Bifurcation Theory [M]. New York: Springer, 1995.

责任编辑 张构