第 47 卷 第 11 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 11 月
Vol. 47 No. 11 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.004

一类特殊的亚交换群[①]

邓雨琪， 吕恒

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 令有限群 $G=P\rtimes Q$，其中 P 是初等交换 p-群，Q 是交换 q-群. 若 Q 忠实互素地作用在 P 上，则存在 Q 的任意直因子阶数的轨道长，即若 $Q\cong C_{q^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{q^{\alpha_s}}$，则对任意 $k=1,\cdots,s$，均存在 $n_k\in P$，使得 $|C_Q(n_k)|=q^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}$，其中 $i_1,\cdots,i_s$ 是 $1,\cdots,s$ 的重排，$k=1,\cdots,s$.

关 键 词： 有限群；亚交换群；轨道长

中图分类号：O152.1 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000-5471(2022)11-0027-04

A Special Class of Meta-Abelian Groups

DENG Yuqi, LYU Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing, 400715, China

Abstract: Let finite group $G=P\rtimes Q$, where P is an elementary abelian p-group and Q is an abelian q-group. Suppose Q acts faithfully and coprimely on P, then there exists arbitrary orbit sizes that equal to the order of factors of Q, i.e, if $Q\cong C_{q^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{q^{\alpha_s}}$, then there exists some $n_k\in P$ such that $|C_Q(n_k)|=q^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}$ where $i_1,\cdots,i_s$ is the rearrange of $1,\cdots,s$, and $k=1,\cdots,s$.

Key words: finite group; meta-abelian group; orbit size

本文所提及的群皆为有限群，符号都是标准的，可参见文献[1-2]. 在有限群理论中，常利用图和群的作用去研究群的性质和结构[3-4]. 其中群在群上的作用具有基本的重要性，许多群论专家都从事过相关研究，并得到了大量关于群的可解性[5-6]、幂零性[7-8]、Fitting 高[9-10] 以及轨道长[11-12] 的研究成果. 关于轨道长的相关研究中有大量研究是关于大轨道的，即群 G 作用在群 H 上，存在 $x\in H$，使得 $|C_G(x)|\leqslant|G|^{\frac{1}{2}}$. 文献[13]证明了：$p$-群 G 忠实互素地作用在群 H 上，则 G 在 H 上有一个大轨道. 文献[14]改进了这一结果，证明了：若 G 是幂零群，则 G 在 H 上有一个大轨道；并且提出问题：若 G 在 H 上的作用忠实互素，是否总有大轨道存在？诸多学者在此基础上做了相关工作，直到近年，文献[15]证明了这一猜想的正确性. 在大轨道

① 收稿日期：2022-05-16
基金项目：国家自然科学基金项目(11971391,12071376).
作者简介：邓雨琪，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：吕恒，教授.

研究的基础上，文献[16]证明了：交换群 A 忠实互素地作用在可解群 G 上，若轨道长都小于某整数 b，则 $|A|\leqslant b^8$. 由此我们可以看到轨道长与群的阶有密切联系. 那么在一些有大轨道的特殊情况下，确定出其他部分轨道长度，以及研究这些轨道长与群的阶之间有何联系也是有意义的课题. 例如由置换同构定理，可以知道这类群的一些不可约特征标的维数情况. 本文主要研究了有限交换 q -群忠实作用在初等交换 p -群时，其可能存在的轨道长度.

引理 1[2] 设 π' -群 H 作用在交换 π -群 G 上，A 是 G 的 H -不变子群，并且是 G 的直因子，即存在 $B\leqslant G$ 使得 $G=A\times B$，则必可找到 G 的某个 H -不变子群 K 使得 $G=A\times K$.

引理 2[2] 设群 G 是 Frobenius 群，H 是它的 F -补，则 H 的任一 Sylow 子群或循环，或为广义四元数群.

定理 1 令有限群 $G=P\rtimes Q$，其中 P 是初等交换 p -群，Q 是交换 q -群，设 $Q\cong C_{q^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{q^{\alpha_s}}$，若 Q 忠实互素地作用在 P 上，则对任意 $k=1,\cdots,s$，均存在 $n_k\in P$，使得 $|C_Q(n_k)|=q^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}$，其中 $i_1,\cdots,i_s$ 是 $1,\cdots,s$ 的重排.

证 当 $s=1$ 时，结论显然成立，现在假定 $s\geqslant 2$.

设 $M\trianglelefteq P$ 是满足 $C_Q(M)=1$ 的极小阶 Q -不变子群. 注意到 M 最大可取到 P. 由

$$Q\cong C_{q^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{q^{\alpha_s}}$$

则存在 $\langle a_1\rangle\leqslant Q$，$o(a_1)=q^{\alpha_1}$，使得 $\langle a_1\rangle$ 在 Q 中有补，故可设 $Q=\langle a_1\rangle\times Q_0$，其中 Q_0 是 $\langle a_1\rangle$ 在 Q 中的补. 设 $M_1\leqslant M$ 是满足 $C_{\langle a_1\rangle}(M_1)=1$ 的极小 Q -不变子群.

下面证明 $\bar{Q}=Q/C_Q(M_1)$ 循环.

考虑 $\bar{Q}$ 作用在 M_1 上，则该作用忠实互素，并且 M_1 是极小 $\bar{Q}$ -不变子群. 否则，由引理 1，$M_1=K_1\times K_2$，其中 K_i 是 Q -不变子群($i=1,2$). 再由 M_1 的极小性可得

$$C_{\langle a_1\rangle}(K_i)\neq 1\qquad i=1,2$$

因为循环群的 m 阶子群唯一，其中 m 是群阶的因子，故有

$$C_{\langle a_1\rangle}(K_1)\cap C_{\langle a_1\rangle}(K_2)\neq 1$$

即 $C_{\langle a_1\rangle}(M_1)\neq 1$，矛盾. 于是 M_1 是 $M_1\rtimes\bar{Q}$ 的极小正规子群. 并且由 $C_{\bar{Q}}(M_1)=1$ 知 M_1 是 $M_1\rtimes\bar{Q}$ 的唯一极小正规子群.

任取 $\bar{1}\neq\bar{x}\in\bar{Q}$，考虑 $\langle\bar{x}\rangle$ 在交换群 M_1 上的互素作用. 若 $C_{M_1}(\langle\bar{x}\rangle)\neq 1$，则

$$Z(M_1\rtimes\langle\bar{x}\rangle)\neq 1$$

但由 M_1 的唯一极小性知

$$M_1\leqslant Z(M_1\rtimes\langle\bar{x}\rangle)$$

这与 $\bar{1}\neq\bar{x}\in\bar{Q}=Q/C_Q(M_1)$ 矛盾，于是

$$C_{M_1}(\langle\bar{x}\rangle)=Z(M_1\rtimes\langle\bar{x}\rangle)=1\qquad\forall\bar{x}\in\bar{Q},\ \bar{x}\neq 1$$

因此交换群 $\bar{Q}$ 作用在 M_1 是 Frobenius 作用，故由引理 2 知，$\bar{Q}$ 为循环群.

由于

$$\bar{a}_1=a_1C_Q(M_1)\in\bar{Q}$$

故 $Q=\langle a_1, C_Q(M_1)\rangle$. 又由

$$\langle a_1\rangle\cap\langle C_Q(M_1)\rangle=1$$

则可得

$$Q=\langle a_1\rangle\times C_Q(M_1)$$

记 $Q_1=C_Q(M_1)$. 若 $Q\neq\langle a_1\rangle\times Q_1$，由 $Q=\langle a_1\rangle\times Q_0$ 可知 Q/Q_1 不是循环群. 而 Q/Q_1 忠实不可约地作用在 M_1 上，类似前面的讨论可得 Q/Q_1 是循环群，矛盾. 故 $Q=\langle a_1\rangle\times Q_1$.

设 $T_1\leqslant M$ 使得

$$M=M_1\times T_1 \qquad T_1^Q=T_1$$

于是 $T_1\neq 1$. 否则，我们有 $C_Q(M)=C_Q(M_1)\neq 1$，矛盾. 又由 $C_Q(M)=1$ 可得 $C_{Q_1}(T_1)=1$. 此外，T_1 是满足 $C_{Q_1}(T_1)=1$ 的极小 Q-不变子群. 否则，设 $T_2<T_1$ 使得 $C_{Q_1}(T_2)=1$. 考虑群 $M_1\times T_2$. 任取 $x\in C_Q(M_1\times T_2)$，设 $x=x_1x_2$，其中 $x_1\in\langle a_1\rangle$，$x_2\in Q_1$，任取 $y\in M_1$，则有 $y^x=y^{x_1}=y$. 由 $C_{\langle a_1\rangle}(M_1)=1$ 知 $x_1=1$，于是 $x=x_2$. 任取 $z\in T_2$，则有 $z^{x_2}=z$. 于是$x_2\in C_{Q_1}(T_2)=1$，因此 $C_Q(M_1\times T_2)=1$，与 M 是满足 $C_Q(M)=1$ 的极小阶 Q-不变子群矛盾.

由归纳法，则有

$$Q=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$$

其中

$$o(a_i)=q^{\alpha_i} \qquad i=1,\cdots,s$$

$$M=M_1\times M_2\times\cdots\times M_s$$

M_i 是满足 $C_{\langle a_i\rangle}(M_i)=1$ 的极小 Q-不变子群，$i=1,\cdots,s$，并且有

$$C_Q(M_1)=\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$$

$$C_Q(M_1)\cap C_Q(M_2)=\langle a_3\rangle\times\cdots\times\langle a_s\rangle$$

$$\vdots$$

$$C_Q(M_1)\cap C_Q(M_2)\cap\cdots\cap C_Q(M_{s-1})=\langle a_s\rangle$$

最后将证明

$$M\rtimes Q=(M_s\rtimes\langle a_s\rangle)\times(M_{s-1}\rtimes\langle a_{s-1}\rangle)\times\cdots\times(M_1\rtimes\langle a_1\rangle) \tag{1}$$

下面对 s 进行归纳. 设对任意 $1\leqslant t\leqslant s-1$ 都有(1) 式这样的分解，下证当 $t=s$ 时，也有该分解. 考虑 $Q/C_Q(M_s)$，与证明 $\bar{Q}$ 循环同理，可得 $Q/C_Q(M_s)$ 是循环群. 因为 $a_sC_Q(M_s)\in Q/C_Q(M_s)$，类似地可得 $Q=\langle a_s\rangle\times C_Q(M_s)$. 记

$$N_{s-1}=M_1\times M_2\times\cdots\times M_{s-1}$$

则 $M=M_s\times N_{s-1}$. 因为

$$C_Q(M_1)\cap C_Q(M_2)\cap\cdots\cap C_Q(M_{s-1})=\langle a_s\rangle$$

于是 $C_Q(N_{s-1})=\langle a_s\rangle$. 记 $Q_s=C_Q(M_s)$，则

$$M\rtimes Q=(M_s\rtimes\langle a_s\rangle)\times(N_{s-1}\rtimes Q_s)$$

由归纳法有

$$N_{s-1}\rtimes Q_s=(M_{s-1}\rtimes\langle a_{s-1}\rangle)\times(M_{s-2}\rtimes\langle a_{s-2}\rangle)\times\cdots\times(M_1\rtimes\langle a_1\rangle)$$

于是

$$M\rtimes Q=(M_s\rtimes\langle a_s\rangle)\times(M_{s-1}\rtimes\langle a_{s-1}\rangle)\times\cdots\times(M_1\rtimes\langle a_1\rangle)$$

取 $n_k=x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_s}$，$1\neq x_{i_j}\in M_{i_j}$，则 $|C_Q(n_k)|=q^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}$，其中 $i_1,\cdots,i_s$ 是 $1,\cdots,s$ 的重排.

设 $\mathrm{Irr}(G)$ 是有限群 G 的所有不可约特征标构成的集合. 由文献[1] 的定理 13.24，可得下面推论：

推论 1 令有限群 $G=P\rtimes Q$，其中 P 是初等交换 p-群，Q 是交换 q-群，设 $Q\cong C_{q^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{q^{\alpha_s}}$，若 Q 忠实互素地作用在 P 上，则对任意 $k=1,\cdots,s$，均存在 $n_k\in P$，使得 $q^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}\in\mathrm{cd}(G)$，其中 $i_1,\cdots,i_s$ 是 $1,\cdots,s$ 的重排，$\mathrm{cd}(G)=\{\chi(1):\chi\in\mathrm{Irr}(G)\}$.

参考文献:

[1] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York-London: Academic Press, 1976.

[2] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京: 科学出版社, 2014: 265-294.

[3] 张良才, 施武杰, 王玲丽, 等. 李型单群 $U_3(q)$的非交换图刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(8): 8-12.

[4] 王玲丽, 施武杰, 张良才, 等. 用非交换图刻画某些单群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(6): 159-160.

[5] 张广祥. 幂零群无不动点地作用于有限群 [J]. 西南师范学院学报(自然科学版), 1984, 9(1): 41-44.

[6] ROWLEY P. Finite Groups Admitting a Fixed-Point-Free Automorphism Group [J]. Journal of Algebra, 1995, 174(2): 724-727.

[7] 钟胜. 关于带作用群的有限群的幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1995, 20(5): 488-492.

[8] SCIMEMI B. Finite Groups Admitting a Fixed-Point-Free Automorphism [J]. Journal of Algebra, 1968, 10(2): 125-133.

[9] ERCAN G, GÜLOĞLU I S, JABARA E. Good Action on a Finite Group [J]. Journal of Algebra, 2020, 560: 486-501.

[10] THOMPSON J G. Automorphisms of Solvable Groups [J]. Journal of Algebra, 1964, 1(3): 259-267.

[11] QIAN G H, YANG Y. Large Orbit Sizes in Finite Group Actions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2021, 225(1): 106458.

[12] DOLFI S. Large Orbits in Coprime Actions of Solvable Groups [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2008, 360(1): 135-152.

[13] PASSMAN D S. Groups with Normal, Solvable Hallp′-Subgroup [J].Transactions of the American Mathematical Society, 1966, 123(1): 99-111.

[14] ISAACS I M. Large Orbits in Actions of Nilpotent Groups [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1999, 127(1): 45-50.

[15] 石立叶, 王少英, 仝延增, 等. 可解群的大轨道 [J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(8): 311-315.

[16] YANG Y. On Nilpotent Group Actions on the Characters of Solvable Groups [J]. Algebras and Representation Theory, 2020, 23(1): 1-6.

责任编辑 廖坤