DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.005

一类带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题的多重正解①

胡芳芳[1,2], 刘元彬[3], 张永[1,2]

1. 伊犁师范大学 数学与统计学院,新疆 伊宁 835000;2. 伊犁师范大学 应用数学研究所,新疆 伊宁 835000;
3. 新疆工程学院 数理学院,新疆 昌吉 830091

摘要: 研究了一类带有 p-Laplacian 算子的 Riemann-Liouville 分数阶微分方程边值问题正解的存在性. 在适当的边值条件下,首先运用积分变换和拉普拉斯变换将原来的边值问题转化为与其等价的积分方程,其次利用锥压缩、锥拉伸不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理分别证明边值问题一个及多个正解的存在性,最后通过算例验证主要结论的有效性,推广和改进了相关结论.

关 键 词: p-Laplacian 算子;分数阶微分方程;不动点定理;正解

中图分类号:O175.14 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2022)11-0031-10

Multiple Positive Solutions of Boundary Value Problems for a Class of Fractional Differential Equations with p-Laplacian Operators

HU Fangfang[1,2], LIU Yuanbin[3], ZHANG Yong[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;
2. Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;
3. College of Mathematics and Physics, Xinjiang Institute of Technology, Changji Xinjiang 830091, China

Abstract: The existence of positive solutions for a class of Riemann-Liouville boundary value problems for fractional differential equations with p-Laplacian operators has been studied. Under the appropriate boundary value conditions, the original boundary value problems are transformed into their equivalent integral equations by means of integral transform and Laplace transform. Secondly, the cone-compression cone-stretch fixed point theorem and Leggett-Williams fixed point theorem are used to prove the existence of one or more positive solutions to the boundary value problem. Finally, the validity of the main conclusions is verified by a numerical example, and the relevant conclusions are extended and improved.

Key words: p-Laplacian operator; fractional differential equation; fixed point theorem; positive solution

---

① 收稿日期:2022-03-24
基金项目:伊犁师范大学校级项目(2021YSYB075).
作者简介:胡芳芳,讲师,主要从事微分方程理论与应用的研究.
通信作者:张永,讲师.

带 p-Laplacian算子的微分方程主要来源于非牛顿流体理论和多孔介质气体的湍流理论.学者从多孔介质方程[1]中抽象出 p-Laplacian 方程，随后此类方程被广泛地应用到诸多领域，且 p-Laplacian 算子在许多物理工程的实际应用中可以更加具体地解释一些复杂的物理现象，所以，越来越多的学者研究带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程解的存在性[2-6].

随着科学技术的进步和学者的深入研究，分数阶微分方程模型引起了数学学者们的广泛关注，在过去的几十年里，分数阶微分方程的成果丰硕[7-10]，如：不同边值条件下的正解性，其主要研究方法包括锥上不动点定理、上下解方法、单调迭代方法等[11-13].

文献[14]利用 Banach 压缩映射原理和 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理得到了以下具有 p-Laplacian 算子的边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t)))'+f(u(t))=0 & 0<t<1\\ u(0)=D_{0+}^{\alpha}u(0)=0\\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(0)={}^{c}D_{0+}^{\beta}u(1)=0\end{cases}\tag{1}$$

正解的存在唯一性定理，其中 $0<\beta\leqslant 1$，$2<\alpha\leqslant 2+\beta$，$D_{0+}^{\alpha}$ 和 ${}^{c}D_{0+}^{\beta}$ 分别为 α 阶的 Riemann-Liouville 型分数阶导数和 β 阶的 Caputo 分数阶微分，$p>1$，$f:[a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为连续函数.

文献[15]利用 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理和上下解方法得到了具有 p-laplacian 算子的 Caputo 分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t)))=f(t,u(t))=0 & 0<t<1\\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0\\ D_{0+}^{\alpha}u(0)=D_{0+}^{\alpha}u(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

的正解存在性的一些新结果.其中

$$2<\alpha\leqslant 3\qquad \varphi_p(s)=|s|^{p-2}s\qquad p>1$$

$$\varphi_p^{-1}=\varphi_q\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

D_{0+}^{β}，D_{0+}^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数.

文献[16]运用单调迭代法得到了分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}D^{\gamma}(\varphi_p(D^{\alpha}u(t)))+f(t,u(t))=0 & 0<t<1\\ u(0)=D^{\alpha}u(0)=0\\ D^{\alpha}u(1)=bD^{\alpha}u(\eta)\\ D^{\beta}u(1)=aD^{\beta}u(\xi)\end{cases}\tag{3}$$

的正解的存在性结果.其中

$$\alpha<0\qquad \gamma\leqslant 2\qquad \beta>0\qquad 1+\beta\leqslant\alpha$$

$$0<\xi,\eta<1\qquad \varphi_p(s)=|s|^{p-2}s\qquad p>1$$

D^{α}，D^{β} 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数.

基于上述研究，本文利用 p-Laplacian 算子考虑分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}{}_{0}^{R}D_{t}^{\beta}(\varphi_p({}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}u(t)))=f(t,u(t)) & t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=0\\ ({}_{0}^{R}D_{t}^{\beta}u(t))_{t=1}=0\\ (\varphi_p({}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}u(0)))'=\varphi_p({}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}u(1))=0\end{cases}\tag{4}$$

正解的存在性.其中 $1<\beta\leqslant 2$，$2<\alpha\leqslant 3$，${}_{0}^{R}D_{t}^{\beta}$，${}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}$ 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数. $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，$\varphi_p^{-1}=\varphi_q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f:[0,1]\times[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ 是连续函数.通过运用

Leggett-Williams 不动点定理得到方程(4) 至少存在 3 个正解的结果. 与文献[16] 所研究的问题相比，本文所研究的边值问题更具一般性.

1　预备知识

定义 1[17]　连续函数 $y:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分定义为

$$ {}_0I_t^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s $$

其中等式右端在$[0,+\infty)$内有定义.

定义 2[18]　连续函数 $y:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 微分定义为

$$ {}_0^RD_t^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(s)\mathrm{d}s $$

其中 n 是不小于 α 的最小整数.

引理 1[18]　设 $u(t)\in C[0,1]\cap L^1[0,1]$，且 $\alpha>0$，则

$$ {}_0I_t^{\alpha}\,{}_0^RD_t^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}\qquad c_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n $$

其中 n 是不小于 α 的最小整数.

引理 2[18]　设 $u(t)\in L^1(0,1)$，且 $\alpha>\beta>0$，则

$$ {}_0I_t^{\alpha}\,{}_0I_t^{\beta}u(t)={}_0I_t^{\alpha+\beta}u(t)\qquad {}_0^RD_t^{\beta}\,{}_0I_t^{\alpha}u(t)={}_0I_t^{\alpha-\beta}u(t)\qquad {}_0^RD_t^{\beta}\,{}_0I_t^{\beta}u(t)=u(t) $$

其中 n 是不小于 α 的最小整数.

引理 3[18]　设 $\rho>0$，$\mu>0$，则

$$ {}_0^RD_t^{\rho}t^{\mu-1}=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\rho)}t^{\mu-\rho-1} $$

引理 4　设 $y\in[0,1]$，$1<\beta\leqslant2$，$2<\alpha\leqslant3$，则分数阶微分方程边值问题

$$ \begin{cases} {}_0^RD_t^{\alpha}+y(t)=0 & t\in[0,1]\\ u(0)=u'(0)=0\\ ({}_0^RD_t^{\beta}u(t))_{t=1}=0 \end{cases}\tag{5} $$

有唯一解

$$ u(t)=\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s\tag{6} $$

其中

$$ G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-1} & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1\\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1 \end{cases}\tag{7} $$

证　利用引理 1，对方程 ${}_0^RD_t^{\alpha}u(t)+y(t)=0$ 两边求 α 阶积分，可得

$$ {}_0I_t^{\alpha}\,{}_0^RD_t^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_3t^{\alpha-3}=-{}_0I_t^{\alpha}y(t)= $$

$$ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s $$

由边值条件

$$ u(0)=u'(0)=0 $$

可得

$$ c_2=c_3=0 $$

$$ u(t)=-c_1t^{\alpha-1}-{}_0I_t^{\alpha}y(t)= $$

$$-c_1 t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) \mathrm{d}s \tag{8}$$

因为 $\alpha > \beta$，对(8)式两边进行 β 阶微分，可得

$$\begin{aligned}
{}_0^R D_t^\beta u(t) &= -{}_0^R D_t^\beta (c_1 t^{\alpha-1}) - {}_0^R D_t^\beta ({}_0 I_t^\alpha y(t)) = \\
&-c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} - {}_0 I_t^{\alpha-\beta} y(t) = \\
&-c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} y(s) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

由边值条件 $({}_0^R D_t^\beta u(t))_{t=1} = 0$，可得

$$c_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} y(s) \mathrm{d}s$$

即

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\beta-1} y(s) \mathrm{d}s - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) \mathrm{d}s = \\
&\int_0^t \left(\frac{t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) y(s) \mathrm{d}s + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) \mathrm{d}s = \\
&\int_0^1 G(t, s) y(s) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

其中

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-1} & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\beta-1} & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

引理 5 设 $g \in [0, 1]$，$1 < \beta \leqslant 2$，$2 < \alpha \leqslant 3$，则分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^\beta (\varphi_p ({}_0^R D_t^\alpha u(t))) = g(t) & t \in [0, 1] \\ (\varphi_p ({}_0^R D_t^\alpha u(0)))' = \varphi_p ({}_0^R D_t^\alpha u(1)) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

有唯一解

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \tag{10}$$

其中

$$H(s, \tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} (s - s\tau)^{\beta-1} - (s-\tau)^{\beta-1} & 0 \leqslant \tau \leqslant \mathrm{s} \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} (s - s\tau)^{\beta-1} & 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant 1 \end{cases} \tag{11}$$

证 用引理1，对方程 ${}_0^R D_\mathrm{t}^\beta (\varphi_p ({}_0^R D_\mathrm{t}^\alpha u(t))) = g(t)$ 两边求 β 阶积分，可得

$$\begin{aligned}
{}_0 I_t^\beta {}_0^R D_\mathrm{t}^\beta (\varphi_p ({}_0^R D_\mathrm{t}^\alpha u(t))) &= \varphi_p ({}_0^R D_\mathrm{t}^\alpha u(t)) + d_1 t^{\beta-1} + d_2 t^{\beta-2} = {}_0 I_t^\beta g(t) = \\
&\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

由边值条件

$$(\varphi_p ({}_0^R D_t^\alpha u(0)))' = \varphi_p ({}_0^R D_t^\alpha u(1)) = 0$$

可得

$$d_1 = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$d_2 = 0$$

即

$$
\begin{aligned}
\varphi_p({}_0^R D_t^\alpha u(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&- \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau)\mathrm{d}\tau = \\
&- \left[\int_0^t \left(\frac{t^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right) g(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_t^1 \frac{t^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \\
&- \int_0^1 H(t,\tau) g(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

即

$$
{}_0^R D_t^\alpha u(t) + \varphi_q\left(\int_0^1 H(t,\tau) g(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = 0
$$

由引理 4 可知

$$
u(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau) g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s
$$

引理 6　函数 $G(t,s)$，$H(t,s)$ 满足如下性质：

(i) 对任意的 $t,s \in [0,1]$，$G(t,s) \geqslant 0$，$H(t,s) \geqslant 0$；

(ii) 对任意的 $t,s \in [0,1]$，$\dfrac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$；

(iii) 对任意的 $t,s \in [0,1]$，$\dfrac{(1-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \dfrac{(t-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \leqslant H(t,s) \leqslant \dfrac{(1-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$.

证　(i) 由函数 $G(t,s)$，$H(t,s)$ 的表达式可知(i) 显然成立.

(ii) 若 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$，则一定有

$$
0 \leqslant t-s \leqslant t-ts = t(1-s)
$$

因此

$$
(t-s)^{\alpha-1} \leqslant t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}
$$

当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
G(t,s) = \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \geqslant \\
\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1} - t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}
$$

当 $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
G(t,s) = \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \geqslant \\
\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}
$$

(iii) 若 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$，则一定有

$$
0 \leqslant t-s \leqslant t-ts = t(1-s)
$$

因此

$$
(t-s)^{\beta-1} \leqslant t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}
$$

当$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ 时，有

$$H(t,s)=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\geqslant \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时,有

$$H(t,s)=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\geqslant \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}-\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

即

$$\frac{(1-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}-\frac{(t-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\leqslant H(t,s)\leqslant\frac{(1-s)^{\beta-1}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

引理7[19] 设 E 是一个Banach空间,P 是 E 中的一个锥,Ω_1,Ω_2 是 E 中的两个有界开集,并且 $\Omega_1\subset\Omega_2$,假设 $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\longrightarrow P$ 是全连续算子,若

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|(x\in P\cap\partial\Omega_1)$,$\|Ax\|\geqslant\|x\|(x\in P\cap\partial\Omega_2)$;

(ii) $\|Ax\|\geqslant\|x\|(x\in P\cap\partial\Omega_1)$,$\|Ax\|\leqslant\|x\|(x\in P\cap\partial\Omega_2)$.

中有一个成立,那么 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点.

引理8[20] 设 P 为实Banach空间 E 中的一个锥,

$$P_c=\{x\in P:\|x\|<c\}$$

θ 是 P 上的一个非负连续凹泛函,使得当 $x\in\overline{P}_c$ 时,$\theta(x)\leqslant\|x\|$,并且

$$P(\theta,b,d)=\{x\in P:\theta(x)\geqslant b,\ \|x\|\leqslant d\}$$

假设 $A:\overline{P}_c\longrightarrow\overline{P}_c$ 是全连续的,且存在常数满足 $0<a<b<d\leqslant c$,使得

(i) $\{x\in P(\theta,b,d):\theta(x)>b\}\neq\varnothing$,且对 $x\in P(\theta,b,d)$ 有 $\theta(Ax)>b$;

(ii) 当 $\|x\|\leqslant a$ 时,$\|Ax\|\leqslant a$;

(iii) 当 $x\in P(\theta,b,c)$ 且 $\|Ax\|>d$ 时,$\theta(Ax)>b$.

那么 A 至少有3个不动点 x_1,x_2,x_3,满足

$$\|x_1\|<a\qquad b<\theta(x_2)\qquad \|x_3\|>a\qquad \theta(x_3)<b$$

2 主要结论

记 $E=C[0,1]$,在 E 中定义范数

$$\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$$

则 E 为Banach空间. 定义锥 $P\subset E$ 为

$$P=\{u\in E:u(t)\geqslant 0\}$$

定义锥 P 上的非负连续泛函 θ 为

$$\theta(u)=\min_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$$

对于给定的连续函数 $f\in[0,1]\times[0,+\infty)$,对任意的 $u\in P$,定义积分算子 $T:P\longrightarrow E$ 为

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

定理1 $T:P\longrightarrow P$ 是全连续算子.

证 设 Ω 是 P 的任意有界集,即存在一个常数 $\gamma>0$,使得 $\forall u\in\Omega$,都满足 $\|u\|\leqslant\gamma$. 由于 $f(t,u(t))$ 是连续的,则对于 $t\in[0,1]$,存在 $m>0$,使得

$$0\leqslant f(t,u(t))\leqslant m$$

令

$$L_1=\frac{m}{\Gamma(\beta+1)}\qquad L_2=\frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}$$

$$\begin{aligned}|(Tu)(t)|=&\left|\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1\frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}m\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&\varphi_q\left(\frac{m}{\Gamma(\beta+1)}\right)\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)}\varphi_q(L_1)\leqslant\\&L_2\varphi_q(L_1)\end{aligned}$$

所有 $T(\Omega)$ 是一致有界的.

由于 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是一致连续的，因此 $G(t,s)$ 是一致连续的. 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2$，$|t_2-t_1|<\delta$ 时，有

$$|G(t_2,s)-G(t_1,s)|<\frac{\varepsilon}{\varphi_q(L_1)}$$

于是

$$\begin{aligned}|(Tu)(t_2)-(Tu)(t_1)|=&\left|\int_0^1[G(t_2,s)-G(t_1,s)]\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&\varphi_q(L_1)\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\mathrm{d}s<\varepsilon\end{aligned}$$

这就表明 $T(\Omega)$ 是等度连续的. 因此，由 Arzela-Ascoli 定理可证明算子 $T:P\longrightarrow P$ 是全连续的. 为方便起见，我们引入符号

$$M^{-1}=\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

$$N^{-1}=\int_0^1\left(\frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}-(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

定理 2　假设 $f(t,u(t))$ 为 $C[0,1]\times[0,+\infty)$ 上的连续函数，其中

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$$

若存在两个正常数 $r_2>r_1>0$，使得

(i) 当 $(t,u(t))\in[0,1]\times[0,r_1]$ 时，$f(t,u(t))\geqslant\varphi_p(Nr_1)$；

(ii) 当 $(t,u(t))\in[0,1]\times[0,r_2]$ 时，$f(t,u(t))\leqslant\varphi_p(Mr_2)$.

则方程(4) 至少有一个正解 u，使得 $r_1<\|u\|<r_2$.

证　令

$$\Omega_1=\{u\in P:\|u\|<r_1\}$$

当 $u\in\partial\Omega_1$ 时，有

$$0\leqslant u(t)\leqslant r_1\qquad t\in[0,1]$$

由(i) 和引理 6 得

$$\begin{aligned}(Tu)(t)=&\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant\\&r_1N\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant\end{aligned}$$

$$r_1 N \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s = r_1$$

从而

$$\| Tu \| \geqslant \| u \| \qquad u \in \partial \Omega_1$$

令

$$\Omega_2 = \{ u \in P: \| u \| < r_2 \}$$

当 $u \in \partial \Omega_2$ 时, 有

$$0 \leqslant u(t) \leqslant r_2 \qquad t \in [0, 1]$$

可从(ii) 和引理 6 得

$$\begin{aligned} \| (Tu)(t) \| = & \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \leqslant \\ & Mr_2 \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \leqslant \\ & Mr_2 \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s = r_2 \end{aligned}$$

从而 $\| Tu \| \leqslant \| u \|$, $u \in \partial \Omega_2$.

总之, 通过引理 7 可知, 方程(4) 至少有一个正解 u, 且满足 $r_1 < \| u \| < r_2$.

定理 3 假设 $f(t, u(t))$ 为 $C[0, 1] \times [0, +\infty)$ 上的连续函数, 若存在满足 $0 < a < b < c$ 的正常数, 使得

(i) 当 $(t, u(t)) \in [0, 1] \times [0, a]$ 时, $f(t, u(t)) \leqslant \varphi_p(Ma)$;

(ii) 当 $(t, u(t)) \in [0, 1] \times [b, c]$ 时, $f(t, u(t)) \geqslant \varphi_p(Nb)$;

(iii) 当 $(t, u(t)) \in [0, 1] \times [0, c]$ 时, $f(t, u(t)) \leqslant \varphi_p(Mc)$.

则方程(4) 至少有 3 个正解 u_1, u_2, u_3, 且满足

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | u_1(t) | < a \qquad b < \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} | u_2(t) | \qquad a < \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | u_3(t) | \qquad \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} | u_3(t) | < b$$

证 如果 $u \in \overline{P}_c$, 则 $T: \overline{P}_c \longrightarrow \overline{P}_c$ 是一个全连续算子. 假设 $u \in \overline{P}_c$, 则 $\| u \| \leqslant c$, 由引理 6 和(iii) 可得

$$\begin{aligned} \| Tu(t) \| = & \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \right| \leqslant \\ & Mc \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \leqslant \\ & Mc \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s = c \end{aligned}$$

则对任意的 $u \in \overline{P}_c$, 有 $\| Tu \| \leqslant c$, 则 $T: \overline{P}_c \longrightarrow \overline{P}_c$. 同样地, 如果 $u \in \overline{P}_a$, 则由(i) 得到 $\| Tu \| \leqslant a$, 因此满足引理 8 中的条件(ii).

下面证明引理 8 的条件(i) 也是满足的. 很明显,

$$\{ u \in P(\theta, b, d): \theta(u) > b \} \neq \varnothing$$

若 $u \in P(\theta, b, d)$, 对任意的 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有 $b \leqslant u(t) \leqslant d$, 通过(ii) 可得

$$\begin{aligned} \theta(Tu) = & \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} | (Tu)(t) | = \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \right| \geqslant \\ & Nb \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \geqslant \\ & Nb \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1} - (1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s = b \end{aligned}$$

即对任意的 $u \in P(\theta, b, d)$, $\theta(Tu) > b$. 因此满足引理 8 中的条件(i).

最后，我们证明引理 8 的条件(iii) 也是满足的. 对任意的 $u \in P(\theta, b, c)$，都有 $\theta(Tu) > b$. 因此，引理 8 的条件(iii) 也成立.

综上所述，引理 8 的所有条件都满足. 根据引理 8，可以得出方程(4) 存在 3 个正解 u_1, u_2 和 u_3，满足

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_1(t)| < a \qquad b < \min_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_2(t)| \qquad a < \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_3(t)| \qquad \min_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_3(t)| < b$$

3　例子

例 1　考虑边值问题

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^{\frac{3}{2}} \varphi_2({}_0^R D_t^{\frac{5}{2}} u(t)) = f(t, u(t)) & t \in [0, 1] \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ ({}_0^R D_t^{\frac{3}{2}} u(t))_{t=1} = 0 \\ (\varphi_2({}_0^R D_t^{\frac{5}{2}} u(0)))' = \varphi_2({}_0^R D_t^{\frac{5}{2}} u(1)) = 0 \end{cases}$$

其中

$$f(t, u(t)) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{8} + 3u & u \geqslant 1 \\ \dfrac{t^2}{8} + u & u < 1 \end{cases}$$

经过计算得

$$M \approx 1.766 \qquad N \approx 2.949$$

选取 $a = \dfrac{1}{2}$，$b = 2$，$c = 3$，有

$$f(t, u) = \frac{t^2}{8} + u \leqslant 0.625 < Ma \approx 0.883 \qquad (t, u) \in [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(t, u) = \frac{t^2}{8} + 3u \geqslant 6 > Nb \approx 5.895 \qquad (t, u) \in [0, 1] \times [2, 3]$$

$$f(t, u) = \frac{t^2}{8} + 3u \leqslant 3.125 < Mc \approx 5.298 \qquad (t, u) \in [0, 1] \times [0, 3]$$

应用定理 3，例 1 至少有 3 个正解 u_1, u_2, u_3，且满足

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_1(t)| < \frac{1}{2} \qquad 2 < \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{3}{4}}|u_2(t)| \qquad \frac{1}{2} < \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_3(t)| \qquad \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{3}{4}}|u_3(t)| < 2$$

参考文献：

[1]　BOBISUD L E. Steady-State Turbulent Flow with Reaction [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics，1991，21(3)：993-1007.

[2]　TUDORACHE A，LUCA R. Positive Solutions for a System of Riemann-Liouville Fractional Boundary Value Problems with p-Laplacian Operators [J]. Advances in Difference Equations，2020，2020(292)：1-30.

[3]　HE Y，BI B. Existence and Iteration of Positive Solution for Fractional Integral Boundary Value Problems with p-Laplacian Operator [J]. Advances in Difference Equations，2019，2019(415)：1-15.

[4]　李继梅，李辉来. 一类具有 p-Laplace 算子的非线性分数阶微分方程解的存在性与多解性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2018，56(6)：1285-1290.

[5]　RAO S N，SINGH M，MEETEI M Z. Multiplicity of Positive Solutions for Hadamard Fractional Differential Equations with p-Laplacian Operator [J]. Boundary Value Problems，2020，2020(43)：1-25.

[6] 廖家锋，李红英，段誉. 一类奇异 p-Laplacian 方程正解的唯一性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(6)：45-49.

[7] 康淑瑰，岳亚卿，郭建敏. 分数阶微分方程奇异系统边值问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(4)：104-108.

[8] 郭彩霞，郭建敏，田海燕，等. 一类分数阶奇异 q-差分方程边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：6-10.

[9] 段佳艳，王文霞，郭晓珍. 一类带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 应用数学进展，2020，9(12)：2301-2307.

[10] 纪宏伟. 一类非线性三阶微分方程边值问题多个解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(5)：51-57.

[11] 蔡蕙泽，韩晓玲. 一类非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2019，56(4)：614-620.

[12] 刘晓娟，魏永芳，白占兵. 带有积分边值条件的分数阶微分方程正解的存在性 [J]. 山东科技大学学报(自然科学版)，2019，38(2)：100-105.

[13] RAHIMKHANI P，ORDOKHANI Y. Approximate Solution of Nonlinear Fractional Integro-Differential Equations Using Fractional Alternative Legendre Functions [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2020，365：112-365.

[14] BAI C. Existence and Uniqueness of Solutions for Fractional Boundary Value Problems with p-Laplacian Operator [J]. Advances in Difference Equations，2018，2018(1)：1-12.

[15] LU H L，HAN Z L，SUN S R，et al. Existence on Positive Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations with p-Laplacian [J]. Advances in Difference Equations，2013，2013：1-12.

[16] TIAN Y S，BAI Z B，SUN S J. Positive Solutions for a Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator [J]. Advances in Difference Equations，2019，2019(349)：1-14.

[17] KILBAS A A，TRUJILLO J J. Differential Equations of Fractional Order：Methods，Results and Problems. II [J]. Applicable Analysis，2002，81(2)：435-493.

[18] LIU Y，XIE D P，YANG D D，et al. Two Generalized Lyapunov-Type Inequalities for a Fractional p-Laplacian Equation with Fractional Boundary Conditions [J]. Journal of Inequalities and Applications，2017，2017(98)：1-16.

[19] LI Y H. Multiple Positive Solutions for Nonlinear Mixed Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator [J]. Advances in Difference Equations，2019，2019(112)：1-12.

[20] LEGGETT R W，WILLIAMS L R. Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces [J]. Indiana University Mathematical Journal，1979，28(4)：673-688.

责任编辑　廖坤