DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.006

半群 $A_k^* T_n$ 的秩和3次方幂等元秩[①]

张心茹，　罗永贵，　刘木村

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：设自然数 $n \geqslant 3$，T_n 和 S_n 是有限链 X_n 上的全变换半群和对称群. 对任意满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的正整数 k，令 A_k^* 表示 X_n 上的 k-局部交错群，再令 $A_k^* T_n = A_k^* \cup (T_n \setminus S_n)$. 易证 $A_k^* T_n$ 是全变换半群 T_n 的子半群. 通过分析半群 $A_k^* T_n$ 的格林关系和3次方幂等元，获得了半群 $A_k^* T_n$ 的极小生成集和3次方幂等元极小生成集. 进一步，确定了半群 $A_k^* T_n$ 的秩和3次方幂等元秩.

关　键　词：变换半群；k-局部交错群；3次方幂等元；极小生成集；秩

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)11-0041-09

On Rank and Cubic Idempotent Rank of Semigroup $A_k^* T_n$

ZHANG Xinru,　LUO Yonggui,　LIU Mucun

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: Let T_n and S_n be full transformation semigroup and symmetry group on a finite chain X_n if natural number $n \geqslant 3$, respectively. Let A_k^* be the k-locally alternating group on X_n and let $A_k^* T_n = A_k^* \cup (T_n \setminus S_n)$ if for an arbitrary integer k such that $1 \leqslant k \leqslant n$. It is easy to prove that $A_k^* T_n$ is subsemigroup of full transformation semigroup T_n. By analyzing the Green's relation and the cubic idempotent of the semigroup $A_k^* T_n$, the minimal generating set and the minimal generating set of cubic idempotent be obtained, respectively. Further, the rank and the cubic idempotent rank of the semigroup $A_k^* T_n$ be definite, respectively.

Key words: transformation semigroup; k-locally alternating group; cubic idempotent; minimal generating set; rank

设 S 是半群，A 是 S 的非空子集且 $a, e \in S$. 若对任意的 $s \in S$，存在 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in A$，使得 $s = a_1 a_2 \cdots a_m$，则 A 是半群 S 的生成集，记 $S = \langle A \rangle$. 若对半群 S 的任意生成集 B 都有 $|A| \leqslant |B|$，则 A 为半群 S 的极小生成集. 通常半群 S 的秩定义为

$$\operatorname{rank} S = \min\{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

其中 $|A|$ 为 A 的基数.

若 $e^2 = e$，则 e 为半群 S 的幂等元，半群 S 中所有幂等元之集记为 $E(S)$. 类似地，A 中所有的幂等元之集记为 $E(A)$.

---

① 收稿日期：2022-04-27

基金项目：贵州师范大学学术基金项目(黔师新苗[2021]B08号).

作者简介：张心茹，硕士研究生，主要从事半群代数理论的研究.

通信作者：罗永贵，副教授.

若$(a^3)^2=a^3$且$a^3\neq a$，则a为半群S的3次方幂等元，所有3次方幂等元之集用$E^3(S)$表示. 类似地，A中所有3次方幂等元之集记为$E^3(A)$.

若$A\subseteq E^3(A)$，且对任意$s\in S$，存在$b_1,b_2,\cdots,b_m\in A$使得$s=b_1b_2\cdots b_t$，则A为半群S的3次方幂等元生成集. 令M是半群S的任意3次方幂等元生成集且$|A|\leqslant|M|$，则A为半群S的3次方幂等元极小生成集. 进而$|A|$为半群S的3次方幂等元秩，记为

$$\operatorname{rank}^3(S)=\min\{|A|:A\subseteq E^3(S),\langle A\rangle=S\}$$

设$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$并赋予自然序，T_n和S_n分别是X_n上的全变换半群和对称群，记$\mathrm{Sing}_n=T_n\setminus S_n$，则$\mathrm{Sing}_n$是$T_n$的子半群且$\mathrm{Sing}_n$为奇异变换半群. 记

$$A_k^*=\{\alpha\in A_n:\forall x\in\{k+1,k+2,\cdots,n\},x\alpha=x\}$$

则A_k^*为X_n上的k-局部交错群，令$A_k^*T_n=A_k^*\cup(T_n\setminus S_n)$，易见$A_k^*T_n$是半群$T_n$的子半群. 当$k$为偶数时，$g_k=(12\cdots(k-1))$；当$k$为奇数时，$g_k=(12\cdots k)$. 则$g_k\in A_k^*$. 设$\alpha\in A_k^*T_n$，用$\mathrm{im}(\alpha)$表示$\alpha$的象集，$\ker(\alpha)$表示$X_n$上的如下等价关系：

$$\ker(\alpha)=\{(x,y)\in[n]\times[n]:x\alpha=y\alpha\}$$

对任意的$t\in\mathrm{im}(\alpha)$，$t\alpha^{-1}$表示t的原象集且$|t\alpha^{-1}|\geqslant1$. 半群$A_k^*T_n$的标准表示为

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_{r-1} & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r\end{pmatrix}$$

为叙述方便，引用Green-等价关系. 在半群$A_k^*T_n$中，L,R,J,H,D有如下刻画：对任意的$\alpha,\beta\in A_k^*T_n$，$(\alpha,\beta)\in L$当且仅当$\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)$；$(\alpha,\beta)\in R$当且仅当$\ker(\alpha)=\ker(\beta)$；$(\alpha,\beta)\in J$当且仅当$|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|$. 易见$D=J$，$H=L\cap R$，$L\subseteq J$，$R\subseteq J$. 记

$$D_r=\{\alpha\in A_k^*T_n:|\mathrm{im}(\alpha)|=r\}\qquad 1\leqslant r\leqslant n$$

显然

$$A_k^*T_n=D_n\cup D_{n-1}\cup\cdots\cup D_1$$

注意$D_n=A_k^*$，且D_{n-1}中有n个L-类和C_n^2个R-类.

用符号$\zeta_j^i=\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}$表示$D_{n-1}$中满足下列条件的幂等元：

$$i\zeta_j^i=j,\ x\zeta_j^i=x\qquad \forall x\in X_n\setminus\{i\}$$

其中$1\leqslant i,j\leqslant n$且$i\neq j$，即

$$\zeta_j^i=\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & \{i,j\} & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n\end{pmatrix}$$

设$n\geqslant3$，$3\leqslant k\leqslant n$，记

$$E_*=\{\zeta_j^i:1\leqslant i,j\leqslant k,i\neq j\}$$

$$E_\Delta=\{\zeta_i^1,\zeta_1^i:1\leqslant i\leqslant k\}$$

$$E_\nabla=\{\zeta_j^i,\zeta_i^j:1\leqslant i\leqslant k,k+1\leqslant j\leqslant n\}$$

$$E_\nabla^*=\{\zeta_1^i,\zeta_i^1:k+1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$E_\Delta^*=\{\zeta_j^i:k+1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j\}$$

$$E_\diamond=\{\zeta_j^i:k+1\leqslant i,j\leqslant n,i\leqslant j\}$$

令$E(D_{n-1})$为D_{n-1}中所有幂等元之集，于是有

$$E(D_{n-1})=E_*\cup E_\nabla\cup E_\Delta^*$$

且E_*,E_∇,E_Δ^*两两相交为空集. 对任意$i,j,q\in X_n$，做如下定义：

$$R_{(i,j)}=\{\alpha\in D_{n-1}:i\alpha=j\alpha\}$$

$$L_q=\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{im}(\alpha)=X_n\setminus\{q\}\}$$

$$H_{(i,j)}^q=R_{(i,j)}\cap L_q$$

注　$H_{(i,j)}^q$是群当且仅当$q\in\{i,j\}$. 为方便起见，凡是整数的加法运算，均是在模k的剩余类环中进

行的. 例如 $\zeta_j^{k+i} = \zeta_j^i$，$\zeta_{k+i}^j = \zeta_i^j$ 等.

对于有限半群秩的研究一直以来都是半群代数理论研究的热点之一，并且已取得许多成果[1-16]. 文献[1] 研究了半群 $TOP_n(k)$ 的格林(星) 关系及富足性. 文献[2] 得到了奇异变换半群 Sing_n 的秩及幂等元秩都为$\dfrac{n(n-1)}{2}$. 文献[3] 证明了半群 AS_n 的秩为 3. 文献[5] 证明了奇异变换半群的理想 $T_{(n,r)}$ 的秩和幂等元秩都为第二类 Stirling 数 $S(n, r)$. 文献[6] 给定了半群 $PD(n, r)$ 的秩及相关秩. 文献[7] 验证了半群 CS_n 的秩为 $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$. 文献[9] 确定了半群 OS_n 的秩为 $C_n^r\left(n \geqslant 4, 1 \leqslant r \leqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$. 文献[10] 确定了半群 CI_n 的秩为 2 或 3. 文献[11] 获得了半群 $H_{(n,m)}^*(r)$ 的秩为 $p_{r-m}(n-m)+2(2 \leqslant m < r \leqslant n-1)$. 文献[15] 中第一章的习题 7 给出了半群 T_n 的秩为 3.

本文在文献[1-16] 的基础上考虑半群 $A_k^* T_n$ 的秩和 3 次方幂等元秩，并证明了如下主要结果：

定理 1　设 $n \geqslant 3$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则半群 $A_k^* T_n = \langle \{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \cup E_\nabla^* \cup E_\diamond \rangle$.

定理 2　设 $n \geqslant 3$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则 $\mathrm{rank}\, A_k^* T_n = 3 + n - k + \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

定理 3　设 $n \geqslant 5$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则半群 $A_k^* T_n = \langle E^3(A_k^* T_n) \rangle = \langle W \cup \{\delta_2^1\} \cup \Pi_\nabla^* \cup \Pi_\diamond \rangle$.

定理 4　设 $n \geqslant 5$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则 $\mathrm{rank}^3(A_k^* T_n) = \left[\dfrac{k}{2}\right] + n - k + \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2} + 1$.

本文未定义的符号及术语参见文献[12-16].

1　半群 $A_k^* T_n$ 的秩

为完成定理 1 和定理 2 的证明，先给出以下若干引理：

引理 1[2]　当 $n \geqslant 3$ 时，$\mathrm{Sing}_n = \langle E(D_{n-1}) \rangle$.

引理 2[3]　设 $k \geqslant 3$，$\{(12k), g_k\}$ 是 A_k^* 的极小生成集，且 $A_k^* = \langle \{(12k), g_k\} \rangle$.

引理 3[4]　A_k^* 是$\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的 k -局部交错群，当 $k \geqslant 3$ 时，A_k^* 可由 $k-2$ 个 3 -轮换(123)，(234)，…，$((k-2)(k-1)k)$ 生成.

引理 4[5]　当 $1 \leqslant r \leqslant n-2$ 时，$D_r \subseteq D_{r+1} \cdot D_{r+1}$.

引理 5　设 $n \geqslant 3$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则 $E_* \subseteq \langle \{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \rangle$.

证　当 k 为奇数时，对任意的 $2 \leqslant d \leqslant \left[\dfrac{k}{2}\right]$，$1 \leqslant j \leqslant k$，有 $\zeta_2^1 \in E_\Delta$. 易证

$$g_k^{1-j}\zeta_2^1 g_k^{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}^{1-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}^{j-1} = \begin{pmatrix} j \\ j+1 \end{pmatrix} = \zeta_{j+1}^j$$

$$(j(j+1)(j+d))g_k^{1-j}\zeta_2^1 g_k^{j-1}(j(j+d)(j+1)) = (j(j+1)(j+d))\begin{pmatrix} j \\ j+1 \end{pmatrix}(j(j+d)(j+1)) = \begin{pmatrix} j+d \\ j \end{pmatrix} = \zeta_j^{j+d}$$

由于$(j(j+1)(j+d))$，$(j(j+d)(j+1)) \in A_k^* = \langle \{g_k, (12k)\} \rangle$，再由 d，j 的取值范围和E_* 的定义可得 $\zeta_2^1 \in E_\Delta$，$\zeta_j^{j+d} \in E_*$，进而有 $\zeta_j^{j+d} \in \langle \{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \rangle$.

当 k 为偶数时，对任意的 $2 \leqslant i \leqslant k-1$，$\zeta_i^1 \in E_\Delta$，$\zeta_1^i \in E_\Delta$，易验证

$$\zeta_k^i = (i1k)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1ik) \qquad \zeta_i^k = (i1k)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}(1ik)$$

由于$(i1k)$，$(1ik) \in A_k^* = \langle \{g_k, (12k)\} \rangle$，$\zeta_k^i$，$\zeta_i^k \in E_*$，又因 ζ_k^1，$\zeta_1^k \in E_\Delta$，则

$$g_k^{-i}\zeta_k^1 g_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k & \cdots & n \end{pmatrix}^{-i} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k & \cdots & n \end{pmatrix}^{i} = \begin{pmatrix} i+1 \\ k \end{pmatrix} = \zeta_k^{i+1}$$

$$g_k^{-i}\zeta_1^k g_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k & \cdots & n \end{pmatrix}^{-i} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k & \cdots & n \end{pmatrix}^{i} = \begin{pmatrix} k \\ i+1 \end{pmatrix} = \zeta_{i+1}^k$$

则 ζ_k^{i+1}，$\zeta_{i+1}^k \in E_*$. 同理可证，对任意的 $2 \leqslant d \leqslant \left[\dfrac{k}{2}\right]$，$1 \leqslant j \leqslant k$，有 $\zeta_2^1 \in E_\Delta$，$\zeta_j^{j+d} \in E_*$，从而有

$\zeta_j^{j+d}\in E_*\subseteq\langle\{g_k,(12k),\zeta_2^1\}\rangle$. 因此 $E_*\subseteq\langle\{g_k,(12k),\zeta_2^1\}\rangle$.

引理 6 设 $n\geqslant 3$, $3\leqslant k\leqslant n$. 当 k 为奇数时, $E_\nabla\subseteq\langle\{g_k\}\cup E_\nabla^*\rangle$; 当 k 为偶数时, $E_\nabla\subseteq\langle\{g_k,(12k)\}\cup E_\nabla^*\rangle$.

证 当 k 为奇数时, 对任意的 $k+1\leqslant s,t\leqslant n$ 且 $s\neq t$, $1\leqslant j\leqslant k$, 有 $\zeta_s^1,\zeta_1^t\in E_\nabla^*$. 易证

$$g_k^{1-j}\zeta_s^1g_k^{j-1}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k+1&\cdots&n\end{pmatrix}^{1-j}\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k+1&\cdots&n\end{pmatrix}^{j-1}=\begin{pmatrix}j+1\\s\end{pmatrix}=\zeta_s^{j+1}$$

$$g_k^{1-j}\zeta_1^tg_k^{j-1}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k+1&\cdots&n\end{pmatrix}^{1-j}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+1&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k+1&\cdots&n\end{pmatrix}^{j-1}=\begin{pmatrix}t\\j+1\end{pmatrix}=\zeta_{j+1}^t$$

由 s,t 的取值范围和 E_∇^* 的定义可得 $\zeta_s^1,\zeta_1^t\in E_\nabla^*$, $\zeta_s^{j+1},\zeta_{j+1}^t\in E_\nabla$. 又由文献[15]的命题 2.3.7 知, 存在 $\alpha_{p,j+1}^t\in R_{(p,\,j+1)}$ 且 $\alpha_{p,j+1}^t\in L_t$, 使得 $\zeta_p^{j+1}=(\alpha_{p,j+1}^t\zeta_s^{j+1})^q$ ($k+1\leqslant p,s,t\leqslant n$ 且 $p\neq t\neq s$). 同理可得 $\zeta_{j+1}^p=(\zeta_{j+1}^s\alpha_{p,j+1}^t)^q$. 进而有 $\zeta_p^{j+1},\zeta_{j+1}^p\in E_\nabla$, 则 $E_\nabla\subseteq\langle\{g_k\}\cup E_\nabla^*\rangle$.

当 k 为偶数时, 对任意 $k+1\leqslant s,t\leqslant n$ 且 $t\neq s$, $1\leqslant j\leqslant k$, 有 $\zeta_s^1,\zeta_1^t\in E_\nabla^*$. 易证

$$g_k^{1-j}\zeta_s^1g_k^{j-1}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k&\cdots&n\end{pmatrix}^{1-j}\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k&\cdots&n\end{pmatrix}^{j-1}=\begin{pmatrix}j+1\\s\end{pmatrix}=\zeta_s^{j+1}$$

$$g_k^{1-j}\zeta_1^tg_k^{j-1}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k&\cdots&n\end{pmatrix}^{1-j}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k&\cdots&n\\2&3&\cdots&1&k&\cdots&n\end{pmatrix}^{j-1}=\begin{pmatrix}t\\j+1\end{pmatrix}=\zeta_{j+1}^t$$

$$\zeta_t^s=(1t2)g_k^{-2}\zeta_1^sg_k^2(12t)=(1t2)\zeta_2^s(12t)$$

$$\zeta_s^t=(1s2)g_k^{-2}\zeta_1^tg_k^2(12s)=(1s2)\zeta_2^t(12s)$$

由 s,t 的取值范围和 E_∇^* 的定义可得 $\zeta_s^1,\zeta_1^t\in E_\nabla^*$, $\zeta_s^{j+1},\zeta_{j+1}^t\in E_\nabla$, 且 $(1t2),(12t),(1s2),(12s)\in A_k^*=\langle\{g_k,(12k)\}\rangle$. 同理可证 $\zeta_p^{j+1},\zeta_{j+1}^p,\zeta_t^s,\zeta_s^t\in E_\nabla$, 从而有 $\zeta_p^{j+1},\zeta_{j+1}^p,\zeta_t^s,\zeta_s^t\in\langle\{g_k,(12k)\}\cup E_\nabla^*\rangle$, 则 $E_\nabla\subseteq\langle\{g_k,(12k)\}\cup E_\nabla^*\rangle$.

引理 7 设 $n\geqslant 3$, $3\leqslant k\leqslant n$, 在 D_{n-1} 上引入关系 $\sim$: $\alpha\sim\beta$ 当且仅当存在 $g_1,g_2\in A_k^*$ 使得 $\alpha=g_1\beta g_2$. $\sim$ 为 D_{n-1} 上的等价关系.

证 易验证, $\sim$ 是 D_{n-1} 上的等价关系. 对任意 $\alpha\in D_{n-1}$, 记

$$[\alpha]=\{\beta\in D_{n-1}:\beta\sim\alpha\}\qquad \widetilde{D}_{n-1}=\{[\alpha]:\alpha\in D_{n-1}\}$$

则 $\widetilde{D}_{n-1}$ 是 $\sim$ 在 D_{n-1} 上所决定的一个分类, $[\alpha]$ 是 α 所在的等价类.

引理 8[8] 设 $k+1\leqslant i,j\leqslant n$ 且 $i\neq j$, 则 $[\zeta_1^i]\cap[\zeta_1^j]=\varnothing$.

引理 9[12-13] 设 $k+1\leqslant s\leqslant n$, G 是半群 $A_k^*T_n$ 的生成集, 则 $G\cap A_k^*\neq\varnothing$, $G\cap[\zeta_1^s]\neq\varnothing$, $G\cap[\zeta_s^1]\neq\varnothing$.

证 显然 $G\cap A_k^*\neq\varnothing$. 由 G 是半群 $A_k^*T_n$ 的生成集及 $[\zeta_1^s]\in A_k^*T_n$ 可知, 存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\in G$, 使得 $\zeta_1^s=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t$. 由 $|\operatorname{im}(\zeta_1^s)|=n-1$ 可得

$$|\operatorname{im}(\alpha_j)|\geqslant n-1\qquad |\operatorname{im}(\alpha_p)|\geqslant n-1\qquad 1\leqslant j,p\leqslant t$$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\in D_{n-1}\cup A_k^*$. 再由 $|\operatorname{im}(\zeta_1^s)|=n-1$ 可知, 存在 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$ 使得 $|\operatorname{im}(\alpha_i)|=n-1$. 注意到, 若 $|\operatorname{im}(\alpha_j)|=n$ 或 $|\operatorname{im}(\alpha_p)|=n$, 则 $\alpha_j,\alpha_q\in A_k^*$, $\alpha_j=g_3^{h_j}$, $\alpha_q=g_4^{h_q}$. 令

$$f=\min\{i:|\operatorname{im}(\alpha_i)|=n-1,\ 1\leqslant i\leqslant t\}$$

于是 $|\operatorname{im}(\alpha_1)|=n$, $\cdots$, $|\operatorname{im}(\alpha_{f-1})|=n$, $|\operatorname{im}(\alpha_{f+1})|=n$, $\cdots$, $|\operatorname{im}(\alpha_{k-1})|=n$ 且 $\alpha_1=g_3^{h_1}$, $\cdots$, $\alpha_{f-1}=g_3^{h_{f-1}}$, $\alpha_{f+1}=g_4^{h_{f+1}}$, $\cdots$, $\alpha_{k-1}=g_4^{h_{k-1}}$, $1\leqslant h_1,\cdots,h_{f-1},h_{f+1},\cdots,h_{k-1}\leqslant k$. 从而

$$\zeta_1^s=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{f-1}\alpha_f\alpha_{f+1}\cdots\alpha_{k-1}\alpha_k\cdots\alpha_t=g_3^l\alpha_fg_4^p\alpha_k\cdots\alpha_t$$

$$l=h_1+\cdots+h_{f-1}\qquad p=h_{f+1}+\cdots+h_{k-1}$$

令 $g_1=g_3^l$, $g_2=g_4^p$, 则 $\zeta_1^s=g_1\alpha_fg_2\alpha_k\cdots\alpha_t$. 因为

$$|\operatorname{im}(g_1\alpha_fg_2)|=|\operatorname{im}(\alpha_f)|=n-1$$

设 $g_1\alpha_fg_2$ 的唯一非单点核类为 $\{x,y\}$, 则 $xg_1\alpha_fg_2=yg_1\alpha_fg_2$. 于是

$$xg_1\alpha_fg_2\alpha_k\cdots\alpha_t=yg_1\alpha_fg_2\alpha_k\cdots\alpha_t$$

即 $x\zeta_1^s = y\zeta_1^s$. 从而 $\{x, y\}$ 是 $g_1\alpha_f g_2$ 的非单点核类. 再由 $\{1, s\}$ 是 $g_1\alpha_f g_2$ 的唯一非单点核类可知 $\{x, y\} = \{1, s\}$，即 $\zeta_1^s \sim \alpha_f$. 因此 $G \cap [\zeta_1^s] \neq \varnothing$. 同理可证 $G \cap [\zeta_s^1] \neq \varnothing$.

引理 10　设 $n \geqslant 3$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则 rank $E_* = 3$.

证　由引理 5 知，$E_* \subseteq \langle\{g_k, (12k), \zeta_2^1\}\rangle$，则 rank $E_* = 3$.

引理 11　在 E_Δ^* 中，有 $E_\Delta^* \subseteq \langle E_\Diamond\rangle$，且 rank $E_\Delta^* = \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

证　据文献[2]的定理 1 可知，$E_\Diamond$ 是 E_Δ^* 的一个极小生成集，又由元素 g_k 的结构及 $E_\Diamond$ 中 i, j 的取值范围，对任意的 $\zeta_j^i, \zeta_m^l \in E_\Diamond (i \neq j$ 或者 $l \neq m)$，由引理 8 可得 $[\zeta_j^i] \cap [\zeta_m^l] = \varnothing$，因此有 $E_\Delta^* \subseteq \langle E_\Diamond\rangle$ 且 rank $E_\Delta^* = \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

引理 12　设 $n \geqslant 3$，$3 \leqslant k \leqslant n$，当 k 为奇数时，rank $E_\nabla = n-k+1$；当 k 为偶数时，rank $E_\nabla = n-k+2$.

证　由引理 6 知，当 k 为奇数时，$E_\nabla \subseteq \langle\{g_k\} \cup E_\nabla^*\rangle$ 且 rank $E_\nabla = n-k+1$；当 k 为偶数时，$E_\nabla \subseteq \langle\{g_k, (12k)\} \cup E_\nabla^*\rangle$ 且 rank $E_\nabla = n-k+2$.

定理 1 的证明　因为

$$A_k^* T_n = A_k^* \cup (T_n \backslash S_n) = A_k^* \cup \mathrm{Sing}_n$$

$$A_k^* = \langle\{g_k, (12k)\}\rangle$$

再由引理 1 知 $\mathrm{Sing}_n = \langle E(D_{n-1})\rangle$. 又因

$$E(D_{n-1}) = E_* \cup E_\nabla \cup E_\Delta^*$$

且 $E_*, E_\nabla, E_\Delta^*$ 两两相交为空集，由引理 5 及引理 10 知 $E_* \subseteq \langle\{g_k, (12k), \zeta_2^1\}\rangle$. 由引理 11 知 $E_\Delta^* \subseteq \langle E_\Diamond\rangle$. 由引理 6 及引理 12 知，当 k 为奇数时，$E_\nabla \subseteq \langle\{g_k\} \cup E_\nabla^*\rangle$；当 k 为偶数时，$E_\nabla \subseteq \langle\{g_k, (12k)\} \cup E_\nabla^*\rangle$. 由文献[15]知

$$E(D_{n-1}) = \langle\{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \cup E_\nabla^* \cup E_\Diamond\rangle$$

则

$$A_k^* T_n = \langle\{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \cup E_\nabla^* \cup E_\Diamond\rangle$$

定理 2 的证明　由定理 1 知

$$A_k^* T_n = \langle\{g_k, (12k), \zeta_2^1\} \cup E_\nabla^* \cup E_\Diamond\rangle$$

由引理 10 知 rank $E_* = 3$. 由引理 11 知 rank $E_\Delta^* = \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. 由引理 12 知当 k 为奇数时，rank $E_\nabla = n-k+1$；当 k 为偶数时，rank $E_\nabla = n-k+2$. 则

$$\mathrm{rank}\ A_k^* T_n \leqslant 3 + n - k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

反之，由于半群 $A_k^* T_n$ 的任意生成集必含有 A_k^* 和 Sing_n 中的元素，再由引理 8 和引理 9 知，若 G 是半群 $A_k^* T_n$ 的生成集，则有

$$G \cap A_k^* \neq \varnothing \qquad G \cap E_\nabla^* \neq \varnothing \qquad G \cap E_\Diamond \neq \varnothing$$

显然

$$\mathrm{rank}\ A_k^* T_n \geqslant 3 + n - k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

因此

$$\mathrm{rank}\ A_k^* T_n = 3 + n - k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

特别地，当 $n = k = 1$ 时，半群 $A_1^* T_1 = A_1^*$ 且 rank $A_1^* T_1 = 1$；当 $n = 2$，$k = 1$ 或 $k = 2$ 时，半群 $A_k^* T_n = A_k^* \cup D_{n-1}$ 且 rank $A_k^* T_n = 3$；当 $n = 3$，$k = 1$ 或 $k = 2$ 时，半群 $A_k^* T_n = A_k^* \cup D_{n-1}$ 且 rank $A_k^* T_n = 7$.

2 半群 $A_k^* T_n$ 的 3 次方幂等元秩

设 $\delta \in D_{n-1}$，且 δ 的唯一非单点核类为(i, j)，其中 $i, j \in X_n$，则 D_{n-1} 中 3 次方幂等元的形式如下：

$$\delta_{\{i\to j\}}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p & a_q & a_r & \{i, j\} \\ a_2 & a_3 & a_1 & \cdots & a_q & a_r & a_p & j \end{pmatrix}$$

$$\delta_{\{j\to i\}}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p & a_q & a_r & a_t \\ a_2 & a_3 & a_1 & \cdots & a_q & a_r & a_p & i \end{pmatrix}$$

$$\delta'_{\{i\to j\}}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p & a_q & a_r & a_t & \{i, j\} \\ a_2 & a_3 & a_1 & \cdots & a_q & a_r & a_p & a_t & j \end{pmatrix}$$

$$\delta'_{\{j\to i\}}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p & a_q & a_r & a_t & \{i, j\} \\ a_2 & a_3 & a_1 & \cdots & a_q & a_r & a_p & a_t & i \end{pmatrix}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_p, a_q, a_r, a_t \in X_n \setminus \{i, j\}$. 记 $\delta_{\{i\to j\}}=\delta_j^i$, $\delta_{\{j\to i\}}=\delta_i^j$.

设 $n \geqslant 5$, $3 \leqslant k \leqslant n$. 记

$$\prod\nolimits_{*}=\{\delta_j^i: 1 \leqslant i, j \leqslant k, i \neq j\}$$

$$\prod\nolimits_{\Delta}=\{\delta_i^1, \delta_1^i: 2 \leqslant i \leqslant k\}$$

$$\prod\nolimits_{\nabla}=\{\delta_j^i, \delta_i^j: k+1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

$$\prod\nolimits_{\nabla}^{*}=\{\delta_1^i, \delta_i^1: k+1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\prod\nolimits_{\Delta}^{*}=\{\delta_j^i: k+1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j\}$$

$$\prod\nolimits_{\diamond}=\{\delta_j^i: k+1 \leqslant i, j \leqslant n, i < j\}$$

$E^3(D_{n-1})$ 为 D_{n-1} 中所有 3 次方幂等元构成的集合，$E^3(D_{n-1})=\prod_{*} \cup \prod_{\nabla} \cup \prod_{\nabla}^{*}$，且$\prod_{*}$, $\prod_{\nabla}$, $\prod_{\Delta}^{*}$ 两两相交为空集. 易验证，对任意的 $\delta \in E^3(D_{n-1})$，有 $\delta \in R_{(i, j)} \cap L_i = H_{(i, j)}^i$ 或者 $\delta \in R_{(i, j)} \cap L_j = H_{(i, j)}^j$.

为完成定理 3 及定理 4 的证明，先给出以下若干引理：

引理 13[4] 当 k 为奇数时，记 $W=\{(123), (345), \cdots, ((k-4)(k-3)(k-2)), ((k-2)(k-1)k)\}$；当 k 为偶数时，记 $W=\{(123), (345), \cdots, ((k-5)(k-4)(k-3)), ((k-3)(k-2)(k-1)), ((k-2)(k-1)k)\}$. 则 $A_k^*=\langle W\rangle$ 且 $\operatorname{rank} A_k^*=\left[\frac{k}{2}\right]$，即 W 为 A_k^* 的极小生成元.

证 由引理 3 和文献[4]可知，在引理 13 中从左到右每相邻 3 个元舍去中间一个，剩下的元所生成之集 W 是 A_k^* 的极小生成元.

引理 14 设 $n \geqslant 5$, $3 \leqslant k \leqslant n$，则$\prod_{*} \subseteq \langle W \cup \{\delta_2^1\}\rangle$.

证 当 k 为奇数时，取 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$，则 $\delta_2^1 \in \prod_{\Delta}$. 令

$$\begin{aligned} g &=(123)(345)\cdots((k-4)(k-3)(k-2))((k-2)(k-1)k)= \\ &(12\cdots(k-5)(k-3)(k-1)k(k-2)(k-4)\cdots 53)= \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-3 & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 4 & 1 & \cdots & k-1 & k-4 & k & k-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

易验证，当 $1 \leqslant j < \left[\frac{k}{2}\right]$时，

$$g^{-j}\delta_2^1 g^j=g^{-j}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 3 & \cdots & n-1 & n & n-2 \end{pmatrix} g^j=\begin{pmatrix} 2j \\ 2j+2 \end{pmatrix}$$

当 $j=\left[\frac{k}{2}\right]$时，

$$g^{-j}\delta_2^1 g^j = g^{-j}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 2 & 4 & 5 & 3 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g^j = \begin{pmatrix}2j\\ 2j+1\end{pmatrix}$$

特别地，当 $\left[\dfrac{k}{2}\right]+1 \leqslant j \leqslant k-3$ 时，

$$g^{-([\frac{k}{2}]+1)}\delta_2^1 g^{([\frac{k}{2}]+1)} = g^{-([\frac{k}{2}]+1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 2 & 4 & 5 & 3 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g^{([\frac{k}{2}]+1)} = \begin{pmatrix}k-1\\ k-3\end{pmatrix}$$

$$g^{-([\frac{k}{2}]+2)}\delta_2^1 g^{([\frac{k}{2}]+2)} = g^{-([\frac{k}{2}]+2)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 2 & 4 & 5 & 3 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g^{([\frac{k}{2}]+2)} = \begin{pmatrix}k-3\\ k-5\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$g^{4-k}\delta_2^1 g^{k-4} = \begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix} \qquad g^{3-k}\delta_2^1 g^{k-3} = \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(132)\delta_2^1(123) = \delta_3^2 \qquad (132)^2\delta_2^1(123)^2 = \delta_1^3$$

$$(354)\delta_4^3(345) = \delta_5^4 \qquad (354)^2\delta_4^3(345)^2 = \delta_3^5$$

$$\vdots$$

$$((k-5)(k-3)(k-4))\delta_{k-4}^{k-5}((k-5)(k-4)(k-3)) = \delta_{k-3}^{k-4}$$

$$((k-5)(k-3)(k-4))^2\delta_{k-4}^{k-5}((k-5)(k-4)(k-3))^2 = \delta_{k-5}^{k-3}$$

$$((k-3)(k-1)(k-2))\delta_{k-2}^{k-3}((k-3)(k-2)(k-1)) = \delta_{k-1}^{k-2}$$

$$((k-3)(k-1)(k-2))^2\delta_{k-2}^{k-3}((k-3)(k-2)(k-1))^2 = \delta_{k-3}^{k-1}$$

$$((k-2)k(k-1))\delta_{k-1}^{k-2}((k-2)(k-1)k) = \delta_k^{k-1}$$

$$((k-2)k(k-1))^2\delta_{k-1}^{k-2}((k-2)(k-1)k)^2 = \delta_{k-2}^k$$

由 i,j 的取值范围及 $\prod_*$，$\prod_\nabla$ 的定义可知，$\delta_{2j+2}^{2j}, \delta_{2j-1}^{2j}, \cdots, \delta_{k-3}^{k-1}, \delta_{k-5}^{k-3}, \delta_{k-2}^k \in \prod_*$，从而 $\delta_{2j+2}^{2j}, \delta_{2j-1}^{2j}, \cdots, \delta_{k-3}^{k-1}$，$\delta_{k-5}^{k-3}, \delta_{k-2}^k \in \prod_* \subseteq \langle W \cup \{\delta_2^1\}\rangle$.

引理 15　设 $n \geqslant 5$，$3 \leqslant k \leqslant n$，则 $\prod_\nabla \subseteq \langle W \cup \prod_\nabla^*\rangle$.

证　当 k 为奇数时，任取 $i \in \{k+1, k+2, \cdots, n\}$，$j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$，则 $\delta_1^i \in \prod_\nabla^*$，$\delta_i^1 \in \prod_\nabla^*$. 易验证，当 $1 \leqslant j \leqslant \left[\dfrac{k}{2}\right]$时，

$$g^{-j}\delta_1^i g^j = g^{-j}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 3 & 4 & 2 & \cdots & 1 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g^j = \begin{pmatrix}i\\ 2j\end{pmatrix}$$

当 $\left[\dfrac{k}{2}\right]+1 \leqslant j \leqslant k-1$ 时，

$$g^{-j}\delta_1^i g^j = g^{-j}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 3 & 4 & 2 & \cdots & 1 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g^j = \begin{pmatrix}i\\ 2j-1\end{pmatrix}$$

由 i,j 的取值范围及 $\prod_\nabla$，$\prod_\nabla^*$ 的定义可知，$\delta_1^i \in \prod_\nabla^*$，$\delta_{2j-1}^i, \delta_{2j}^i \in \prod_\nabla$，从而 $\delta_{2j-1}^i, \delta_{2j}^i \in \prod_\nabla \subseteq W \cup \prod_\nabla^*$，由引理 6 同理可得 $\delta_i^{2j-1}, \delta_i^{2j} \in \prod_\nabla \subseteq W \cup \prod_\nabla^*$，则 $\prod_\nabla \subseteq \langle W \cup \prod_\nabla^*\rangle$.

当 k 为偶数时，任取 $i \in \{k+1, k+2, \cdots, n\}$，$j \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$，则 $\delta_1^i \in \prod_\nabla^*$，$\delta_i^1 \in \prod_\nabla^*$. 令

$$g = (123)(345)\cdots((k-5)(k-4)(k-3))((k-3)(k-2)(k-1))((k-2)(k-1)k) = (124\cdots(k-6)(k-4)(k-1)(k-3)\cdots753)((k-2)k)$$

再令 $g_* = (124\cdots(k-6)(k-4)(k-1)(k-3)\cdots753)$. 易验证，当 $1 \leqslant j \leqslant \left[\dfrac{k-1}{2}\right]-1$ 时，

$$g_*^{-j}\delta_1^i g_*^j = g_*^{-j}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 3 & 4 & 2 & \cdots & 1 & \cdots & n-1 & n & n-2\end{pmatrix} g_*^j = \begin{pmatrix}i\\ 2j\end{pmatrix}$$

当$\left[\frac{k-1}{2}\right] \leqslant j \leqslant k-3$时,

$$g_{*}^{-j} \delta_1^i g_{*}^{j} = g_{*}^{-j} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & 2 & \cdots & 1 & \cdots & n-1 & n & n-2 \end{pmatrix} g_{*}^{j} = \begin{pmatrix} i \\ 2j+1 \end{pmatrix}$$

对任意的$j \in \{k-2, k-1, k\}$, $s \in \{1, 2, 3\}$, 有

$$((k-2)(k-1)k)^{-s} \delta_{k-2}^i ((k-2)(k-1)k)^s = \delta_j^i$$

由i, j的取值范围及$\prod_{\triangledown}$, $\prod_{\triangledown}^{*}$的定义可知, $\delta_1^i \in \prod_{\triangledown}^{*}$, $\delta_{2j-1}^i, \delta_{2j}^i, \delta_{k-2}^i, \delta_j^i \in \prod_{\triangledown}$, 从而$\delta_{2j-1}^i, \delta_{2j}^i, \delta_{k-2}^i, \delta_j^i \in \prod_{\triangledown} \subseteq W \cup \prod_{\triangledown}^{*}$, 由引理 6 同理可得$\delta_i^{2j-1}, \delta_i^{2j}, \delta_i^{k-2}, \delta_i^j \in \prod_{\triangledown} \subseteq W \cup \prod_{\triangledown}^{*}$, 则$\prod_{\triangledown} \subseteq \langle W \cup \prod_{\triangledown}^{*} \rangle$.

引理 16 设$n \geqslant 5$, $3 \leqslant k \leqslant n$, 则$\operatorname{rank}^3(\prod_{*}) = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

证 根据引理 13 及引理 14 可知

$$A_k^* = \langle W \rangle \qquad \prod_{*} \subseteq \langle W \cup \{\delta_2^1\} \rangle$$

从而

$$\operatorname{rank}^3(\prod_{*}) \leqslant | W \cup \{\delta_2^1\} | \leqslant \left[\frac{k}{2}\right] + 1$$

又因为$\prod_{*}$的任意生成集必包含δ_2^1及A_k^*中的元素, 从而

$$\operatorname{rank}^3(\prod_{*}) \geqslant \left[\frac{k}{2}\right] + 1$$

因此, $\operatorname{rank}^3(\prod_{*}) = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

引理 17 设$n \geqslant 5$, $3 \leqslant k \leqslant n$, 在$\prod_{\vartriangle}^{*}$中, 有$\prod_{\vartriangle}^{*} \subseteq \langle \prod_{\diamond} \rangle$, 且

$$\operatorname{rank}^3(\prod_{\vartriangle}^{*}) = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

证 根据文献[2]的定理 1 可知, $\prod_{\diamond}$是$\prod_{\vartriangle}^{*}$的一个极小幂等元生成集, 又由元素g_k的结构及$\prod_{\diamond}$中i, j的取值范围, 对任意的$\delta_j^i, \delta_m^l \in \prod_{\diamond}$($i \neq j$或者$l \neq m$), 由引理 8 类似地可得$[\delta_j^i] \cap [\delta_m^l] = \varnothing$, 因此有$\prod_{\vartriangle}^{*} \subseteq \langle \prod_{\diamond} \rangle$, 且$\operatorname{rank}^3(\prod_{\vartriangle}^{*}) = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

引理 18 设$n \geqslant 5$, $3 \leqslant k \leqslant n$, 则$\operatorname{rank}^3(\prod_{\triangledown}) = n-k+\left[\frac{k}{2}\right]$.

证 由引理 13 及引理 14 知, $\prod_{\triangledown} \subseteq \langle W \cup \prod_{\triangledown}^{*} \rangle$且$\operatorname{rank}^3(\prod_{\triangledown}) = n-k+\left[\frac{k}{2}\right]$.

定理 3 的证明 因为

$$A_k^* T_n = A_k^* \cup (T_n \setminus S_n)$$

由引理 1 知$\mathrm{Sing}_n = \langle E(D_{n-1}) \rangle$. 由于$\mathrm{Sing}_n$中的 3 次方幂等元也在$H$-类中, 则$\mathrm{Sing}_n = \langle E^3(D_{n-1}) \rangle$. 由引理 13 及引理 14 知$\prod_{*} \subseteq \langle W \cup \{\delta_2^1\} \rangle$. 由引理 17 知$\prod_{\vartriangle}^{*} \subseteq \langle \prod_{\diamond} \rangle$. 由引理 13 及引理 15 知$\prod_{\triangledown} \subseteq \langle W \cup \prod_{\triangledown}^{*} \rangle$. 再由文献[15]知

$$E^3(A_k^* T_n) = \langle W \cup \{\delta_2^1\} \cup \prod_{\triangledown}^{*} \cup \prod_{\diamond} \rangle$$

则

$$A_k^* T_n = \langle W \cup \{\delta_2^1\} \cup \prod_{\triangledown}^{*} \cup \prod_{\diamond} \rangle$$

定理 4 的证明 由定理 3 知

$$A_k^* T_n = \langle W \cup \{\delta_2^1\} \cup \prod_{\triangledown}^{*} \cup \prod_{\diamond} \rangle$$

由引理 16 知 $\mathrm{rank}^3(\prod_{*})=\left[\frac{k}{2}\right]+1$. 由引理 17 知 $\mathrm{rank}^3(\prod_{\Delta}^{*})=\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. 由引理 18 知 $\mathrm{rank}^3(\prod_{\nabla})=n-k+\left[\frac{k}{2}\right]$. 则

$$\mathrm{rank}^3(A_k^* T_n)\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]+n-k+1+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

反之，由于半群 $A_k^* T_n$ 的任意生成集必含有 A_k^* 和 Sing_n 中的元素，再由引理 8 和引理 9 知，若 G 是半群 $A_k^* T_n$ 的生成集，则有

$$G\cap A_k^*\neq\varnothing\qquad G\cap\prod_{\nabla}^{*}\neq\varnothing\qquad G\cap\prod_{\diamond}\neq\varnothing$$

显然

$$\mathrm{rank}^3(A_k^* T_n)\geqslant\left[\frac{k}{2}\right]+n-k+1+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

因此

$$\mathrm{rank}^3(A_k^* T_n)=\left[\frac{k}{2}\right]+n-k+1+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

参考文献：

[1] 张前滔，赵平，罗永贵. 半群 $TOP_n(k)$的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：9-15.

[2] HOWIE J M. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh(Section A)，1978，81(3-4)：317-323.

[3] 甘文秘，高荣海，罗永贵. 半群 AS_n 的秩 [J]. 数学的实践与认识，2021，51(4)：230-234.

[4] 喻方元. 对称群及交代群的生成元组 [J]. 武汉师范学院学报(自然科学版)，1982，4(2)：67-71.

[5] HOWIE J M，MCFADDEN R B. Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh(Section A)，1990，114(1)：161-167.

[6] 张前滔，罗永贵，赵平. 半群 $PD(n, r)$的秩和相关秩 [J]. 山东大学学报(理学版)，2020，55(10)：63-70.

[7] 张钱，赵平. 半群 CS_n 的秩 [J]. 数学的实践与认识，2018，48(11)：241-246.

[8] 黄朝霞，罗永贵. 半群 $SY_{(n-1)}$ 的秩 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2021，39(3)：61-64.

[9] 吕会，罗永贵，赵平，等. 半群 OS_n 的某些特殊性质 [J]. 数学的实践与认识，2019，49(2)：252-258.

[10] 吕会，罗永贵，赵平. 半群 $\mathscr{CI}_n$ 的秩 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2021，44(1)：63-66.

[11] 袁月，赵平. 半群 $H_{(n,m)}^*(r)$的秩 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(8)：65-69.

[12] 袁月，赵平. 半群 $H_{(n,m)}$ 的独立子半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：74-81.

[13] 黄朝霞，高荣海，罗永贵. 半群 $HS_{(n,k)}$ 的秩 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：4-8.

[14] 龙伟锋，涂晨. 保序且保距严格部分一一变换半群 [J]. 嘉应学院学报，2021，39(6)：6-9.

[15] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford：Clarendon Press，1995.

[16] GANYUSHKIN O，MAZORCHUK V. Classical Finite Transformation Semigroups [M]. London：Springer-Verlag，2009.

责任编辑　廖坤