第 47 卷 第 11 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2022 年 11 月
Vol. 47 No. 11 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.11.007

一类具有快速增权的非线性椭圆方程解的存在性①

郑文静[1,2], 陈尚杰[1,2], 李麟[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室,重庆 400067

摘要:本文研究了全空间上的一类具有快速增权的非线性椭圆方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\,|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{div}(K(x)\nabla u)=K(x)f(x,u)\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

解的存在性问题. 其中 $K(x)=\exp\dfrac{|x|^2}{4}$ 为权函数;非线性项中的函数 $f(x,u)$ 为连续函数,满足全局次临界条件,且在原点处超线性,在无穷远处超四次增长. 在局部 AR 条件下,证明了该类方程的泛函满足 $(C)_c$ 条件且具有山路几何结构,从而得到了方程非平凡解的存在性. 而将局部 AR 条件替换为全局 AR 条件时,又得到了该方程基态解(即该方程所有解中能量泛函值最小的解)的存在性. 目前关于该方程还没有类似的结果.

关 键 词:变分法;山路定理;$(C)_c$ 条件;非平凡解;基态解

中图分类号:O176.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2022)11-0050-07

On Existence of Solutions for a Class of Nonlinear Elliptic Equation with Fast Increasing Weight

ZHENG Wenjing[1,2], CHEN Shangjie[1,2], LI Lin[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China

Abstract: The existence problem of solutions for a class of nonlinear elliptic equations has been considered in the paper with rapidly increasing weights in the whole space

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\,|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{div}(K(x)\nabla u)=K(x)f(x,u)\qquad x\in\mathbb{R}^3$$

where $K(x)=\exp\dfrac{|x|^2}{4}$ is the weight function, the function $f(x,u)$ in the nonlinear term is a continuous function and satisfies the global subcritical, superlinear at the origin, infinite super-quaternary growth in the distance. Under local AR conditions, it has been proved that the functional of this type of equation satisfies the $(C)_c$ conditions and has a mountain pass geometry, so that the existence of non-trivial solutions to the equation is obtained. When the local AR condition is replaced by the global AR condition, the exist-

① 收稿日期:2022-03-10
基金项目:重庆市教育委员会基金项目(KJQN20190081);重庆工商大学基金项目(CTBUZDPTTD201909).
作者简介:郑文静,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析的研究.

ence of the ground state solution of the equation is obtained, that is, the solution with the smallest energy functional value among all the solutions of the equation. There is no similar result for this equation at present.

Key words: variational method; the mountain pass theorem; $(C)_c$ condition; nontrivial solution; ground state solution

考虑如下发展方程：

$$w_t - \Delta w = |w|^{p-2} w \qquad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \tag{1}$$

当寻找方程(1) 的自相似解 $w(t, x) = t^{-\frac{1}{p-2}} u(t^{-\frac{1}{2}} x)$ 时，方程(1) 等价于一类带权重 $K(x)$ 的热方程

$$-\operatorname{div}(K(x)\nabla u) = K(x) f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

具体可参见文献[1]. 热方程作为抛物型偏微分方程，不仅可以用来描述热传导过程，也可以用来描述多种反应的扩散过程，诸如液体流动、传染病扩散、生物种群的迁移、生物分子的运动以及飞行器的冷却与保护等. 目前关于用变分原理来研究相关增权问题解的存在性和不存在性，受到了国内外学者的广泛关注并取得了丰硕的研究成果.

文献[2] 研究了在非线性项 $f(x, u)$ 分别满足超线性条件和渐近线性条件的情况下，方程(2) 基态解的存在性. 除此之外，更多的学者研究了方程(2) 中非线性项 $f(x, u)$ 具有临界增长的情况，即如下方程：

$$-\operatorname{div}(K(x)\nabla u) = K(x)(a(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + b(x)u^{2^*-2}u) \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{3}$$

其中

$$\beta = (\alpha - 2)\frac{2^* - q}{2^* - 2} \qquad \alpha \geqslant 2$$

$$K(x) = \exp\frac{|x|^{\alpha}}{4} \qquad a(x), b(x) > 0$$

文献[3-8] 研究了 $N \geqslant 3$ 且非线性项临界增长的情况，通过改变方程(3) 中 $a(x)$,$b(x)$ 的取值及讨论 q 和参数 λ 的取值范围，分别得到了相应方程的基态解、非径向解、非径向对称基态解、变号解、衰减解、非平凡解和多解的存在性结论. 文献[9-10] 研究了方程(3) 带有凹凸非线性项的情况，其中文献[9] 运用极小化理论和山路定理证明了方程存在两个非负解，文献[10] 在文献[9] 的基础上，运用测试函数和山路定理得到了方程非平凡解的存在性.

与上述方程略有不同，文献[11] 考虑了带非局部项的椭圆型偏微分方程

$$-\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\operatorname{div}(K(x)\nabla u) =$$
$$\lambda K(x)|x|^{\beta}|u|^{q-2}u + K(x)|u|^4 u \qquad x \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

非平凡解的存在性问题. 其中 $a, b, \lambda > 0$，$\beta = \frac{(\alpha - 2)(6 - q)}{4}$，$K(x) = \exp\left(\frac{|x|^2}{4}\right)$，$\alpha \geqslant 2$. 在对参数 λ 做不同假设的情况下，作者利用山路定理和 Nehari 流形的方法分别证明了非平凡解和基态解的存在性. 同样的方法应用到其他方程的研究可参见文献[12-14].

目前关于该类具有快速增权的方程的研究多限于非线性项为具体函数，如方程(3). 而在非线性项为抽象函数(如方程(4) 的右边) 的情况下，该类方程的解是否存在，还尚未可知.

基于对以上带权重 $K(x)$ 的方程的研究及文献[11,15] 的启发，本文将研究如下一类带有一般非线性项的椭圆型方程解的存在性问题：

$$-\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} K(x)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\operatorname{div}(K(x)\nabla u) = K(x) f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

其中常数 $a, b > 0$，$K(x) = \exp\frac{|x|^2}{4}$，$f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

由于方程(5)不是点态恒等的，且其右端是一个抽象函数，我们不能确定范数项与非局部项的竞争关系.并且关于该类方程是否存在基态解这一问题，暂无学者做相关研究.因此本文不能利用文献[2,11]的方法证明方程(5)解的存在性.为了解决这一问题，受文献[2,15]的启发，本文考虑将方程放入一个加权的Sobolve空间中以解决空间失紧问题，并对非线性项 $f(x,u)$ 做一些恰当的假设，利用山路定理来证明解的存在性.对非线性项 $f(x,u)$ 的假设如下：

(F1) $f\in C(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，存在 $C_1>0$，$p\in[4,6)$，使得

$$|f(x,t)|\leqslant C_1(1+|t|^{p-1})\qquad \forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

(F2) 当 $t\to 0$ 时，$f(x,t)=o(t)$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立；

(F3) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{F(x,t)}{t^4}=+\infty$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立，其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$；

(F4)(局部AR条件) 存在 $l>0$，$C_2>0$，使得

$$tf(x,t)-4F(x,t)\geqslant -C_2|t|^2\qquad \forall x\in\mathbb{R}^3,\ t\in\mathbb{R},\ |t|\geqslant l$$

(F5)(AR条件) 对所有 $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$，有 $tf(x,t)-4F(x,t)\geqslant 0$.

本文的主要结果为：

定理1 假设条件(F1)-(F4)成立，则方程(5)有一个非平凡解.

定理2 假设条件(F1)-(F3)和(F5)成立，则方程(5)有一个基态解.

注1 对于方程(5)，目前还没有类似的结论，且关于本文中给出的条件，可以找到满足条件的函数，如 $F(x,t)=t^4\log(1+|t|)$.

定义空间 X 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 的完备空间，内积为

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x$$

范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

对 $\forall q\in[2,6]$，定义空间

$$L_k^q(\mathbb{R}^3)=\left\{u:u\text{ 在 }\mathbb{R}^3\text{ 中可测，}\|u\|_q=\left(\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}$$

对 $\forall q\in[2,6]$，可以定义

$$S_q=\inf\{\|u\|^2:u\in X,\ \|u\|_q=1\}$$

因此对 $\forall u\in X$，有 $\|u\|_q\leqslant S_q^{-\frac{1}{2}}\|u\|$.

定理3[4] 对 $\forall q\in[2,6]$，X 嵌入到 $L_k^q(\mathbb{R}^3)$ 是连续的.当 $q\in[2,6)$ 时，X 嵌入到 $L_k^q(\mathbb{R}^3)$ 是紧的.

方程(5)相应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)F(x,u)\mathrm{d}x\qquad u\in X\tag{6}$$

显然，$I(u)$ 是连续可导泛函，且其导数形式为

$$\langle I'(u),v\rangle=a(u,v)+b\|u\|^2(u,v)-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)f(x,u)v\mathrm{d}x\qquad \forall u,v\in X\tag{7}$$

如果对 $\forall v\in X$，$u\in X$ 满足 $\langle I'(u),v\rangle=0$，则 $u\in X$ 是方程(5)的弱解.

定理4[16](山路定理) X 是一个Banach空间，$I\in C^1(X,\mathbb{R})$，假设存在 $x_0,x_1\in X$ 以及 x_0 的一个有界开邻域 Ω，使得 $x_1\notin\Omega$ 且 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}I(u)>\max\{I(x_0),I(x_1)\}$.定义

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$$
$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],X):\gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x_1\}$$

若泛函 I 满足 $(\mathrm{C})_c$ 条件(既对任何满足 $I(u_n)\to c$，$(1+\|u\|)I'(u_n)\to 0$ 的序列 $\{u_n\}$ 都有一个收敛子列)，

则 c 是 I 的一个临界值，且 $c > \max\{I(x_0), I(x_1)\}$.

引理 1　假设条件(F1)－(F4)成立，且 $c \in \mathbb{R}$，则泛函 I 满足$(\mathrm{C})_c$ 条件.

证　设$\{u_n\}$是泛函 I 的一个$(\mathrm{C})_c$ 序列，即满足

$$I(u_n) \to c \qquad (1 + \| u \|) I'(u_n) \to 0 \tag{8}$$

首先，证明$\{u_n\}$是有界的. 如果序列$\{u_n\}$是无界的，则存在子列$\{u_n\}$(仍记为$\{u_n\}$)满足当 $n \to \infty$ 时，$\| u_n \| \to \infty$. 取 $v_n = \dfrac{u_n}{\| u_n \|}$，则 $\| v_n \| = 1$，即序列$\{v_n\}$在 X 中是有界的. 从而存在 $v \in X$ 和$\{v_n\}$的一个子列(仍记为$\{v_n\}$)，使得

$$v_n \to v \qquad x \in L_k^q(\mathbb{R}^3),\ q \in [2, 6)$$

$$v_n(x) \to v(x) \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^3$$

定义集合

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : v(x) \neq 0\}$$

则 $\mathrm{meas}(B) \geqslant 0$. 下面分两种情况考虑：

情况 1　若 $\mathrm{meas}(B) > 0$，根据$\| u_n \| \to \infty$ 可以得到，当 $n \to \infty$ 时，有 $| u_n | \to \infty (\forall x \in B)$. 因此，由 Fatou 引理可得

$$\liminf_{n\to\infty} \int_B \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x \geqslant \int_B \liminf_{n\to\infty} \frac{K(x)F(x, u_n)}{| u_n |^4} v_n^4 \mathrm{d}x = +\infty \tag{9}$$

又由条件(F1),(F2)和(F3)知，对 $\forall M > 0$，存在 $C_M > 0$，使得

$$F(x, t) \geqslant Mt^4 - C_M t^2 \geqslant - C_M t^2 \qquad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \tag{10}$$

因此由定理 3 有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x \geqslant & - C_M \liminf_{n\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} K(x) | u_n |^2 \mathrm{d}x}{\| u_n \|^4} \geqslant \\ & - C_M \liminf_{n\to\infty} \frac{S_2^{-1} \| u_n \|^2}{\| u_n \|^4} = \\ & - C_M S_2^{-1} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\| u_n \|^2} = 0\end{aligned} \tag{11}$$

根据(9)式和(11)式，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{c + o(1)}{\| u_n \|^4} = & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{2 \| u_n \|^2} + \frac{b}{4} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x \right) = \\ & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{2 \| u_n \|^2} + \frac{b}{4} - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x - \int_B \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x \right) \leqslant \\ & \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2 \| u_n \|^2} + \frac{b}{4} - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B} \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x - \int_B \liminf_{n\to\infty} \frac{K(x)F(x, u_n)}{\| u_n \|^4} \mathrm{d}x = -\infty\end{aligned}$$

不等式两边矛盾，说明假设错误，则序列$\{u_n\}$是有界的.

情况 2　若 $\mathrm{meas}(B) = 0$，则对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^3$，有 $v = 0$. 根据条件(F1)和(F2)知，当 $| t | \leqslant l$ 时，存在 $C_3 > 0$，使得

$$- C_3 | t | \leqslant f(x, t) \leqslant C_3 | t |$$

$$- \frac{C_3}{2} | t |^2 \leqslant F(x, t) \leqslant \frac{C_3}{2} | t |^2$$

因此存在 $C_4 > 0$，使得当 $| t | \leqslant l$ 时，

$$f(x, t) - 4F(x, t) \geqslant - C_4 | t |^2$$

结合条件(F4)，存在 $C_5 > 0$，对 $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$，有

$$f(x, t)-4F(x, t) \geqslant -C_5|t|^2$$

因此有

$$\frac{4I(u_n)-\langle I'(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|^2}=\frac{a\|u_n\|^2}{\|u_n\|^2}+\frac{\int_{\mathbb{R}^3}K(x)f(x, u_n)u_n\mathrm{d}x-4\int_{\mathbb{R}^3}K(x)F(x, u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^2} \geqslant$$

$$a-C_5\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\frac{|u_n|^2}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=a-C_5\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|v_n|^2\mathrm{d}x$$

当 $n\to\infty$ 时，由于在 $L_k^2(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n\to v$，所以得到 $a\leqslant 0$，这与 $a>0$ 相矛盾，因此空间 X 中的任意$(\mathrm{C})_c$ 序列$\{u_n\}$都是有界的.

上面已证明对泛函 I 的任一$(\mathrm{C})_c$ 序列$\{u_n\}$在空间 X 中都是有界的. 现证序列$\{u_n\}$在空间 X 中有一个强收敛的子列. 因为序列$\{u_n\}$是有界的，所以存在一个子列$\{u_n\}$(仍记为$\{u_n\}$)和 $u\in X$，使得

$$u_n\rightharpoonup u \qquad x\in X$$

$$u_n\to u \qquad x\in L_K^q(\mathbb{R}^3), q\in[2, 6)$$

由(6)式和(7)式可以得到

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n)-I'(u), u_n-u\rangle=&\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\\&\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x+\\&\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x, u)-f(x, u_n))(u_n-u)\mathrm{d}x=\\&\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|\nabla(u_n-u)|^2\mathrm{d}x+\\&\left(b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(|\nabla u_n|^2-|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x+\\&\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x, u)-f(x, u_n))(u_n-u)\mathrm{d}x\geqslant\\&a\|u_n-u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x, u)-f(x, u_n))(u_n-u)\mathrm{d}x+\\&\left(b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(|\nabla u_n|^2-|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

整理得

$$a\|u_n-u\|^2\leqslant\langle I'(u_n)-I'(u), u_n-u\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x, u_n)-f(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x+$$

$$\left(b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(|\nabla u|^2-|\nabla u_n|^2)\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x$$

当 $n\to\infty$ 时，显然有

$$\langle I'(u_n)-I'(u), u_n-u\rangle\to 0 \tag{12}$$

由序列$\{u_n\}$在 X 中的有界性，且在空间 X 中 $u_n\rightharpoonup u$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left(b\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(|\nabla u|^2-|\nabla u_n|^2)\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{13}$$

由条件(F1),(F2)知，存在 $C_6>0$，使得

$$|f(x, t)|\leqslant C_6|t|+C_6|t|^{p-1} \qquad p\in[4, 6)$$

结合 Hölder 不等式，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x, u_n)-f(x, u))(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|f(x, u_n)-f(x, u)||u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C_6\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(|u_n|+|u|+|u_n|^{p-1}+|u|^{p-1})|u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C_6(\|u_n\|_2+\|u\|_2)\|u_n-u\|_2+C_6(\|u_n\|_p^{p-1}+\|u\|_p^{p-1})\|u_n-u\|_p$$

因为在 $L_k^q(\mathbb{R}^3)$ 中当 $q\in[2,6)$ 时 $u_n\to u$，$\{u_n\}$ 在 X 中是有界的，所以当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{14}$$

结合(12)，(13) 和(14) 式可以得到 $\|u_n-u\|\to 0$，证毕.

引理 2　设条件(F1)－(F3) 成立，则泛函 I 满足山路几何结构：

(i) 存在 $\rho, r>0$，使得对任意的 $u(\|u\|=\rho)$，有 $I(u)\geqslant r$；

(ii) 存在 $\varphi\in X$，使得 $\|\varphi\|>\rho$ 和 $I(\varphi)<0$.

证　(i) 由条件(F1) 和(F2) 知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$F(x,t)\leqslant\varepsilon t^2+C_\varepsilon t^p\qquad\forall(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

结合定理 3，有

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\varepsilon u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)C_\varepsilon|u|^p\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-S_2^{-1}\varepsilon\|u\|^2-S_p^{-\frac{p}{2}}C_\varepsilon\|u\|^p$$

又因 ε 任意小，而 $p\in[4,6)$，因此存在 $\rho, r>0$ (ρ 足够小)，对任意的 $u(\|u\|=\rho)$，都有 $I(u)\geqslant r>0$ 成立.

(ii) 取 $u\in X$，$u\neq 0$，因为 M 是任意的，所以可取 $M>\frac{b}{4}\cdot\dfrac{\|u\|^4}{\int_{\mathbb{R}^3}K(x)u^4\mathrm{d}x}$，再结合(10) 式，可得

$$I(tu)=\frac{a}{2}t^2\|u\|^2+\frac{b}{4}t^4\|u\|^4-\int_{\mathbb{R}^3}K(x)F(x,tu)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\left(\frac{a}{2}\|u\|^2+C_M\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)t^2+\left(\frac{b}{4}\|u\|^4-M\int_{\mathbb{R}^3}K(x)|u|^4\mathrm{d}x\right)t^4$$

令 t 足够大，则存在 $\varphi=tu$ 使得 $\|\varphi\|>\rho$ 和 $I(\varphi)<0$.

定理 1 的证明　从引理 2 可以看出，泛函 I 具有山路几何结构. 而引理 1 已证明泛函 I 满足$(\mathrm{C})_c$ 条件，从而泛函 I 有临界值，即存在 $u\in X$ 满足 $I(u)=c>0$，$I'(u)=0$，则 u 为方程(5) 的一个非平凡解.

定理 2 的证明　观察条件(F5) 可以推出条件(F4)，因此将条件(F5) 换成条件(F4) 成立时，引理 1 和引理 2 均成立，因此由条件(F1)－(F3) 和(F5) 可以得出方程(5) 有一个非平凡解. 令

$$m=\inf\{I(u): u\in X\backslash\{0\}, \langle I'(u), u\rangle=0\}$$

假设 u 是泛函 I 的任意一个临界点，由条件(F5) 得

$$I(u)=I(u)-\frac{1}{4}\langle I'(u), u\rangle=\frac{a}{4}\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(f(x,u)u-4F(x,u))\mathrm{d}x\geqslant 0$$

因此

$$0\leqslant m\leqslant I(u)<+\infty$$

设 $\{u_n\}$ 是泛函 I 的临界点构成的序列，使得 $I(u_n)\to m$，因为 u_0 是临界点，所以有 $I'(u_n)\to 0$，因此 $\{u_n\}$ 是在水平 m 上的一个$(\mathrm{C})_c$ 序列，因而其存在收敛子列(仍记为 $\{u_n\}$)，设其极限为 u_0，易知 $I'(u_0)=0$，即 u_0 为方程(5) 的解. 又由 Fatou 引理可得

$$I(u_0)=I(u_0)-\frac{1}{4}\langle I'(u_0), u_0\rangle=\frac{a}{4}\|u_0\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\left(\frac{1}{4}f(x,u_0)u_0-F(x,u_0)\right)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\left(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf\left(I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),\ u_n\rangle\right)=m$$

因此，方程(5)存在一个基态解 u_0.

参考文献:

[1] ESCOBEDO M, KAVIAN O. Variational Problems Related to Self-Similar Solutions of the Heat Equation [J]. Nonlinear Analysis(Theory, Methods and Applications), 1987, 11(10): 1103-1133.

[2] LI L, TANG C L. Existence of Ground State Solutions for a Class of Nonlinear Elliptic Equations with Fast Increasing Weight [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2017, 43(7): 2111-2124.

[3] CATRINA F, FURTADO M, MONTENEGRO M. Positive Solutions for Nonlinear Elliptic Equations with Fast Increasing Weights [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Section A), 2007, 137(6): 1157-1178.

[4] FURTADO M F, MYIAGAKI O H, DA SILVA J P P. On a Class of Nonlinear Elliptic Equations with Fast Increasing Weight and Critical Growth [J]. Journal of Differential Equations, 2010, 249(5): 1035-1055.

[5] FURTADO M F, DA SILVA J P P, XAVIER M S. Multiplicity of Self-Similar Solutions for a Critical Equation [J]. Journal of Differential Equations, 2013, 254(7): 2732-2743.

[6] FURTADO M F, SOUZA B N. Positive and Nodal Solutions for an Elliptic Equation with Critical Growth [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2016, 18(2): 1-16.

[7] QIAN X T, CHEN J Q. Multiple Positive and Sign-Changing Solutions of an Elliptic Equation with Fast Increasing Weight and Critical Growth [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 465(2): 1186-1208.

[8] 李麟. 热方程 Klein-Gordon-Maxwell 系统解的存在性和多重性 [D]. 重庆: 西南大学, 2015.

[9] FURTADO M F, RUVIARO R, DA SILVA J P P. Two Solutions for an Elliptic Equation with Fast Increasing Weight and Concave-Convex Nonlinearities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 416(2): 698-709.

[10] QIAN X T, CHEN J Q. Sign-Changing Solutions for Elliptic Equations with Fast Increasing Weight and Concave-Convex Nonlinearities [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 229(24): 1-16.

[11] QIAN X T, CHAO W. Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with Fast Increasing Weight and Critical Nonlinearity [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2019, 27(19): 1-17.

[12] 蒙璐, 储昌木, 雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2021, 43(6): 82-88.

[13] 张爱旎, 邓志颖. 一类分数阶 p-q 型临界椭圆边值问题的非平凡解 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2022, 44(6): 88-93.

[14] 冉玲, 陈尚杰, 李麟. 一类半线性退化 Schrödinger 方程的无穷多大能量解的存在性 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2022, 47(2): 21-26.

[15] 魏美春, 唐春雷. $\mathbb{R}^N$ 上的 Kirchhoff 型问题非平凡解的存在性和多解性 [J]. 数学物理学报, 2015, 35A(1): 151-162.

[16] ZHONG C K. On Ekeland's Variational Principle and a Minimax Theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 205(1): 239-250.

责任编辑　廖坤