DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.12.003

基于优势关系的毕达哥拉斯模糊三支决策模型①

赵杰[1]，　万仁霞[1]，　苗夺谦[2]

1. 北方民族大学 数学与信息科学学院，银川 750021；2. 同济大学 电子与信息工程学院，上海 201804

摘要：鉴于毕达哥拉斯模糊集在处理不确定信息中的优势，本文基于毕达哥拉斯模糊集的优势关系，将对象集进行划分，根据三支语义，构建了毕达哥拉斯模糊集的三支决策模型. 为解决毕达哥拉斯模糊集的隶属度与非隶属度不是一个确定值的问题，本文设计了具有风险偏好的函数将区间值转化为确定值，进而构建了区间毕达哥拉斯模糊集的三支决策模型，使本文所建立的毕达哥拉斯模糊三支决策模型更具一般性与实用性，进一步拓展并丰富了毕达哥拉斯集与三支决策的相关理论. 另外根据风险参数的取值，本文进一步讨论了毕达哥拉斯模糊三支决策模型的乐观型和悲观型. 最后通过一个例子说明模型的有效性与可靠性.

关　键　词：优势关系；毕达哥拉斯模糊集；三支决策；乐观型毕达哥拉斯模糊三支决策；悲观型毕达哥拉斯模糊三支决策

中图分类号：O159；O225　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2022)12－0022－09

Pythagorean Fuzzy Three-Way Decision Model Based on Dominant Relation

ZHAO Jie[1]，　WAN Renxia[1]，　MIAO Duoqian[2]

1. College of Mathematics and Information Science, North Minzu University, Yinchuan 750021, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China

Abstract: In view of the advantages of Pythagorean fuzzy sets in processing uncertain information, this paper divides the object set based on the dominant relationship of Pythagorean fuzzy sets, and constructs a three-support decision model of Pythagorean fuzzy sets according to three semantics. In order to solve the problem that membership degree and non-membership degree of Pythagorean fuzzy sets are not definite values, a function with risk appetite is designed to convert interval values into deterministic values, and then a three-way decision model based on interval Pythagorean fuzzy sets is constructed, this makes the Pythagorean fuzzy sets model more general and practical by proposed, and it expands and enriches the theory of the Pythagorean fuzzy sets and the three-way decision. Moreover, according to the values of risk pa-

① 收稿日期：2022－07－26

基金项目：国家自然科学基金项目(61662001)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(FWNX04)；宁夏自然科学基金项目(2021AAC03203).

作者简介：赵杰，硕士研究生，主要从事三支决策、模糊集、粗糙集和形式概念分析的研究.

rameters, the optimistic and pessimistic models of the Pythagorean fuzzy three-way decision models are further discussed in this paper. As a result, we show an example to illustrate the validity and feasibility of the model.

Key words: dominant relation; Pythagorean fuzzy sets; three-way decision; optimistic Pythagorean fuzzy three-way decision; pessimistic Pythagorean fuzzy three-way decision

三支决策(Three-Way Decision)是由文献[1]提出的一种决策理论，该理论深刻地刻画了决策者对不确定事物的决策行为. 在实际决策过程中，对具有充分把握做出判断的事物采取接受或拒绝决策，对不能立即做出判断的事物，采取延迟决策，即通过分治模型和序贯策略，采取三分而治和化繁为简的方法来分析和解决复杂决策问题[2]，由于三支决策符合人们的决策思维，它一经提出便受到国内外学者的广泛关注. 文献[3]将三支决策与形式概念分析结合，提出了三支形式概念分析，拓展了三支决策理论. 此外，文献[4]将半概念与三支概念分析结合，提出了必然-可能半三支概念，拓展了三支概念分析理论. 文献[5]将三支决策思想引入到概念簇中，提出了三支概念簇的概念，使其能够检索到更加符合需求的对象.

模糊集(Fuzzy Sets)是由文献[6]提出的. 该理论将经典集合进行了扩充、推广[7]，准确地阐述了模糊性的含义. 然而非隶属度同样发挥着重要作用，文献[8]提出并定义了直觉模糊集的概念及其运算，从而能够细腻地刻画客观世界的模糊性本质，进一步拓展了模糊集. 文献[9]基于隶属度与非隶属度的平方和不超过 1 的假设，提出了毕达哥拉斯模糊集，毕达哥拉斯模糊集相较于直觉模糊集具有更强的表达模糊性的能力并且受到广泛关注，文献[10]在冲突分析中利用毕达哥拉斯模糊数来表达局中人对议题的态度，并进一步应用到群体决策中. 文献[11]对具有多参数的毕达哥拉斯集，提出了新的相似性度量，并将其应用到模式识别.

本文在毕达哥拉斯模糊集的优势关系下，建立了毕达哥拉斯模糊三支决策模型，相较于文献[12]，计算方法简单，实用性强，并且不需要求解条件概率. 根据现实需要，构建了区间毕达哥拉斯模糊三支决策模型. 另外，根据决策者的风险偏好，讨论了乐观型毕达哥拉斯模糊三支决策和悲观型毕达哥拉斯模糊三支决策.

1　预备知识

定义 1[12]　设 $U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个有限非空集合，则 U 上的一个毕达哥拉斯模糊集为

$$P=\{\langle x, u_P(x), v_P(x)\rangle : x\in U\} \tag{1}$$

其中 $u_P(x), v_P(x)\in[0,1]$ 表示 U 中的元素 x 属于毕达哥拉斯模糊集 P 的隶属度和非隶属度，并且满足

$$0\leqslant u_P^2(x)+v_P^2(x)\leqslant 1$$

$\pi_P(x)=\sqrt{1-u_P^2(x)-v_P^2(x)}$ 表示 U 中的元素 x 属于毕达哥拉斯模糊集 P 的犹豫度，称 $p(x)=\langle u_P(x), v_P(x)\rangle$ 为毕达哥拉斯模糊数.

定义 2[13-14]　设 $U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个有限非空集合，对于任意的 $X\subseteq U$，X 上的一个区间毕达哥拉斯模糊集 A 被定义为

$$A=\{\langle x, \tilde{u}_A(x), \tilde{v}_A(x)\rangle : x\in X\}$$

其中 $\tilde{u}_A(x)=[u_A^-(x), u_A^+(x)]\subseteq[0,1]$ 表示 A 的隶属度区间，$\tilde{v}_A(x)=[v_A^-(x), v_A^+(x)]\subseteq[0,1]$ 表示 A 的非隶属度区间，并且满足

$$(u_A^+(x))^2+(v_A^+(x))^2\leqslant 1$$

$\tilde{\pi}_A(x)=[\pi_A^-(x), \pi_A^+(x)]\subseteq[0,1]$ 表示 A 的犹豫度区间，其中

$$\pi_A^-(x)=\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(v_A^+(x))^2)}$$

$$\pi_A^+(x)=\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(v_A^-(x))^2)}$$

称$\langle \tilde{u}_A(x), \tilde{v}_A(x)\rangle$为区间毕达哥拉斯模糊数.

定义 3[12] 设 $p(x)=\langle u_P(x), v_P(x)\rangle$ 为毕达哥拉斯模糊数，其得分函数与精确函数分别为

$$\mathrm{Score}(p(x))=u_P^2(x)-v_P^2(x)$$

$$\mathrm{Accuracy}(p(x))=u_P^2(x)+v_P^2(x)$$

假设 $p_1(x)=\langle u_{P_1}(x), v_{P_1}(x)\rangle$，$p_2(x)=\langle u_{P_2}(x), v_{P_2}(x)\rangle$ 为两个毕达哥拉斯模糊数，则：

(a) 如果 $\mathrm{Score}(p_1(x))<\mathrm{Score}(p_2(x))$，则 $p_1(x)<p_2(x)$；

(b) 如果 $\mathrm{Score}(p_1(x))=\mathrm{Score}(p_2(x))$ 且 $\mathrm{Accuracy}(p_1(x))<\mathrm{Accuracy}(p_2(x))$，则 $p_1(x)<p_2(x)$.

定义 4[15] 假设四元组 $S=(U, A, V_{PF}, f)$ 为一个毕达哥拉斯模糊信息系统，对于 $\forall x_1, x_2\in U$，$\forall a\in A$，x_1, x_2 在属性 a 下对应的毕达哥拉斯模糊数分别为

$$f(x_1, a)=\langle u_a(x_1), v_a(x_1)\rangle$$

$$f(x_2, a)=\langle u_a(x_2), v_a(x_2)\rangle$$

称

$$R^1=\{(x_1, x_2): f(x_1, a)\leqslant f(x_2, a), \forall a\in A\}$$

为毕达哥拉斯模糊信息系统的优势关系，记$[x]_{R^1}$ 为包含元素 x 的优势类，则 S 是一个具有优势关系的毕达哥拉斯模糊信息系统.

定义 5[15] 设U是一个非空集合，R^1 为定义在非空集合U上的优势关系，记$apr=(R^1, U)$为优势空间，对 $\forall X\subseteq U$，其下近似和上近似被分别定义为

$$\underline{apr}_{R^1}(X)=\{x\in U: [x]_{R^1}\subseteq X\} \qquad \overline{apr}_{R^1}(X)=\{x\in U: [x]_{R^1}\cap X\neq\varnothing\}$$

下近似和上近似将论域划分为 3 个部分，即

$$POS(X)=\underline{apr}_{R^1}(X) \qquad NEG(X)=U-\overline{apr}_{R^1}(X) \qquad BND(X)=\overline{apr}_{R^1}(X)-\underline{apr}_{R^1}(X)$$

定义 6[1] 设三元组(U, AT, f)为一个信息系统，其中U为所有对象的有限非空集合，AT 是所有属性的有限非空集合，f 表示U 与 AT 之间的关系. 状态空间 $\Theta=\{X, \neg X\}$ 表示对象 x 是否属于集合 X. a_P, a_B, a_N 分别表示对象x确定属于、可能属于、确定不属于X的行动，不同状态下对应的3种不同行动的风险代价函数如表 1 所示.

表 1 不同行动下的风险代价函数

	X	$\neg X$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

当一个对象 x 属于X时，采取 a_P, a_B, a_N 所需的代价分为$\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$. $\Pr(X\mid[x])$表示对象 x 所在的等价类属于集合 X 的条件概率，对于特定的对象 x，采取一个决策行动的期望损失为 $R(a_i\mid[x])$ $(i=P, B, N)$，如(2)式所示：

$$\begin{aligned}R(a_P\mid[x])&=\lambda_{PP}\Pr(X\mid[x])+\lambda_{PN}\Pr(\neg X\mid[x])\\R(a_B\mid[x])&=\lambda_{BP}\Pr(X\mid[x])+\lambda_{BN}\Pr(\neg X\mid[x])\\R(a_N\mid[x])&=\lambda_{NP}\Pr(X\mid[x])+\lambda_{NN}\Pr(\neg X\mid[x])\end{aligned}\tag{2}$$

由 Bayes 风险决策理论，给出最小决策代价规则：

(P) 如果 $R(a_P\mid[x])\leqslant R(a_B\mid[x])$ 且 $R(a_P\mid[x])\leqslant R(a_N\mid[x])$ 成立，那么 $x\in POS(X)$；

(B) 如果 $R(a_B\mid[x])\leqslant R(a_N\mid[x])$ 且 $R(a_B\mid[x])\leqslant R(a_P\mid[x])$ 成立，那么 $x\in BND(X)$；

(N) 如果 $R(a_N\mid[x])\leqslant R(a_P\mid[x])$ 且 $R(a_N\mid[x])\leqslant R(a_B\mid[x])$ 成立，那么 $x\in NEG(X)$.

另外还需考虑两个因素：$\Pr(X\mid[x])+\Pr(\neg X\mid[x])=1$；$\lambda_{PP}\leqslant\lambda_{BP}\leqslant\lambda_{NP}$，$\lambda_{NN}\leqslant\lambda_{BN}\leqslant\lambda_{PN}$. 因此得

到简化的最小决策代价规则：

(PP) 如果 $\Pr(X \mid [x]) \geqslant \alpha$ 且 $\Pr(X \mid [x]) \geqslant \gamma$ 成立，那么 $x \in POS(X)$；

(PB) 如果 $\Pr(X \mid [x]) \leqslant \alpha$ 且 $\Pr(X \mid [x]) \geqslant \beta$ 成立，那么 $x \in BND(X)$；

(PN) 如果 $\Pr(X \mid [x]) \leqslant \beta$ 且 $\Pr(X \mid [x]) \leqslant \gamma$ 成立，那么 $x \in NEG(X)$.

其中

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})}$$

2　基于优势关系的毕达哥拉斯模糊三支决策模型

对于优势空间，根据定义 6，采取 a_P，a_B 和 a_N 这 3 种决策行动的期望损失分别为

$$\begin{aligned} R(a_P \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{PP}\Pr(X \mid [x]_{R^1}) + \lambda_{PN}\Pr(\neg X \mid [x]_{R^1}) \\ R(a_B \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{BP}\Pr(X \mid [x]_{R^1}) + \lambda_{BN}\Pr(\neg X \mid [x]_{R^1}) \\ R(a_N \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{NP}\Pr(X \mid [x]_{R^1}) + \lambda_{NN}\Pr(\neg X \mid [x]_{R^1}) \end{aligned} \tag{3}$$

在毕达哥拉斯模糊集中，隶属度 u 与非隶属度 v 之和等于 1 是不定的，因此本文参考文献[16] 的方法，设置纠偏参数 $\varepsilon(-1 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$，使得 $u^2 + v^2 + \varepsilon^2 = 1$，对于特定对象 x 的第 i 个毕达哥拉斯模糊数$\langle u_i(x), v_i(x)\rangle$，采取接受、延迟、拒绝决策的期望损失分别如(4) 式所示

$$\begin{aligned} R_i(a_P \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{PP}u_i(x) + \lambda_{PN}v_i(x) \\ R_i(a_B \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{BP}u_i(x) + \lambda_{BN}v_i(x) \\ R_i(a_N \mid [x]_{R^1}) &= \lambda_{NP}u_i(x) + \lambda_{NN}v_i(x) \end{aligned} \tag{4}$$

(PP′) 如果采取接受决策，则有

$$\begin{cases} u_i^2(x) + v_i^2(x) + \varepsilon_i^2(x) = 1 \\ R(a_P \mid [x]_{R^1}) \leqslant R(a_B \mid [x]_{R^1}) \\ R(a_P \mid [x]_{R^1}) \leqslant R(a_N \mid [x]_{R^1}) \\ 0 \leqslant \lambda_{PP} \leqslant \lambda_{BP} < \lambda_{NP} \\ 0 \leqslant \lambda_{NN} \leqslant \lambda_{BN} < \lambda_{PN} \end{cases} \tag{5}$$

进一步整理(5) 式后得

$$u_i(x) \geqslant \sqrt{\frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2(1 - \varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2}}$$

(PB′) 类似于(PP′)，若采取延迟决策，则经化简后可得

$$u_i(x) \leqslant \sqrt{\frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2(1 - \varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2}}$$

$$u_i(x) \geqslant \sqrt{\frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})^2(1 - \varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BP})^2 + (\lambda_{BN} - \lambda_{NN})^2}}$$

(PN′) 类似于(PP′)，若采取拒绝决策，则经化简后可得

$$u_i(x) \leqslant \sqrt{\frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})^2(1 - \varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BP})^2 + (\lambda_{BN} - \lambda_{NN})^2}}$$

为保证边界域有解空间，令 $\alpha_i(x) > \beta_i(x)$，从而有

$$\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{BP}}{\lambda_{BN}-\lambda_{NN}}<\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{PP}}{\lambda_{PN}-\lambda_{NN}}<\frac{\lambda_{BP}-\lambda_{PP}}{\lambda_{PN}-\lambda_{BN}}$$

因此

$$0\leqslant\beta_i(x)<\gamma_i(x)<\alpha_i(x)\leqslant 1$$

当 $u_i(x)\geqslant\alpha_i(x)$ 时，采取接受决策；当 $\beta_i(x)<u_i(x)<\alpha_i(x)$ 时，采取延迟决策；当 $u_i(x)\leqslant\beta_i(x)$ 时，采取拒绝决策. 因此得到决策规则1：

决策规则1 设 $S=(U, A, V_{PF}, f)$ 为毕达哥拉斯模糊信息系统，对于 $\forall X\subseteq U$，$\forall x\in X$，

(i) 当 $u_i(x)\geqslant\alpha_i(x)$ 时，采取接受决策；

(ii) 当 $\beta_i(x)<u_i(x)<\alpha_i(x)$ 时，采取延迟决策；

(iii) 当 $u_i(x)\leqslant\beta_i(x)$ 时，采取拒绝决策.

其中

$$\alpha_i(x)=\sqrt{\frac{(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})^2(1-\varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{BP}-\lambda_{PP})^2+(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})^2}}$$

$$\beta_i(x)=\sqrt{\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})^2(1-\varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{PN}-\lambda_{BP})^2+(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})^2}}$$

$$\gamma_i(x)=\sqrt{\frac{(\lambda_{PN}-\lambda_{NN})^2(1-\varepsilon_i^2(x))}{(\lambda_{PN}-\lambda_{PP})^2+(\lambda_{PN}-\lambda_{NN})^2}}$$

ε_i 为纠偏参数，且满足 $u_i^2+v_i^2+\varepsilon_i^2=1$.

3 区间毕达哥拉斯模糊三支决策模型

当隶属度与非隶属度为区间值时，决策者采取 a_P，a_B 和 a_N 这3种决策行动的期望损失分别为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}(a_p\mid[x]_{R^1})=\\
&\lambda_{PP}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{PN}\widetilde{v}_A(x)=\\
&\lambda_{PP}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{PN}\sqrt{1-((\widetilde{u}_A(x))^2+(\widetilde{\varepsilon}_A(x))^2)}=\\
&[\lambda_{PP}u_A^-(x)+\lambda_{PN}\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)},\lambda_{PP}u_A^+(x)+\lambda_{PN}\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}]\\
&\widetilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1})=\\
&\lambda_{BP}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{BN}\widetilde{v}_A(x)=\\
&\lambda_{BP}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{BN}\sqrt{1-((\widetilde{u}_A(x))^2+(\widetilde{\varepsilon}_A(x))^2)}=\\
&[\lambda_{BP}u_A^-(x)+\lambda_{BN}\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)},\lambda_{BP}u_A^+(x)+\lambda_{BN}\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}]\\
&\widetilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1})=\\
&\lambda_{PN}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{NN}\widetilde{v}_A(x)=\\
&\lambda_{PN}\widetilde{u}_A(x)+\lambda_{NN}\sqrt{1-((\widetilde{u}_A(x))^2+(\widetilde{\varepsilon}_A(x))^2)}=\\
&[\lambda_{PN}u_A^-(x)+\lambda_{NN}\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)},\lambda_{PN}u_A^+(x)+\lambda_{NN}\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}]
\end{aligned}$$

由于 $\widetilde{u}_A(x)$，$\widetilde{v}_A(x)$ 为区间值，从而导致3种决策下的期望损失会在一定区间内取值，然而在实际决策中需要用到具体的隶属度与非隶属度，本文借鉴文献[17]的方法来实现区间值向确定值的转化.

定义7[17] 对于任一区间[a, b]，风险参数 $\theta\in[0, 1]$，有

$$f_\theta=(1-\theta)a+\theta b$$

当 $\theta=0$ 时，函数值为区间左端点；当 $\theta=1$ 时，函数值为区间右端点；当 $0<\theta<1$ 时，函数值为区间 $[a,b]$ 上的任意实数. 因此 3 种决策下的区间损失函数就可以转化为实值损失函数，分别为 $f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))$，$f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))$，$f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))$. 根据 Bayes 风险决策理论，可得：

(PP″) 如果 $f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))$，$f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))$ 成立，那么 $x\in POS(X)$；

(PB″) 如果 $f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))$，$f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))$ 成立，那么 $x\in BND(X)$；

(PN″) 如果 $f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))$，$f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))$ 成立，那么 $x\in NEG(X)$.

(i) 对于规则(PP″)，

$$\begin{cases}f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_B\mid[x]_{R^1}))\\ f_\theta(\tilde{R}(a_P\mid[x]_{R^1}))\leqslant f_\theta(\tilde{R}(a_N\mid[x]_{R^1}))\\ 0\leqslant\lambda_{PP}\leqslant\lambda_{BP}<\lambda_{NP}\\ 0\leqslant\lambda_{NN}\leqslant\lambda_{BN}<\lambda_{PN}\end{cases}\tag{6}$$

(6) 式化简为

$$f_\theta(\tilde{u}_A(x))\geqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

(ii) 类似于(i)，对于规则(PB″)，经化简后得

$$f_\theta(\tilde{u}_A(x))\geqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

$$f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

(iii) 类似于(i)，对于规则(PN″)，经化简后得

$$f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

为保证边界域有解空间，令 $\alpha^1>\beta^1$，则当 $f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\beta^1$ 时，$x\in NEG(X)$；当 $\beta^1\leqslant f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\alpha^1$ 时，$x\in BND(X)$；当 $f_\theta(\tilde{u}_A(x))\geqslant\alpha^1$ 时，$x\in POS(X)$. 因此可以得到决策规则 2：

决策规则 2　在毕达哥拉斯模糊系统 $S=(U,A,V_{PF},f)$ 中，对于任意的 $x\in U$，有：

(i) 当 $f_\theta(\tilde{u}_A(x))\geqslant\alpha^1$ 时，采取接受决策；

(ii) 当 $\beta^1\leqslant f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\alpha^1$ 时，采取延迟决策；

(iii) 当 $f_\theta(\tilde{u}_A(x))\leqslant\beta^1$ 时，采取拒绝决策.

其中

$$\alpha^1=\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

$$\beta^1=\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})f_\theta(\sqrt{1-((\tilde{u}_A(x))^2+(\tilde{\varepsilon}_A(x))^2)})}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

$\tilde{\varepsilon}$ 为区间纠偏参数，且满足

$$(u_A^+(x))^2+(v_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2=1$$

$$(u_A^-(x))^2+(v_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2=1$$

由定义 7 知，当风险参数 $\theta=0$ 时，决策时要求隶属度最小，将集合元素划分到正域、负域或边界域的期望损失最小；当 $\theta=1$ 时，决策时要求隶属度最大，将集合元素划分到正域、负域或边界域的期望损失最大. 由此，进一步可以得到上述模型的两类重要类型：

3.1 乐观型区间毕达哥拉斯模糊三支决策

令风险参数 $\theta=0$，当 $x\in POS(X)$ 时，对于(PP″)有 $f_0(\tilde{u}_A(x))\geqslant\alpha^1$，进而有

$$u_A^-(x)\geqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)}}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

当 $x\in BND(X)$ 时，对于(PB″)有 $\beta^1\leqslant f_0(\tilde{u}_A(x))\leqslant\alpha^1$，进而有

$$u_A^-(x)\geqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)}}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

$$u_A^-(x)\leqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)}}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

当 $x\in NEG(X)$ 时，对于(PN″)有 $f_0(\tilde{u}_A(x))\leqslant\beta^1$，进而有

$$u_A^-(x)\leqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})\sqrt{1-((u_A^+(x))^2+(\varepsilon_A^+(x))^2)}}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

3.2 悲观型区间毕达哥拉斯模糊三支决策

令风险参数 $\theta=1$，当 $x\in POS(X)$ 时，对于(PP″)，有 $f_1(\tilde{u}_A(x))\geqslant\alpha^1$，从而有

$$u_A^+(x)\geqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

当 $x\in BND(X)$ 时，对于(PB″)，有 $\beta^1\leqslant f_1(\tilde{u}_A(x))\leqslant\alpha^1$，进一步得

$$u_A^+(x)\geqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

$$u_A^+(x)\leqslant\frac{(\lambda_{BN}-\lambda_{PN})\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}}{\lambda_{PP}-\lambda_{BP}}$$

当 $x\in NEG(X)$ 时，对于(PN″)，有 $f_1(\tilde{u}_A(x))\leqslant\beta^1$，进而有

$$u_A^+(x)\leqslant\frac{(\lambda_{NN}-\lambda_{BN})\sqrt{1-((u_A^-(x))^2+(\varepsilon_A^-(x))^2)}}{\lambda_{BP}-\lambda_{PN}}$$

4 案例分析

例 1 U_1 中含有 8 个数据对象，如表 2 所示.

表 2 U_1 中的数据信息

U_1	$\langle u, v\rangle$
x_1	⟨0.6，0.7⟩
x_2	⟨0.8，0.3⟩
x_3	⟨0.2，0.8⟩
x_4	⟨0.5，0.7⟩
x_5	⟨0.4，0.8⟩
x_6	⟨0.7，0.6⟩
x_7	⟨0.4，0.5⟩
x_8	⟨0.6，0.5⟩

不同状态下对应的 3 种不同行动的代价损失函数取值分别为 $\lambda_{PP}=0.6$，$\lambda_{PN}=2.2$，$\lambda_{BP}=1.3$，$\lambda_{BN}=1.4$，$\lambda_{NP}=2.2$，$\lambda_{NN}=0.4$. 在毕达哥拉斯模糊三支决策模型中，根据决策规则 1，所得决策结果如表 3 所示.

表 3　决策结果

$POS(X)$	$BND(X)$	$NEG(X)$
$\{x_2, x_6\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_7, x_8\}$

例 2　U_2 中含有 7 个数据对象，如表 4 所示.

表 4　U_2 中的数据信息

U_2	$\langle\tilde{u}, \tilde{v}\rangle$
y_1	$\langle[0.2, 0.6], [0.4, 0.7]\rangle$
y_2	$\langle[0.6, 0.8], [0.1, 0.2]\rangle$
y_3	$\langle[0.3, 0.7], [0.6, 0.7]\rangle$
y_4	$\langle[0.7, 0.9], [0.1, 0.3]\rangle$
y_5	$\langle[0.4, 0.5], [0.3, 0.6]\rangle$
y_6	$\langle[0.1, 0.2], [0.6, 0.8]\rangle$
y_7	$\langle[0.2, 0.4], [0.6, 0.8]\rangle$

不同状态下对应的 3 种不同行动的代价损失函数的取值分别为 $\lambda_{PP}=0.3$，$\lambda_{PN}=3.0$，$\lambda_{BP}=1.1$，$\lambda_{BN}=1.4$，$\lambda_{NP}=3.0$，$\lambda_{NN}=0.6$.

乐观型决策者

当风险参数 $\theta=0$ 时，根据乐观型区间毕达哥拉斯模糊三支决策模型的决策规则，相应的决策结果如表 5 所示.

表 5　$\theta=0$ 时的决策结果

$POS(X)$	$BND(X)$	$NEG(X)$
$\{y_2, y_4\}$	$\{y_3, y_5\}$	$\{y_1, y_6, y_7\}$

悲观型决策者

当风险参数 $\theta=1$ 时，由悲观型区间毕达哥拉斯模糊三支决策模型的决策规则，相应的决策结果如表 6 所示.

表 6　$\theta=1$ 时的决策结果

$POS(X)$	$BND(X)$	$NEG(X)$
$\{y_2, y_6\}$	$\{y_1, y_3, y_4, y_5\}$	$\{y_7, y_8\}$

5　总结

本文基于毕达哥拉斯模糊集的优势关系，构建了集合优势类，对论域进行了划分. 根据 Bayes 最小风险决策理论，构建了毕达哥拉斯模糊三支决策模型，并对阈值进行了讨论. 进一步构建了区间毕达哥拉斯模糊三支决策模型，讨论了该模型的乐观型和悲观型两类特殊情况. 本文是对三支决策理论的有益补充，细腻地刻画了不同风险偏好下的决策问题.

毕达哥拉斯模糊集具有较强的处理不确定信息的能力，用毕达哥拉斯模糊数表示对象与属性之间的关系具有重要意义. 然而在现实决策中，并不能确定对象与属性关系的真假，换言之，在这种形式背景下会出现真、假隶属度，如何确定对象与属性间的真实关系并进行决策将是我们未来所研究的内容.

参考文献:

[1] YAO Y Y. Three-Way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory [C]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2009: 642-649.

[2] 索郎王青, 杨海龙, 姚一豫. 三元思维: 三支决策理论与实践 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2022, 50(3): 7-16.

[3] QI J, WEI L, YAO Y. Three-Way Formal Concept Analysis [C]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2014: 732-741.

[4] 魏玲, 王振, 祁建军, 等. 必然-可能半三支概念 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 12-20.

[5] 智慧来, 徐彤, 李逸楠. 基于三支概念簇的知识表示 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 10-18.

[6] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[7] 张晓燕, 刘峥, 侯江龙. 直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(9): 168-177.

[8] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[9] YAGER R R, ABBASOV A M. Pythagorean Membership Grades, Complex Numbers and Decision Making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.

[10] LANG G M, MIAO D Q, FUJITA H. Three-Way Group Conflict Analysis Based on Pythagorean Fuzzy Sets Theory [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 28(3): 447-461.

[11] PENG X D, GARG H. Multiparametric Similarity Measures on Pythagorean Fuzzy Sets with Applications to Pattern Recognition [J]. Applied Intelligence, 2019, 49(12): 4058-4096.

[12] 赵蒙, 张少谱, 冯涛. 基于优势关系的毕达哥拉斯模糊集上的三支决策 [J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(6): 109-129.

[13] 李龙妹, 郑婷婷, 尹文静. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的不确定性研究 [J]. 山西大学学报(自然科学版), 2020, 43(4): 906-913.

[14] 李龙妹, 郑婷婷, 尹文静. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的熵、相似性度量及其应用 [J]. 山西大学学报(自然科学版), 2020, 43(4): 920-928.

[15] 张娇娇, 张少谱, 冯涛. 毕达哥拉斯模糊系统的优势关系及其约简 [J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(3): 96-110.

[16] 陈玉金, 徐吉辉, 史佳辉, 等. 基于直觉犹豫模糊集的三支决策模型及其应用 [J]. 计算机科学, 2020, 47(8): 144-150.

[17] 薛占熬, 张敏, 赵丽平, 等. 集对优势关系下多粒度决策粗糙集的可变三支决策模型 [J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 157-166.

责任编辑　廖坤