

基于群体共识的语言直觉模糊三支决策方法^①

魏子钦¹, 郭鑫滢², 黄煜琪², 刘久兵²

1. 汕头大学 理学院, 广东 汕头 515063; 2. 汕头大学 商学院, 广东 汕头 515063

摘要: 针对基于语言直觉模糊数评价损失函数的三支群决策问题, 提出一种具有群体共识的语言直觉模糊三支决策方法. 首先, 基于海明距离定义了语言直觉模糊相似测度(语言直觉模糊数), 进而构建基于非相似度最小的最优集成模型并导出权重迭代公式. 在此基础上, 设计一种实现语言直觉模糊综合损失函数一致性的迭代算法且理论上证明了该算法的收敛性. 依据迭代算法获得满足一致性的综合损失函数, 建立确定语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型, 并提出基于群体共识(即所谓群体一致性)的语言直觉模糊三支决策方法. 最后, 算例分析和仿真实验验证了所提出方法的有效性.

关键词: 语言直觉模糊数; 相似测度; 最优集成模型; 群体共识; 三支决策

中图分类号: TP18

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)12-0042-15

Method for Linguistic Intuitionistic Fuzzy Three-Way Decision Based on Group Consensus

WEI Ziqin¹, GUO Xinying², HUANG Yuqi², LIU Jiubing²

1. College of Science, Shantou University, Shantou Guangdong 515063, China;

2. School of Business, Shantou University, Shantou Guangdong 515063, China

Abstract: With respect to three-way group decision problem, which is based on linguistic intuitionistic fuzzy evaluation loss functions, in this paper, we proposed a linguistic intuitionistic fuzzy three-way decision method under group consensus. First, we defined a linguistic intuitionistic fuzzy similarity measure based on the Hamming distance, and established an optimal aggregation model based on the minimum dissimilarity to induce a weight iterative formula. Second, we designed an iterative algorithm to achieve a group consensus of collective loss functions, and the algorithm is theoretically proven to be convergent. On this basis, we obtained a collective consensus loss function. Third, we established a single optimization model for determining both thresholds of three-way group decisions in linguistic intuitionistic fuzzy envi-

① 收稿日期: 2022-08-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(62106135); 广东省基础与应用基础研究青年项目(2020A1515110434); 广东省哲学社会科学“十三五”规划青年项目(GD20YGL13); 汕头大学科研启动经费项目(STF19025).

作者简介: 魏子钦, 大学本科生, 主要从事三支决策研究.

通信作者: 刘久兵, 博士, 讲师, 硕士研究生导师.

ronment, which leads to a proposal of linguistic intuitionistic fuzzy three-way decision method under group consensus. Finally, an example and related experiments were performed to show the effectiveness of our method.

Key words: linguistic intuitionistic fuzzy numbers; similarity measure; optimal aggregation model; group consensus; three-way decision

1990 年, 加拿大华人学者姚一豫教授^[1] 基于贝叶斯风险决策理论提出决策粗糙集模型, 该模型将经典粗糙集中的等价关系拓展为概率包含关系, 使其对数据的处理具有容错能力和敏感性特征, 更适合处理代价损失敏感的评估决策问题. 随着决策粗糙集模型的深入研究, 三支决策概念^[2] 便应运而生, 它在传统接受决策和拒绝决策的基础上增加了延迟决策, 是传统二支决策的拓展^[3]. 由于比较符合人类自然语言信息的处理, 三支决策近年来引起了国内外学者的广泛关注与研究, 并在信息过滤^[4]、冲突分析^[5]、概念学习^[6]、数据聚类^[7]、推荐系统^[8]、频繁模式挖掘^[9]、粒计算^[10]、特征选择^[11] 和信息系统^[12] 等领域得到成功应用.

在三支决策理论与方法中, 概率阈值对 (α, β) 的确定是一个非常重要的研究问题. 从已有的文献来看, 三支决策概率阈值确定方法大多是基于单个决策者给出的代价损失函数来获得的^[2-3, 10-15]. 然而, 由于单个决策者给出的代价损失函数具有单一性和片面性, 且难以反映真实代价问题, 而群决策能够集成每个专家的智慧, 能更加真实地反映综合代价损失. 近年来群决策环境下概率阈值的确定与三支决策方法的研究引起了学者的关注并取得一些成果. Liang 等^[16] 从信息粒度的角度出发, 采用区间值信息粒化的方法刻画群体中专家个体的损失函数矩阵及集成矩阵, 提出了一种基于信息粒的三支群决策方法; Sun 等^[17] 在满足最小风险决策规则的基础上, 构建具有损失函数为语言信息的决策理论粗糙集模型并提出群决策下的三支决策方法; Zhang 等^[18] 基于最优粒度原则提出具有区间值决策理论粗糙集的三支决策框架并将其推广到群体决策中, 进而提出三支群决策方法; Pang 等^[19] 基于多元粒化和三支决策的思想, 建立基于区间值直觉不确定语言环境下的多属性群体决策方法; Liu 等^[20] 采用直觉模糊加权平均算子集成不同决策者提供的区间直觉模糊评价信息, 获得区间直觉模糊综合损失函数评价结果, 基于最优化方法建立一种确定三支决策概率阈值及规则的优化模型; Wang 等^[21] 采用社会网络分析方法研究专家群体观点一致性的实现机制, 进而提出了一种序贯三支多属性群决策方法; Liu 等^[22] 采用直觉模糊数相似测度定义了专家群体的一致性指标, 设计了基于凸组合的评价更新机制及两步策略下的直觉模糊三支群决策方法; Liang 等^[23] 构建了基于层次社会网络分析的评价调整机制, 并采用不一致决策者与领导者之间的最大贴近来建立实现专家一致性模型, 从而获得三支分类规则.

从现有的三支群决策方法可知, 大多数研究是从给定专家权重, 修改专家评价的角度来考虑的, 即采用集成方法来集成不同专家给出的评价信息, 从而获得综合损失函数评价结果. 当专家群体一致性指标达不到一致性要求时, 通常采用修改个体损失评价信息的策略来提高专家群体的一致性. 但是, 这种修改策略通常难以保证算法的收敛性, 并且具有一定的主观性^[24], 而模糊数为处理这种主观性提供了有效的方法^[25]. 因此, 本研究采用语言直觉模糊数来刻画损失函数, 从调整专家权重的视角设计提高专家群体综合损失函数一致性的迭代算法, 同时从理论上证明了该算法的收敛性. 采用该算法可获得具有群体共识的综合损失函数. 进而根据单一优化模型的方法建立语言直觉模糊信息下的三支群决策阈值确定模型, 并获得三支决策知识.

1 预备知识

1.1 基于决策粗糙集的三支决策模型

决策粗糙集模型由 2 种状态和 3 种行动构成^[2]. 设状态集 $X = \{C, \neg C\}$, 表示对象属于 C 和 $\neg C$ 两种

状态. 行动集记为 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$, 其中 a_P, a_B 和 a_N 分别表示对象属于接受决策、延迟决策和拒绝决策的 3 种行动, 即: $x \in \text{POS}(C)$ 、 $x \in \text{BND}(C)$ 和 $x \in \text{NEG}(C)$. 这 3 种行动在 2 种状态下对应的损失可采用 3×2 矩阵表示, 具体见表 1.

表 1 2 种状态 3 种行动下的决策代价损失矩阵

A	$C(P)$	$\neg C(N)$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

表 1 中 $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}$ 和 λ_{NP} 表示对象属于状态 C 时, 采取 a_P, a_B 和 a_N 3 种行动的代价损失. 类似地, 当 $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}$ 和 λ_{NN} 表示对象不属于状态 C 时, 分别采取 3 种行动对应的损失. 设 $\text{Pr}(C \mid [x])$ 为对象 x 隶属于状态 C 的条件概率, 对象 x 通常用等价类 $[x]$ 表示, 则对象 x 的决策代价损失函数 $R(a_* \mid [x])$ ($*$ = P, B, N) 的计算公式为:

$$R(a_* \mid [x]) = \lambda_{*P} \text{Pr}(C \mid [x]) + \lambda_{*N} \text{Pr}(\neg C \mid [x])$$

根据贝叶斯最小风险决策理论, 可得以下决策规则^[2]:

- P 当 $R(a_P \mid [x]) \leq R(a_B \mid [x])$ 且 $R(a_P \mid [x]) \leq R(a_N \mid [x])$ 时, $x \in \text{POS}(C)$;
- B 当 $R(a_B \mid [x]) \leq R(a_P \mid [x])$ 且 $R(a_B \mid [x]) \leq R(a_N \mid [x])$ 时, $x \in \text{BND}(C)$;
- N 当 $R(a_N \mid [x]) \leq R(a_P \mid [x])$ 且 $R(a_N \mid [x]) \leq R(a_B \mid [x])$ 时, $x \in \text{NEG}(C)$.

上述规则 P-N 称之为三支决策^[2-3]. 基于 $\text{Pr}(C \mid [x]) + \text{Pr}(\neg C \mid [x]) = 1$, 规则 P-N 通常考虑如下合理情形:

$$\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} \leq \lambda_{NP}$$

$$\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} \leq \lambda_{PN}$$

进一步可简化为规则 P1-N1:

- P1 当 $\text{Pr}(C \mid [x]) \geq \alpha$ 且 $\text{Pr}(C \mid [x]) \geq \gamma$ 时, $x \in \text{POS}(C)$;
- B1 当 $\text{Pr}(C \mid [x]) \leq \alpha$ 且 $\text{Pr}(C \mid [x]) \geq \beta$ 时, $x \in \text{BND}(C)$;
- N1 当 $\text{Pr}(C \mid [x]) \leq \beta$ 且 $\text{Pr}(C \mid [x]) \leq \gamma$ 时, $x \in \text{NEG}(C)$.

其中 α, β 和 γ 可表达为:

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})}$$

其中: 阈值 α, β 和 γ 满足 $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ 且 $0 \leq \gamma \leq 1$. 此外, 从规则 B1 中可知, 阈值 α 和 β 存在两种情形: (I) $\alpha > \beta$ 和 (II) $\alpha \leq \beta$.

(I) $\alpha > \beta$, 满足: $(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})(\lambda_{NP} - \lambda_{BP}) > (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})$ 可得 $\alpha > \gamma > \beta$, 此时规则 P1-N1 进一步简化为:

- P2 当 $\text{Pr}(C \mid [x]) \geq \alpha$ 时, $x \in \text{POS}(C)$;
- B2 当 $\beta < \text{Pr}(C \mid [x]) < \alpha$ 时, $x \in \text{BND}(C)$;
- N2 当 $\text{Pr}(C \mid [x]) \leq \beta$ 时, $x \in \text{NEG}(C)$.

(II) 当 $\alpha \leq \beta$, 满足: $(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})(\lambda_{NP} - \lambda_{BP}) > (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})$. 此时规则 P1-N1 简化为二支决策如下:

P3 如果 $\Pr(C \mid [x]) \geq \gamma$, $x \in \text{POS}(C)$;

N3 如果 $\Pr(C \mid [x]) < \gamma$ 时, $x \in \text{NEG}(C)$.

1.2 语言直觉模糊数

在介绍语言直觉模糊数之前, 首先给出直觉模糊数的定义^[26].

定义 1 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为某非空论域. 则 U 上的直觉模糊集 F 定义为:

$$F = \{(x, \mu_F(x), \nu_F(x)) \mid x \in U\}$$

其中: $\mu_F(x) \in [0, 1]$ 和 $\nu_F(x) \in [0, 1]$ 分别表示 x 属于模糊集 F 的隶属度和非隶属度. 对于 $\forall x \in U$, 满足 $\mu_F(x) + \nu_F(x) \in [0, 1]$. 特别地, $\tilde{\gamma} = (\mu, \nu)$ 被称为直觉模糊数 (intuitionistic fuzzy number, IFN)^[15].

基于直觉模糊数的概念, 给出语言直觉模糊数的定义^[27].

定义 2 设 $S = \{s_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, g\}$ 和 $\tilde{S} = \{s_i \mid i \in [0, g]\}$ 分别为离散和连续的语言术语集. 如果 $s_u, s_v \in \tilde{S}$ 且 $u + v \leq g$, 那么 $\gamma = (s_u, s_v)$ 称之为语言直觉模糊数. 特别地, 若 $s_u, s_v \in S$, 则 $\gamma = (s_u, s_v)$ 为原始语言直觉模糊数. 否则, 为虚拟语言直觉模糊数.

2 基于群体共识的语言直觉模糊三支决策方法

2.1 语言直觉模糊三支群决策问题描述

考虑到语言直觉模糊数在刻画不确定损失函数方面相比于其他评价更灵活, 且更符合人类自然语言的表达. 为此, 本研究采用语言直觉模糊数来评价损失函数, 进而形成语言直觉模糊三支群决策问题, 该问题包括 $\Omega = \{C, \neg C\} \triangleq \{P, N\}$ 2 种状态和 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$ 3 种行动. 专家在 2 种状态 ($\circ = P, N$) 下采取 3 种行动 a_* ($* = P, B, N$) 将会产生相应的 6 种损失: $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}, \lambda_{NN}, \lambda_{BN}$ 和 λ_{PN} . 邀请 n ($n \geq 2$) 位专家针对 m 个对象分别给出语言直觉模糊损失评价. 设 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是由 n 个专家组成的集合, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 是由 m 个对象组成的集合, $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是专家权重向量, 其中 $\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$ 且 $0 \leq \omega_k \leq 1$. 为了获得具有群体共识的综合损失函数与三支决策规则, 专家需要提供代价损失函数评价. 实际中, 专家们能基于离散语言术语 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ 采用语言直觉模糊数表达他们的偏好. 设专家 e_k 给出的代价损失函数评价值为 $\lambda_{ij} = (s_{u_{ij}}, s_{v_{ij}})$, $k = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$; j 表示第 j 个代价损失函数, 且 $j = 1, 2, \dots, 6$. 其中 $s_{u_{ij}} \in S$, $s_{v_{ij}} \in S$, $0 \leq u_{ij}^k + v_{ij}^k \leq g$. 专家 e_k 针对 m 个对象 x_i 提出的代价损失函数评价 λ_{ij}^k 构成专家评价矩阵 E_k , 其中 $E_k = (\lambda_{ij}^k)_{m \times 6}$ 为:

$$E_k = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_k & \lambda_{PP}(1) & \lambda_{BP}(2) & \lambda_{NP}(3) & \lambda_{NN}(4) & \lambda_{BN}(5) & \lambda_{PN}(6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{11}^k & \lambda_{12}^k & \lambda_{13}^k & \lambda_{14}^k & \lambda_{15}^k & \lambda_{16}^k \\ \lambda_{21}^k & \lambda_{22}^k & \lambda_{23}^k & \lambda_{24}^k & \lambda_{25}^k & \lambda_{26}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{i1}^k & \lambda_{i2}^k & \lambda_{i3}^k & \lambda_{i4}^k & \lambda_{i5}^k & \lambda_{i6}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1}^k & \lambda_{m2}^k & \lambda_{m3}^k & \lambda_{m4}^k & \lambda_{m5}^k & \lambda_{m6}^k \end{pmatrix} \end{matrix}$$

为了表达方便, 将第 k 个专家的评价矩阵 E_k 简记为 $E_k = (E_{k1}, E_{k2}, \dots, E_{ki}, \dots, E_{km})^T$, 其中 E_{ki} 为矩阵 E_k 中第 i 个对象对应的 6 个代价损失函数构成的行向量. 采用最优集成方法将 n 个专家提供的评价矩阵 E_k 进行集成, 从而获得具有群体共识的综合损失函数评价矩阵 E , 可表达为:

$$\begin{matrix} & \lambda_{PP}(1) & \lambda_{BP}(2) & \lambda_{NP}(3) & \lambda_{NN}(4) & \lambda_{BN}(5) & \lambda_{PN}(6) \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & \lambda_{16} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \lambda_{25} & \lambda_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \lambda_{i3} & \lambda_{i4} & \lambda_{i5} & \lambda_{i6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \lambda_{m3} & \lambda_{m4} & \lambda_{m5} & \lambda_{m6} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

为了表达方便, 专家综合评价矩阵 $\mathbf{E}$ 可类似地表达为 $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \cdots, \mathbf{E}_i, \cdots, \mathbf{E}_m)^\top$, 其中 $\mathbf{E}_i$ 为矩阵 $\mathbf{E}$ 中第 i 个对象对应的 6 个代价损失函数构成的行向量.

根据上述问题和表达方式, 下面给出语言直觉模糊相似测度, 并采用该测度来度量专家个体给出的语言直觉模糊评价矩阵 $\mathbf{E}_k$ 与群体综合评价矩阵 $\mathbf{E}$ 之间的相似性, 进而构建群体一致度指标, 且采用该指标度量群体的综合一致性水平, 进而建立基于语言直觉模糊相似度的最优集成模型.

2.2 基于语言直觉模糊相似度的最优集成模型

根据海明距离, 首先给出语言直觉模糊损失函数距离的定义.

定义 3 设 $\mathbf{E}_{ki}$ 为第 $k(k=1, 2, \cdots, n)$ 个专家关于第 $i(i=1, 2, \cdots, m)$ 个对象的 6 个代价损失函数构成的行向量, $\mathbf{E}_i$ 为 n 个专家对第 i 个对象的 6 个综合代价损失函数构成的行向量, 则 $\mathbf{E}_{ki}$ 与 $\mathbf{E}_i$ 之间的距离测度定义为:

$$d(\mathbf{E}_{ki}, \mathbf{E}_i) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^6 (|f(s_{u_{kj}}) - f(s_{uij})| + |f(s_{v_{kj}}) - f(s_{vij})|)$$

其中 f 为语言术语集 $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_g\}$ 到实数集 R 之间的映射. 为了计算方便, 假设映射 f 为 $f(s_u) = u/g, f(s_v) = v/g$.

根据定义 3, 构建专家个体语言直觉模糊评价矩阵 $\mathbf{E}_k$ 和群体综合评价矩阵 $\mathbf{E}$ 之间的相似测度 $S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})$.

定义 4 设 $\mathbf{E}_k$ 为第 $k(k=1, 2, \cdots, n)$ 个专家 e_k 给出的语言直觉模糊评价矩阵, $\mathbf{E}$ 为群体综合评价矩阵. 则 $\mathbf{E}_k$ 与 $\mathbf{E}$ 之间的相似测度 $S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})$ 定义为:

$$S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d(\mathbf{E}_{ki}, \mathbf{E}_i)$$

基于定义 4, 构建群体一致度指标 GCI.

定义 5 设 $S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})$ 为专家 e_k 给出的语言直觉模糊评价矩阵 $\mathbf{E}_k$ 和群体综合评价矩阵 $\mathbf{E}$ 之间的相似测度, 则由 n 个专家构成的群体一致度指标 GCI 定义为:

$$GCI = \frac{\sum_{k=1}^n S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})}{n}$$

根据 Lee^[28] 的研究成果, 建立基于第 k 个专家给出的语言直觉模糊评价矩阵 $\mathbf{E}_k$ 与群体综合评价矩阵 $\mathbf{E}$ 之间非相似度最小的最优集成模型. 具体为:

$$\begin{aligned} \min Z_{t,c}(W, \mathbf{E}) &= \sum_{k=1}^n (\omega_k)^t (c - S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} W = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \\ \sum_{k=1}^n \omega_k = 1, \omega_k \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $t > 1$ 为整数且 $c > 1$ 是常数.

根据模型(1), 可得命题 1^[28].

命题 1 当专家权重 $\omega_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 和群体综合评价矩阵 E 满足下列关系时, 模型(1) 达到局部最小值.

$$\omega_k = \frac{(1/(c - S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E})))^{1/(t-1)}}{\sum_{l=1}^n (1/(c - S(\mathbf{E}_l, \mathbf{E})))^{1/(t-1)}}$$

基于命题 1, 设计一种实现语言直觉模糊综合损失函数一致性的迭代算法, 并证明该算法的收敛性.

2.3 基于最优集成模型的综合损失函数一致性实现算法及收敛性证明

算法 1: 基于最优集成模型的综合损失函数一致性实现算法

输入: 专家 e_k 的个体评价矩阵 $\mathbf{E}_k (k = 1, 2, \dots, n)$

输出: 具有群体共识的综合损失函数矩阵 $\mathbf{E}$

随机生成 $\mathbf{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top$, 其中 $0 \leq \omega_k \leq 1$ 且 $\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$.

$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{W}$,

$r = 0$,

$$\mathbf{E}^{(0)} = LIFWA_{\mathbf{W}^{(0)}}(\mathbf{E}_k) = \sum_{k=1}^n \omega_k^{(0)} \mathbf{E}_k,$$

$$GCI^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}^{(0)}).$$

while $r \geq 0$

$$\omega_k^{(r+1)} = \frac{(1/(c - S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}^{(r)})))^{1/(t-1)}}{\sum_{l=1}^n (1/(c - S(\mathbf{E}_l, \mathbf{E}^{(r)})))^{1/(t-1)}}$$

$$\text{计算 } \mathbf{E}^{(r+1)} = LIFWA_{\mathbf{W}^{(r+1)}}(\mathbf{E}_k) = \sum_{k=1}^n \omega_k^{(r+1)} \mathbf{E}_k$$

$$\text{计算 } GCI^{(r+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}^{(r+1)})$$

if $|GCI^{(r+1)} - GCI^{(r)}| \leq \epsilon$

输出 $\mathbf{E}^{(r+1)}$

Break

else

$r = r + 1$

end

end

Return $\mathbf{E}^{(r+1)}$

为了证明上述算法的收敛性, 首先给出命题 2.

命题 2 设 $f(x)$ 是可导函数且 $f'(x)$ 在闭区间 $[c, d]$ 上有界. 则 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上是一致连续的, 即对于任意 $x, y \in [c, d]$ 满足 $|x - y| < \epsilon$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$, 其中 ϵ 和 ϵ' 均为无穷小量, $\epsilon > 0$ 且 $\epsilon' > 0$.

证 因为 $f(x)$ 是可导函数, $f'(x)$ 在闭区间 $[c, d]$ 上有界, 即存在一个极大的 $M > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq M$, 并且对于任意 $x, y \in [a, b]$ 满足 $|x - y| < \epsilon$, 则可以得到 $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| < M\epsilon = \epsilon'$, 其中 $\xi \in [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}] \subseteq [c, d]$. 因此, $f(x)$ 在 $[c, d]$ 是一致连续的.

根据命题 2, 可进一步得到命题 3.

命题 3 设 $0 \leq x_k \leq 1, 0 \leq y_k \leq 1$ 且 $0 \leq a_k \leq 1$, 其中 $k=1, 2, \dots, n$. 对于任意 $k=1, 2, \dots, n$, 满足 $|x_k - y_k| < \epsilon$, 则 $\left| \prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} - \prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right| < \epsilon'$, 其中 $\epsilon > 0, \epsilon' > 0$.

证 对于任意 $k=1, 2, \dots, n$, 满足 $|x_k - y_k| < \epsilon$, 恒有:

$$\begin{aligned} & \left| \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} \right) - \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right) \right| = \\ & \left| \sum_{k=1}^n x_k \ln(a_k) - \sum_{k=1}^n y_k \ln(a_k) \right| \leq \\ & - \sum_{k=1}^n \ln(a_k) |x_k - y_k| \end{aligned}$$

假设 $a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 $\epsilon' = -na^n \ln(a)\epsilon$, 可得 $0 < a < 1$ 和 $-\sum_{k=1}^n \ln(a_k) |x_k - y_k| < -n \ln(a)\epsilon$, 因此 $\left| \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} \right) - \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right) \right| < -n \ln(a)\epsilon$. 根据命题 2, 可得:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} - \prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} = \\ & \left| e^{\ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} \right)} - e^{\ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right)} \right| = \\ & e^{\xi} \left| \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} \right) - \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right) \right| \leq \\ & e^{\ln(a^n)} \left| \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{x_k} \right) - \ln \left(\prod_{k=1}^n (a_k)^{y_k} \right) \right| < \\ & -na^n \ln(a)\epsilon = \epsilon' \end{aligned}$$

根据命题 3, 可得命题 4.

命题 4 若 $|\omega_k^{(r+1)} - \omega_k^{(r)}| < \epsilon$, 则 $|d(E_{ki}, E_i^{(r+1)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r)})| < \epsilon'$, 其中 $\epsilon > 0$ 且 $\epsilon' > 0$.

证

$$\begin{aligned} & |d(E_{ki}, E_i^{(r+1)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r)})| = \\ & \frac{1}{12} \left| \sum_{j=1}^6 (|f(s_{u_{ij}^k}) - f(s_{u_{ij}^{(r+1)}})| + |f(s_{v_{ij}^k}) - f(s_{v_{ij}^{(r+1)}})|) - \sum_{j=1}^6 (|f(s_{u_{ij}^k}) - f(s_{u_{ij}^{(r)}})| + |f(s_{v_{ij}^k}) - f(s_{v_{ij}^{(r)}})|) \right| = \\ & \frac{1}{12} \left| \sum_{j=1}^6 (|f(s_{u_{ij}^k}) - f(s_{u_{ij}^{(r+1)}})| + |f(s_{v_{ij}^k}) - f(s_{v_{ij}^{(r+1)}})| - |f(s_{u_{ij}^k}) - f(s_{u_{ij}^{(r)}})| - |f(s_{v_{ij}^k}) - f(s_{v_{ij}^{(r)}})|) \right| \leq \\ & \frac{1}{12} \sum_{j=1}^6 (|f(s_{u_{ij}^{(r)}}) - f(s_{u_{ij}^{(r+1)}})| + |f(s_{v_{ij}^{(r)}}) - f(s_{v_{ij}^{(r+1)}})|) \leq \\ & \frac{1}{12} \sum_{j=1}^6 (|f(s_{g-g \prod_{k=1}^n (1-u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}})}) - f(s_{g-g \prod_{k=1}^n (1-u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}})| + |f(s_{g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}}}) - f(s_{g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}})|) \\ & \text{令 } u_k = 1 - u_{ij}^k/g, v_k = 1 - v_{ij}^k/g. \text{ 由命题 2 和命题 3 可知, 当 } |\omega_k^{(r+1)} - \omega_k^{(r)}| < \epsilon \text{ 时, 有} \\ & |(g - g \prod_{k=1}^n (1 - u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}}) - (g - g \prod_{k=1}^n (1 - u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}})| = |g \prod_{k=1}^n (u_k)^{\omega_k^{(r)}} - g \prod_{k=1}^n (u_k)^{\omega_k^{(r+1)}}| < \\ & g\epsilon', \text{ 且 } |g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}} - g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}}| = |g \prod_{k=1}^n (v_k)^{\omega_k^{(r)}} - g \prod_{k=1}^n (v_k)^{\omega_k^{(r+1)}}| < g\epsilon'. \text{ 因此, 当} \\ & |\omega_k^{(r+1)} - \omega_k^{(r)}| < \epsilon, \text{ 有 } |f(s_{g-g \prod_{k=1}^n (1-u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}}}) - f(s_{g-g \prod_{k=1}^n (1-u_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}}})| < \epsilon'', \text{ 且 } |f(s_{g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r)}}}) - f(s_{g \prod_{k=1}^n (v_{ij}^k/g)^{\omega_k^{(r+1)}}})| < \epsilon''. \end{aligned}$$

因此 $|d(E_{ki}, E_i^{(r+1)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r)})| < \epsilon'' < \epsilon$.

根据命题 4, 容易得到命题 5.

命题 5 若 $|\omega_k^{(r+1)} - \omega_k^{(r)}| < \epsilon$, 则 $|\text{GCI}^{(r+1)} - \text{GCI}^{(r)}| < \epsilon$, 其中 $\epsilon > 0$.

证

$$\begin{aligned} & |\text{GCI}^{(r+1)} - \text{GCI}^{(r)}| = \\ & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (S(E_k, E^{(r+1)}) - S(E_k, E^{(r)})) \right| = \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (d(E_{ki}, E_i^{(r)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r+1)})) \right| \leqslant \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |d(E_{ki}, E_i^{(r+1)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r)})|$$

由命题 4 可得, $\frac{1}{mn} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m |d(E_{ki}, E_i^{(r)}) - d(E_{ki}, E_i^{(r+1)})| < \epsilon$.

综上所述, 当 $|\omega_k^{(r+1)} - \omega_k^{(r)}| < \epsilon$ 时, $|\text{GCI}^{(r+1)} - \text{GCI}^{(r)}| < \epsilon$.

当算法 1 的迭代终止条件 $|\text{GCI}^{(r+1)} - \text{GCI}^{(r)}| < \epsilon$ 替换为 $\|W^{(r+1)} - W^{(r)}\| < \epsilon$ 时, 该算法可以退化成文献[29]中的算法; 而该文献验证了算法的收敛性, 并结合命题 5 可知, 上述基于权重迭代的一致性综合损失函数获取算法算法 1 是收敛的. 因此, 采用算法 1 能获得一致性综合损失函数矩阵 E . 为了方便后续讨论, 记 E 为如下:

$$E = (E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_m)^T \quad (2)$$

其中 $E_i = (\lambda_{PP}^i, \lambda_{BP}^i, \lambda_{NP}^i, \lambda_{NN}^i, \lambda_{BN}^i, \lambda_{PN}^i)$ 和 $\lambda_{**}^i = (s_{u_{**}^i}, s_{v_{**}^i})$ ($*$ = P, B, N, $\circ$ = P, N).

2.4 基于一致性综合损失函数的三支决策阈值确定模型

根据 Liu 等^[15]提出的语言直觉模糊三支决策阈值确定模型, 下面建立确定语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型且首先给出下面命题.

命题 6 基于算法 1 获得的一致性综合损失函数 E , 可计算第 i 个对象 x_i ($i = 1, \dots, m$) 在行动 a_* ($*$ = P, B, N) 下的期望损失 $\bar{R}(a_* | [x_i])$ 为:

$$\begin{aligned} \bar{R}(a_* | [x_i]) &= (s_{g-g(1-u_{*P}^i/g)p_i}, s_{g(v_{*P}^i/g)p_i}) \oplus (s_{g-g(1-u_{*N}^i/g)q_i}, s_{g(v_{*N}^i/g)q_i}) = \\ &= (s_{2g-g[(1-u_{*P}^i/g)p_i + (1-u_{*N}^i/g)q_i] - g[1-(1-u_{*P}^i/g)p_i][1-(1-u_{*N}^i/g)q_i]}, s_{(v_{*P}^i)^{p_i}(v_{*N}^i)^{q_i}}) = \\ &= (s_{u_*^i}, s_{v_*^i}) \end{aligned}$$

其中 $u_*^i = 2g - g[(1-u_{*P}^i/g)p_i + (1-u_{*N}^i/g)q_i] - g[1-(1-u_{*P}^i/g)p_i][1-(1-u_{*N}^i/g)q_i]$ 且 $v_*^i = (v_{*P}^i)^{p_i}(v_{*N}^i)^{q_i}$.

根据贝叶斯风险决策理论, 获得三支决策规则:

P4 当 $\bar{R}(a_P | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))$ 且 $\bar{R}(a_P | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{POS}(C)$;

B4 当 $\bar{R}(a_B | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))$ 且 $\bar{R}(a_B | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{BND}(C)$;

N4 当 $\bar{R}(a_N | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))$ 且 $\bar{R}(a_N | [x_i]) \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{NEG}(C)$.

规则 P4–N4 会涉及到语言直觉模糊排序方法, 因此, 采用文献[15]中的排序方法对其进行排序. 首先给出命题 7^[15].

命题 7 为方便表达, 记 $\bar{R}(a_* | [x_i]) = (s_{u_*^i}, s_{v_*^i})$ ($*$ = P, B, N), 其中 $u_*^i = 2g - g\left[\left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g}\right)^{p_i} + \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g}\right)^{q_i}\right] - g\left[1 - \left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g}\right)^{p_i}\right]\left[1 - \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g}\right)^{q_i}\right]$, $v_*^i = (v_{*P}^i)^{p_i}(v_{*N}^i)^{q_i}$, 则 $\bar{R}(a_* | [x_i])$ 的排序函数 $LM(\bar{R}(a_* | [x_i]))$ 为 $LM(\bar{R}(a_* | [x_i])) = \frac{1}{g} \sqrt{(u_*^i)^2 + (g - v_*^i)^2} -$

$$\sqrt{(g - u_*^i)^2 + (v_*^i)^2} + \sqrt{(u_*^i)^2 + (v_*^i)^2}.$$

文献[15]知, 排序函数 $LM(\bar{R}(a_* | [x_i]))$ 为越大越好型, 则规则 P4–N4 进一步转化为 P5–N5:

P5 当 $LM(\bar{R}(a_P | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))$ 且 $LM(\bar{R}(a_P | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{POS}(C)$;

B5 当 $LM(\bar{R}(a_B | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))$ 且 $LM(\bar{R}(a_B | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{BND}(C)$;

N5 当 $LM(\bar{R}(a_N | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))$ 且 $LM(\bar{R}(a_N | [x_i])) \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))$, 则 $x_i \in \text{NEG}(C)$;

基于规则 P5 - N5, 建立语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型 $(\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}})$ -model. 具体为:

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} (\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}})\text{-model} \\ & (\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i2}^{\text{opt}}) = \min f(\bar{p}_{i1}, \bar{q}_{i1}, \bar{p}_{i2}, \bar{q}_{i2}) = \min \bar{p}_{i1} - \bar{p}_{i2} \\ & \text{s. t. } \begin{cases} LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))_1 \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))_1, \\ LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))_1 \leq LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))_1, \\ LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))_2 \leq LM(\bar{R}(a_P | [x_i]))_2, \\ LM(\bar{R}(a_N | [x_i]))_2 \leq LM(\bar{R}(a_B | [x_i]))_2, \\ \bar{p}_{i1} + \bar{q}_{i1} = 1, \\ \bar{p}_{i2} + \bar{q}_{i2} = 1, \\ \bar{p}_{i1}, \bar{q}_{i1}, \bar{p}_{i2}, \bar{q}_{i2} \geq 0. \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

具体可化为:

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} (\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}})\text{-model} \\ & (\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i2}^{\text{opt}}) = \min f(\bar{p}_{i1}, \bar{q}_{i1}, \bar{p}_{i2}, \bar{q}_{i2}) = \min \bar{p}_{i1} - \bar{p}_{i2} \\ & \text{s. t. } \begin{cases} \sqrt{(u_{P_1}^i)^2 + (g - v_{P_1}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{P_1}^i)^2 + (v_{P_1}^i)^2} + \sqrt{(u_{P_1}^i)^2 + (v_{P_1}^i)^2} \leq \\ \sqrt{(u_{B_1}^i)^2 + (g - v_{B_1}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{B_1}^i)^2 + (v_{B_1}^i)^2} + \sqrt{(u_{B_1}^i)^2 + (v_{B_1}^i)^2} \\ \sqrt{(u_{P_1}^i)^2 + (g - v_{P_1}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{P_1}^i)^2 + (v_{P_1}^i)^2} + \sqrt{(u_{P_1}^i)^2 + (v_{P_1}^i)^2} \leq \\ \sqrt{(u_{N_1}^i)^2 + (g - v_{N_1}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{N_1}^i)^2 + (v_{N_1}^i)^2} + \sqrt{(u_{N_1}^i)^2 + (v_{N_1}^i)^2} \\ \sqrt{(u_{N_2}^i)^2 + (g - v_{N_2}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{N_2}^i)^2 + (v_{N_2}^i)^2} + \sqrt{(u_{N_2}^i)^2 + (v_{N_2}^i)^2} \leq \\ \sqrt{(u_{P_2}^i)^2 + (g - v_{P_2}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{P_2}^i)^2 + (v_{P_2}^i)^2} + \sqrt{(u_{P_2}^i)^2 + (v_{P_2}^i)^2} \\ \sqrt{(u_{N_2}^i)^2 + (g - v_{N_2}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{N_2}^i)^2 + (v_{N_2}^i)^2} + \sqrt{(u_{N_2}^i)^2 + (v_{N_2}^i)^2} \leq \\ \sqrt{(u_{B_2}^i)^2 + (g - v_{B_2}^i)^2} - \sqrt{(g - u_{B_2}^i)^2 + (v_{B_2}^i)^2} + \sqrt{(u_{B_2}^i)^2 + (v_{B_2}^i)^2} \\ \bar{p}_{i1} + \bar{q}_{i1} = 1, \\ \bar{p}_{i2} + \bar{q}_{i2} = 1 \\ \bar{p}_{i1}, \bar{q}_{i1}, \bar{p}_{i2}, \bar{q}_{i2} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} u_{*1}^i &= 2g - g \left[\left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g} \right)^{\bar{p}_{i1}} + \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g} \right)^{\bar{q}_{i1}} \right] - g \left[1 - \left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g} \right)^{\bar{p}_{i1}} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g} \right)^{\bar{q}_{i1}} \right] \text{ 且 } v_{*1}^i = \\ & (v_{*P}^i)^{\bar{p}_{i1}} (v_{*N}^i)^{\bar{q}_{i1}}; \end{aligned}$$

$$u_{*2}^i = 2g - g \left[\left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g} \right)^{\bar{p}_{i2}} + \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g} \right)^{\bar{q}_{i2}} \right] - g \left[1 - \left(1 - \frac{u_{*P}^i}{g} \right)^{\bar{p}_{i2}} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{u_{*N}^i}{g} \right)^{\bar{q}_{i2}} \right] \text{ 且 } v_{*2}^i = (v_{*P}^i)^{\bar{p}_{i2}} (v_{*N}^i)^{\bar{q}_{i2}}. (* = P, B, N)$$

根据文献[15], 模型(3)的最优解 $(\bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i1}^{\text{opt}}, \bar{p}_{i2}^{\text{opt}}, \bar{q}_{i2}^{\text{opt}})$ 是存在且唯一性.

3 基于语言直觉模糊数评价的三支群决策方法

下面给出基于语言直觉模糊数评价的三支群决策方法, 具体步骤如下:

步骤 1: 专家 $e_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 针对 m 个对象 $x_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 分别给出语言直觉模糊损失函数评价 $(s_{u_{ij}^k}, s_{v_{ij}^k})$, 进而构造专家语言直觉模糊评价矩阵 $E_k = ((s_{u_{ij}^k}, s_{v_{ij}^k}))_{m \times 6}$, 假定已知每个对象的条件概率 $\text{Pr}(C | [x_i])$.

步骤 2: 给定误差值 ϵ , 并设置参数 r, m, c , 采用算法 1 来获取满足一致性要求的综合代价损失函数矩阵 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots, E_m)^T$, 其中 $E_i = (\lambda_{PP}^i, \lambda_{BP}^i, \lambda_{NP}^i, \lambda_{NN}^i, \lambda_{BN}^i, \lambda_{PN}^i)$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, m$.

步骤 3: 基于一致性综合损失函数, 建立确定语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型.

步骤 4: 采用 MATLAB 求解该模型, 并得到最优解 $\alpha_i = \bar{p}_{i1}^{\text{opt}}, \beta_i = \bar{p}_{i2}^{\text{opt}} (i=1, 2, \cdots, m)$.

i) 当 $\alpha_i > \beta_i$, 采用三支决策规则, 即:

- P6 若 $\text{Pr}(C | [x_i]) \geq \alpha_i$ 时, $x_i \in \text{POS}(C)$;
- B6 当 $\beta_i < \text{Pr}(C | [x_i]) < \alpha_i$ 时, $x_i \in \text{BND}(C)$;
- N6 当 $\text{Pr}(C | [x_i]) \leq \beta_i$ 时, $x_i \in \text{NEG}(C)$.

ii) 当 $\alpha_i \leq \beta_i$, 采用二支决策规则, 即:

- P7 如果 $\text{Pr}(C | [x_i]) \geq \alpha_i, x_i \in \text{POS}(C)$;
- N7 如果 $\text{Pr}(C | [x_i]) < \beta_i, x_i \in \text{NEG}(C)$.

4 算例和仿真实验

假设某投资人面对 3 个投资项目 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 现考虑是否投资发展, 这些项目根据以往经验分为盈利的项目(C)和亏损的项目($\neg C$). 投资人根据上述项目可以选择投资(a_P)、进一步考虑(a_B)和不投资(a_N)3 种决策行动. 为了获得巨大的经济效益, 投资人聘请了 3 位投资学专家来做出科学合理的决策. 设上述 3 个项目就每个项目选择投资、进一步考虑以及不投资行动后的代价损失函数由专家基于标度 $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ 给出, 具体结果详见表 2—表 4. 基于以上信息, 投资人将如何做出投资决策? 假定 3 个投资项目 $x_i (i=1, 2, 3)$ 对应的条件概率分别为 $\text{Pr}(C | [x_1]) = 0.855\ 5$, $\text{Pr}(C | [x_2]) = 0.125\ 0$ 和 $\text{Pr}(C | [x_3]) = 0.798\ 0$.

表 2 专家 e_1 提供的 6 个损失函数的评价结果

e_1	λ_{PP}	λ_{BP}	λ_{NP}	λ_{NN}	λ_{BN}	λ_{PN}
x_1	(s_0, s_3)	(s_1, s_2)	(s_2, s_1)	(s_0, s_4)	(s_1, s_3)	(s_2, s_2)
x_2	(s_1, s_4)	(s_2, s_2)	(s_3, s_1)	(s_0, s_6)	(s_1, s_2)	(s_2, s_1)
x_3	(s_0, s_2)	(s_1, s_1)	(s_2, s_0)	(s_1, s_2)	(s_2, s_1)	(s_5, s_0)

表 3 专家 e_2 提供的 6 个损失函数的评价结果

e_2	λ_{PP}	λ_{BP}	λ_{NP}	λ_{NN}	λ_{BN}	λ_{PN}
x_1	(s_1, s_5)	(s_3, s_2)	(s_6, s_1)	(s_0, s_4)	(s_1, s_1)	(s_2, s_0)
x_2	(s_0, s_4)	(s_2, s_1)	(s_5, s_0)	(s_1, s_3)	(s_2, s_1)	(s_4, s_0)
x_3	(s_3, s_6)	(s_5, s_4)	(s_6, s_0)	(s_2, s_5)	(s_3, s_4)	(s_5, s_2)

表 4 专家 e₃ 提供的 6 个损失函数的评价结果

e ₃	λ _{PP}	λ _{BP}	λ _{NP}	λ _{NN}	λ _{BN}	λ _{PN}
x ₁	(s ₄ , s ₃)	(s ₅ , s ₂)	(s ₆ , s ₀)	(s ₀ , s ₄)	(s ₁ , s ₂)	(s ₅ , s ₀)
x ₂	(s ₀ , s ₂)	(s ₁ , s ₁)	(s ₃ , s ₀)	(s ₀ , s ₄)	(s ₂ , s ₃)	(s ₅ , s ₂)
x ₃	(s ₁ , s ₆)	(s ₂ , s ₃)	(s ₅ , s ₁)	(s ₀ , s ₃)	(s ₃ , s ₂)	(s ₆ , s ₀)

步骤 1: 3 个专家e_k (k = 1, 2, 3) 针对 3 个对象x_i (i = 1, 2, 3) 分别给出语言直觉模糊损失函数评价(s_{u_{ij}^k}, s_{v_{ij}^k}), 进而构造专家语言直觉模糊评价矩阵E_k = ((s_{u_{ij}^k}, s_{v_{ij}^k}))_{3×6}.

步骤 2: 给定误差值ε = 10⁻¹⁵, 并设置参数r = 0, t = 3, c = 2, 采用算法 1 来获取满足一致性综合代价损失函数矩阵(表 5).

步骤 3: 基于算法 1 获取的一致性综合损失函数, 建立确定语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型(α_i^{opt}, β_i^{opt})-model, 其中 i = 1, 2, 3.

步骤 4: 采用 MATLAB 求解该模型, 并得到三支决策阈值对最优解(表 6).

表 5 一致性综合代价损失函数

	λ _{PP}	λ _{BP}	λ _{NP}	λ _{NN}	λ _{BN}	λ _{PN}
x ₁	(s _{2.109 9} , s _{3.560 2})	(s _{3.557 7} , s _{2.000 0})	(s _{6.000 0} , s _{0.000 0})	(s _{0.000 0} , s _{4.000 0})	(s _{1.000 0} , s _{1.809 5})	(s _{3.499 2} , s _{0.000 0})
x ₂	(s _{0.346 3} , s _{3.162 8})	(s _{1.685 9} , s _{1.253 6})	(s _{3.924 1} , s _{0.000 0})	(s _{0.355 7} , s _{4.145 7})	(s _{1.698 1} , s _{1.818 9})	(s _{4.017 6} , s _{0.000 0})
x ₃	(s _{1.528 7} , s _{4.193 7})	(s _{3.296 9} , s _{2.309 1})	(s _{6.000 0} , s _{0.000 0})	(s _{1.064 7} , s _{3.119 4})	(s _{2.705 0} , s _{2.012 7})	(s _{6.000 0} , s _{0.000 0})

表 6 基于本研究方法获得的三支决策概率阈值和三支决策规则

	x ₁	x ₂	x ₃
Pr(C [x _i])	0.855 5	0.125 0	0.798 0
α _i ^{opt}	0.835 3	0.836 4	0.999 8
β _i ^{opt}	0.345 6	0.149 3	0.789 1
决策模式	三支决策	三支决策	三支决策
决策规则	POS(C)	NEG(C)	BND(C)

从表 6 的结果可知, 本研究提出的三支群决策方法能够确定对象x_i (i = 1, 2, 3) 的一致性阈值对, 其中(α₁^{opt}, β₁^{opt}) = (0.835 3, 0.345 6), (α₂^{opt}, β₂^{opt}) = (0.836 4, 0.149 3), (α₃^{opt}, β₃^{opt}) = (0.632 7, 0.999 8). 在给定条件概率分别为 Pr(C | [x₁]) = 0.855 5, Pr(C | [x₂]) = 0.125 0, Pr(C | [x₃]) = 0.798 0 下, 进一步可得, x₁ 属于接受决策, x₃ 属于边界决策, x₂ 属于拒绝决策. 因此能确定投资的项目为x₁ 和x₃, 有待考虑的项目为x₂.

从上述算例的决策步骤可知, 本研究提出的三支群决策方法主要由两个决策过程构成: 第 1 个决策过程是采用算法 1 来获取满足一致度指标的综合代价损失函数矩阵 E; 第 2 个决策过程是建立确定语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型. 显然, 采用第 2 个决策过程可以有效地确定一致性阈值(表 6). 下面主要讨论第 1 个决策过程中群一致度指标和迭代误差随迭代次数的变化趋势(图 1 和图 2). 在此基础上, 探究参数 c 和 t 对迭代结果的影响(图 3 — 图 6).

首先, 由图 1 和图 2 可知, 当迭代次数达到第 2 次时, 群一致度指标几乎趋于稳定且收敛到较高的一致性水平, 此时迭代误差趋近于零. 因此, 算法 1 的计算效率较高且收敛速度较快.

其次, 从图 3 和图 4 可知: 当参数 t 相同时, 改变参数 c, 对迭代次数和群一致度指标值产生微小的影响, 而对迭代误差值几乎没有影响. 另外, 迭代次数随着参数 c 的增大呈现减小的趋势; 当算法 1 的迭代误

差达到 10^{-15} 时, 群一致度指标值会随着参数 c 的增大呈现增大的趋势. 例如, 当参数 $c=6$, 算法 1 在第 7 次迭代停止时, 群一致度指标值达到最大.

最后, 图 5 和图 6 可得类似的结论: 当参数 c 相同时, 迭代次数随着参数 t 的增大呈现减小的趋势; 且当算法 1 的迭代误差达到 10^{-15} 时, 群一致度指标值会随着参数 t 的增大呈现增大的趋势.

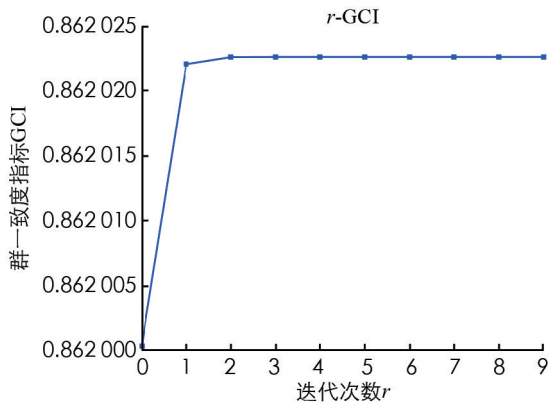


图 1 GCI 关于迭代次数的变化曲线

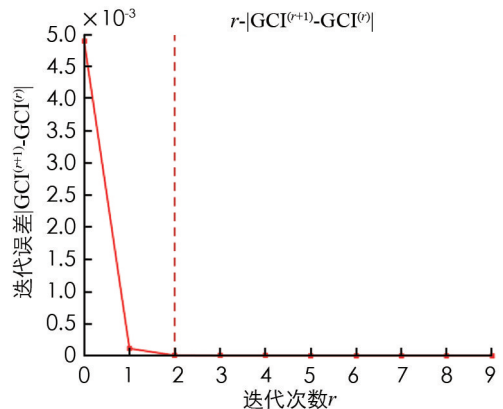


图 2 迭代误差关于迭代次数的变化曲线

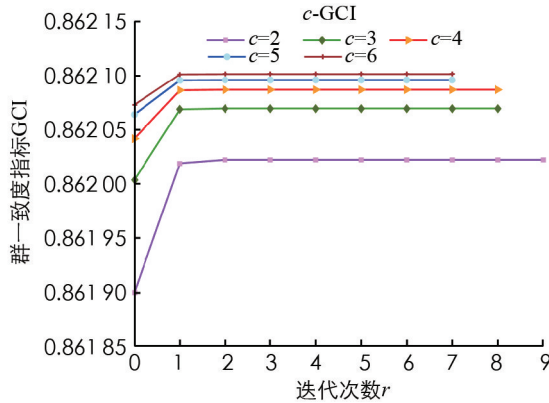


图 3 GCI 关于参数 c 的变化曲线

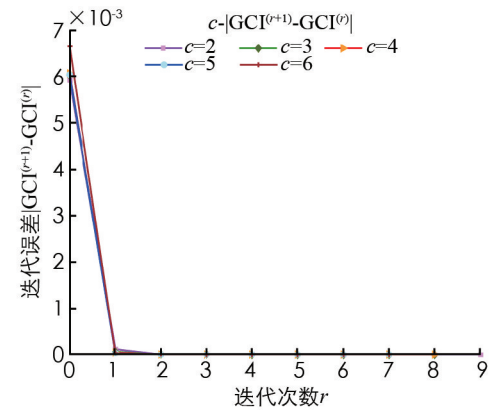


图 4 迭代误差关于参数 c 的变化曲线

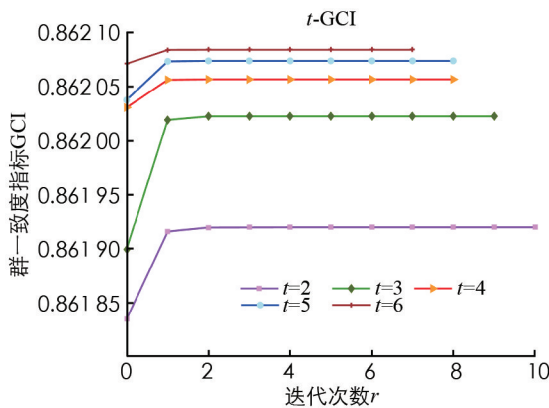


图 5 GCI 关于参数 t 的变化曲线

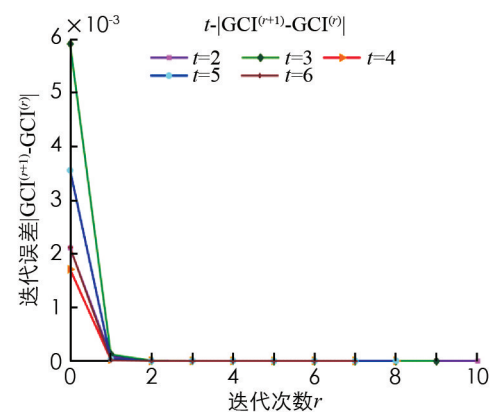


图 6 迭代误差关于参数 t 的变化曲线

总而言之, 从图 1—图 6 可得, 采用算法 1 得到的迭代结果具有一定的稳定性和准确性. 为了突出本研究提出方法的有效性和优势, 本研究将所提出的方法与基于决策粗糙集的三支决策方法^[2] 进行比较分析 (图 7). 在算例中条件概率分别为 $\Pr(C|[x_1])=0.8555$, $\Pr(C|[x_2])=0.1250$, $\Pr(C|[x_3])=0.7980$ 的前提下, 采用本研究提出的方法与文献[2] 的方法所获得的三支决策结果是完全一致的.

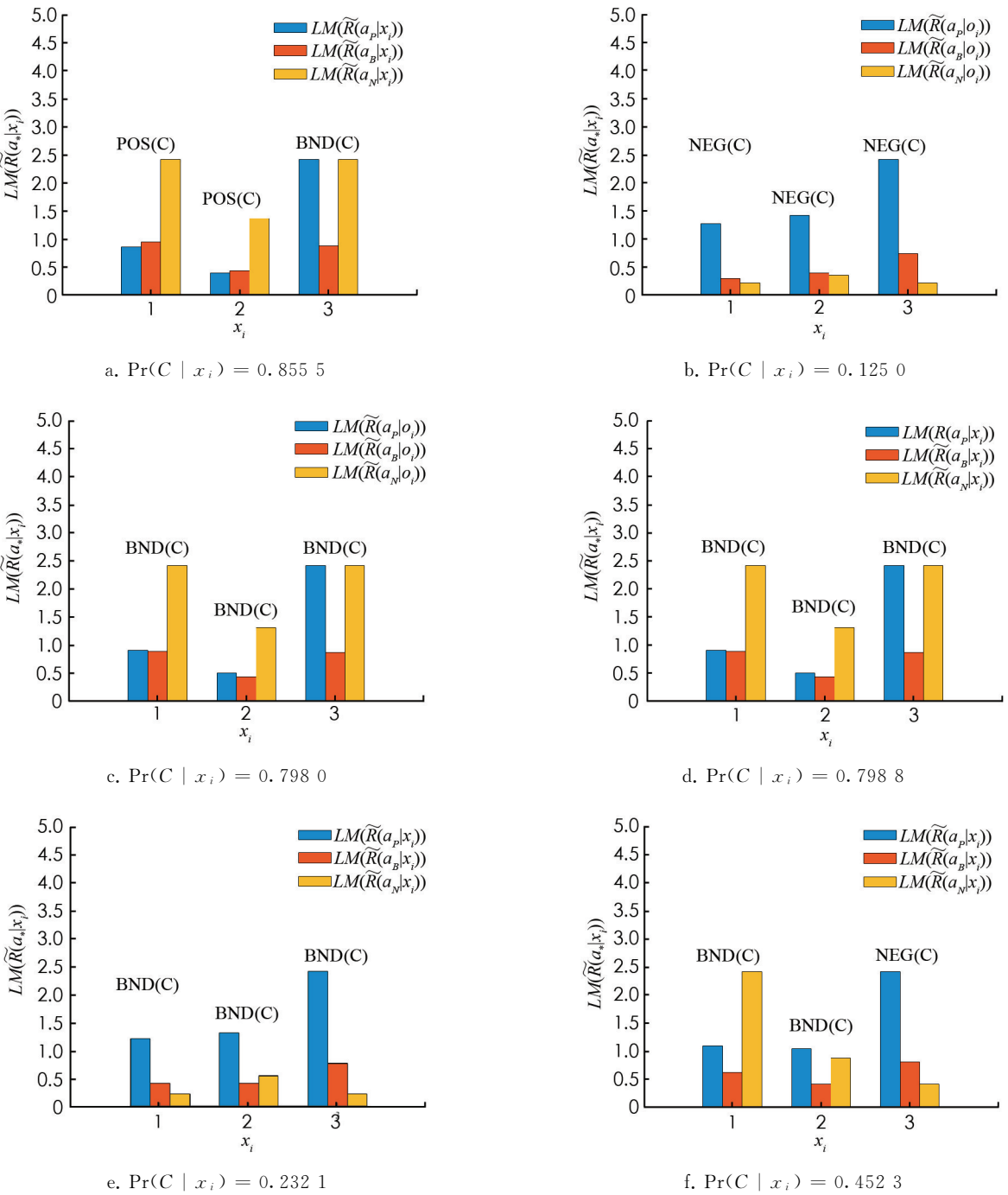


图 7 不同条件概率下本研究方法与基于决策粗糙集的三支决策方法的比较分析

当条件概率发生变化时(即 $\Pr(C|[x_1])=0.4523$, $\Pr(C|[x_2])=0.2321$, $\Pr(C|[x_3])=0.7988$, 采用本研究提出的方法与文献[2]的方法所获得的三支决策结果亦是完全一致的, 但是利用文献[2]所提出的方法需重新计算并比较排序函数值 $LM(\tilde{R}(a_*|x_i))$ ($*$ = P, N, B, $i=1, 2, 3$) 才能得到三支决策结果. 而本研究提出的方法仅需将每个对象对应的条件概率与概率阈值 $\tilde{\alpha}_i^{opt}$ 和 $\tilde{\beta}_i^{opt}$ 进行比较, 即可获得三支决策规则.

5 总结

本研究针对基于语言直觉模糊数评价损失函数的三支群决策问题, 提出了具有群体共识的语言直觉模

糊三支决策方法. 该方法采用语言直觉模糊数刻画损失函数, 并构造出专家个体评价矩阵, 进而定义了语言直觉模糊相似测度及群体一致性指标. 其次, 本研究设计了基于语言直觉模糊相似度的最优集成模型和基于权重迭代的一致性综合损失函数获取算法, 并证明了该算法的收敛性. 基于该算法, 获得一致性群体综合评价矩阵, 并建立了语言直觉模糊三支群决策阈值的单一优化模型. 最后, 采用投资策略的算例说明了所提出方法的有效性.

参考文献:

- [1] YAO Y Y, WONG S K M, LINGRAS P. A Decision-Theoretic Rough Set Model [J]. Methodologies for Intelligent Systems, 1990, 5: 17-24.
- [2] YAO Y Y. Three-Way Decisions with Probabilistic Rough Sets [J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.
- [3] YAO Y Y. The Superiority of Three-Way Decisions in Probabilistic Rough Set Models [J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.
- [4] LI Y F, ZHANG C Q, SWAN J R. An Information Filtering Model on the Web and Its Application in Job Agent [J]. Knowledge-Based Systems, 2000, 13(5): 285-296.
- [5] YAO Y Y. Three-Way Conflict Analysis: Reformulations and Extensions of the Pawlak Model [J]. Information Sciences, 2019, 180: 26-37.
- [6] YAO Y Y. Three-Way Granular Computing, Rough Sets, and Formal Concept Analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 116: 106-125.
- [7] YU H, WANG X C, WANG G Y, et al. An Active Three-Way Clustering Method via Low-Rank Matrices for Multi-View Data [J]. Information Sciences, 2020, 507: 823-839.
- [8] YE X Q, LIU D. A Cost-Sensitive Temporal-Spatial Three-Way Recommendation with Multi-Granularity Decision [J]. Information Sciences, 2020, 589: 670-689.
- [9] MIN F, ZHANG Z H, ZHAI W J, et al. Frequent Pattern Discovery with Tri-Partition Alphabets [J]. Information Sciences, 2020, 507: 715-732.
- [10] JU H R, DING W P, YANG X B, et al. Robust Supervised Rough Granular Description Model with the Principle of Justifiable Granularity [J]. Applied Soft Computing, 2021, 110: 107612-1-107612-19.
- [11] ZHANG Q, CHENG Y, ZHAO F, et al. Optimal Scale Combination Selection Integrating Three-Way Decision with Hasse Diagram [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(8): 3675-3689.
- [12] ZHAN J M, YE J, DING W P, et al. A Novel Three-Way Decision Model Based on Utility Theory in Incomplete Fuzzy Decision Systems [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2021, 30(7): 2210-2226.
- [13] JIA X Y, ZHAO D, FAN M, et al. Three-Way Decisions Based Feature Fusion for Chinese Irony Detection [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 113: 324-335.
- [14] LIU J B, HUANG B, LI H X, et al. Optimization-Based Three-Way Decisions with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022[In press].
- [15] LIU J B, MAI J X, LI H X, et al. On Three Perspectives for Deriving Three-Way Decision with Linguistic Intuitionistic Fuzzy Information [J]. Information Sciences, 2022, 588: 350-380.
- [16] LIANG D C, LIU D, KOBINA A. Three-Way Group Decisions with Decision-Theoretic Rough Sets [J]. Information Sciences, 2016, 345(1): 46-64.
- [17] SUN B Z, MA W M, LI B J, et al. Three-Way Decisions Approach to Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information-Based Decision-Theoretic Rough Fuzzy Set [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 93: 424-442.
- [18] ZHANG H Y, YANG S Y. Three-Way Group Decisions with Interval-Valued Decision-Theoretic Rough Sets Based on

Aggregating Inclusion Measures [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 110: 31-45.

[19] PANG J F, GUAN X Q, LIANG J Y, et al. Multi-Attribute Group Decision-Making Method Based on Multi-Granulation Weights and Three-Way Decisions [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 117: 122-147.

[20] LIU J B, JU H R, LI H X, et al. Three-Way Group Decisions with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information Based on Optimization Method [J]. Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.) 2020, 43(4): 817-827.

[21] WANG M W, LIANG D C, XU Z S. Sequential Three-Way Multiple Attribute Group Decisions with Individual Attributes and Its Consensus Achievement Based on Social Influence [J]. Information Sciences, 2020, 518: 286-308.

[22] LIU J B, LI H X, HUANG B, et al. Convex Combination-Based Consensus Analysis for Intuitionistic Fuzzy Three-Way Group Decision [J]. Information Sciences, 2021, 574: 542-566.

[23] LIANG D C, FU Y Y, XU Z S. Three-Way Group Consensus Decision Based on Hierarchical Social Network Consisting of Decision Makers and Participants [J]. Information Sciences, 2022, 585: 289-312.

[24] 陈六新, 苟晓玲, 罗南方. 基于犹豫度的优先加权平均算子在区间犹豫模糊语言集下的多属性群决策 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022(8): 85-96.

[25] 李望晨, 衣贵鹏, 滕文杰, 等. 基于三角模糊数决策方法的医学人文素质综合评价模型与应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(8): 96-101.

[26] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets Syst, 1896, 20(1): 87-96.

[27] CHEN Z C, LIU P H, PEI Z. An Approach to Multiple Attribute Group Decision Making Based on Linguistic Intuitionistic Fuzzy Numbers [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2015, 8(4): 747-760.

[28] LEE H S. Optimal Consensus of Fuzzy Opinions under Group Decision Making Environment [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 132(3): 303-315.

[29] ALAOUI M E, BEN-AZZA H, YASSINI K E. Achieving Consensus in Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Environment [J]. Procedia Computer Science, 2019, 148: 218-22.

责任编辑 潘春燕