第 47 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2022 年 12 月
Vol. 47　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.12.006

奇异元个数对线性群 $PSL(2, p)$ 的刻画[①]

严德钰，　沈如林

湖北民族大学 数学与统计学院，湖北 恩施 445000

摘要：设 G 是有限群，$\pi(G)$表示$|G|$的所有素因子的集合. 若 $r\in\pi(G)$，r-奇异元 $g\in G$ 表示 g 的元阶能被 r 整除，并设 $\mu_r(G)$为 r-奇异元在 G 中的比例. 令 $\mu(G)=\{\mu_r(G): r\in\pi(G)\}$，利用 $\mu(G)$刻画了线性群 $PSL(2, p)$，并证明了：若 $\mu(G)=\mu(PSL(2, p))$，则 $G\cong PSL(2, p)$，这里 p 是素数.

关　键　词：r-奇异元的个数；有限群；线性群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2022)12-0057-13

Characterization of $PSL(2, p)$ by the Number of Singular Elements

YAN Deyu，　SHEN Rulin

School of Mathematics and Statistics, Hubei Minzu University, Enshi Hubei 445000, China

Abstract: Given a finite group G, let $\pi(G)$ represent the set of all primes in $|G|$. Given $r\in\pi(G)$, $g\in G$ is r-singular element if its order is divisible by r. Denote $\mu_r(G)$ the probability of r-singular elements in G. In this paper, we define $\mu(G)=\{\mu_r(G): r\in\pi(G)\}$ and use $\mu(G)$ to characterize linear groups $PSL(2,p)$, where p is a prime. Moreover, we obtain that if $\mu(G)=\mu(PSL(2, p))$, then $G\cong PSL(2, p)$.

Key words: number of r-singular elements; finite group; linear groups

有限群的结构可以由群的一些特殊数量关系反映出来，例如：同阶交换子群的个数、与最高阶元素有关的数量条件以及特征标维数等都可以刻画群的结构[1-3]. 因此，通过群的数量特征来研究群的结构有着重要意义.

为了叙述方便，我们先对 r-奇异元的概念进行说明. 设 G 是有限群，用 $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的所有素因子集合. 若 $r\in\pi(G)$，r-奇异元表示 G 的元阶能被 r 整除的元，否则为 r-正则元. r-奇异元和 r-正则元的个数对群的结构有很大的影响，特别在计算群论中对单群的认识有重要作用. 文献[4]证明了：若 G 是 n 次置换群，则 r-奇异元在 G 中的比例至少为 $\frac{1}{n}$. 文献[5]给出了交错群、典型群、李型例外群以及零散单群的

① 收稿日期：2022-06-08

基金项目：国家自然科学基金项目(12161035).

作者简介：严德钰，硕士研究生，主要从事群论及其应用的研究.

r-正则元在G中比例的下界. 若$H \leqslant G$，且对任意$x \in G - N_G(H)$，有$H^x \cap H = 1$，则称H为TI子群. 文献[6]证明了：G的Sylow p-子群是交换TI子群当且仅当G的任意p-正则元的共轭类长与p互素. 文献[7]确定了例外群中r-正则元在G中的比例. 文献[8]研究了r-正则元对r-可解群结构的影响. 设$\mu_r(G)$为r-奇异元在G中的比例，并记$\mu(G) = \{\mu_r(G): r \in \pi(G)\}$. 在群确定的情况下容易得到$\mu(G)$的值，那么$\mu(G)$的值是否可以唯一确定群便是一个值得探索的课题. 本文研究了奇异元对线性群$PSL(2, p)$的结构的影响，运用r-奇异元比例的集合刻画$PSL(2, p)$，并证明了如下结果：

定理1 设G是有限群，p是素数. 若$\mu(G) = \mu(PSL(2, p))$，则$G \cong PSL(2, p)$.

引理1 设G是有限群，R是G的Sylow r-子群，则$\mu_r(G) = \dfrac{m}{|R|}$，其中$m$与$r$互素.

证 设$|G|_r$表示$|G|$的r-部分，$|G|_{r'}$表示$|G|$的r'-部分. 由于方程$x^{|G|_{r'}} = 1$的解的个数为r-正则元的个数，根据Frobenius定理[9-10]知方程解的个数是$|G|_{r'}$的倍数，则G中r-正则元的个数$R_r(G)$为$k|G|_{r'}$，其中k为一正整数. 同样记G中r-奇异元的个数为$S_r(G)$，则

$$\mu_r(G) = \frac{S_r(G)}{|G|} = \frac{|G| - R_r(G)}{|G|} = 1 - \frac{k|G|_{r'}}{|G|} = 1 - \frac{k}{|G|_r} = \frac{m}{|G|_r} = \frac{m}{|R|}$$

下证m与r互素，只需证r-正则元的个数与r互素. 设G的Sylow r-子群R共轭作用在G中的r-正则元Ω_r上，并设轨道为$O_1, O_2, \cdots, O_k$. 注意到$O_i = \{x_i\}$当且仅当$C_R(x_i) = R$，因此G中r-正则元的个数为

$$R_r(G) = |C_{\Omega_r}(R)| + \sum_x |R : C_R(x)|$$

其中$x \in \Omega_r - C_{\Omega_r}(R)$根据Schur-Zassenhaus定理知$C_G(R) = Z(R) \times H$，其中$H$的阶与$r$互素，则

$$C_{\Omega_r}(R) = \Omega_r \cap C_G(R) = H$$

从而$R_r(G) = |H| \pmod r$. 故r-正则元的个数与r互素.

注1 根据引理1知，若$\mu(G) = \mu(H)$，显然有$|G| = |H|$.

引理2 设G的所有非平凡r-元的共轭类代表为$x_1, x_2, \cdots, x_k$，则$\mu_r(G) = \sum\limits_{i=1}^{k}(1 - \mu_r(C_G(x_i)))$.

证 设$x \in G$，由于G的任何元x可以唯一分解为它的r-部分和r'-部分的乘积，且$C_G(x_i)^g = C_G(x_i^g)$(其中$g \in G$)，从而G中r-奇异元的个数为

$$S_r(G) = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)| \cdot R_r(C_G(x_i)) = |G| \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{R_r(C_G(x_i))}{|C_G(x_i)|} = |G| \cdot \sum_{i=1}^{k}(1 - \mu_r(C_G(x_i)))$$

这里$R_r(C_G(x_i))$是$C_G(x_i)$中r-正则元的个数，故

$$\mu_r(G) = \sum_{i=1}^{k}(1 - \mu_r(C_G(x_i)))$$

引理3 设p为奇素数，且$r \in \pi(PSL(2, p))$，则

$$\mu_r(PSL(2, p)) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(p \pm 1)_2} & r = 2,\ 2 \left| \dfrac{1}{2}(p \pm 1) \right. \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(p \pm 1)_r} & r \neq 2,\ r \left| \dfrac{1}{2}(p \pm 1) \right. \\ \dfrac{2}{p} & r \mid p \end{cases}$$

证 设$\bar{S}_d$为$PSL(2, p)$中d阶元的个数. 若$d > 1$，由文献[10]的引理2.2.9或文献[11]知，当$d \left| \dfrac{1}{2}(p-1) \right.$时，有$\bar{S}_d = \dfrac{1}{2}p(p+1)\varphi(d)$；当$d \left| \dfrac{1}{2}(p+1) \right.$时，有$\bar{S}_d = \dfrac{1}{2}p(p-1)\varphi(d)$；当$d \mid p$时，有$\bar{S}_d = p^2 - 1$.

以下分情况讨论 $\mu_r(PSL(2,p))$ 的值：

情形 1　$r=2$ 且 $2\left|\frac{1}{2}(p-1)\right.$. 设 $\frac{1}{2}(p-1)=2^h t$，其中 h,t 均为正整数且 $(2,t)=1$. 由于

$$\sum_{d\mid 2^h t}\varphi(d)=\sum_{2\nmid d}\varphi(d)+\sum_{2\mid d}\varphi(d)=\sum_{2\mid d}\varphi(d)+\sum_{d\mid t}\varphi(d)$$

则 $2^h t=\sum_{2\mid d}\varphi(d)+t$，从而

$$\sum_{2\mid d}\varphi(d)=2^h t-t=\frac{p-1}{2}-\frac{\frac{p-1}{2}}{\left(\frac{p-1}{2}\right)_2}$$

由 $PSL(2,p)$ 中 d 阶元的个数知 $PSL(2,p)$ 中 2-奇异元的个数 S_2 为 $\sum_{2\mid d}\frac{1}{2}p(p+1)\varphi(d)$，则

$$\mu_2(PSL(2,p))=\frac{S_2}{|PSL(2,p)|}=\frac{\sum_{2\mid d}\frac{1}{2}p(p+1)\varphi(d)}{\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)}=\frac{\sum_{2\mid d}\varphi(d)}{p-1}$$

故

$$\mu_2(PSL(2,p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{(p-1)_2}$$

同理当 $r=2$ 且 $2\left|\frac{1}{2}(p+1)\right.$时，有

$$\mu_2(PSL(2,p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{(p+1)_2}$$

情形 2　$r\neq 2$ 且 $r\mid\frac{1}{2}(p-1)$. 设 $\frac{1}{2}(p-1)=r^a b$，其中 a,b 均为正整数且 $(r,b)=1$. 由于

$$\sum_{d\mid r^a b}\varphi(d)=\sum_{r\mid d}\varphi(d)+\sum_{r\nmid d}\varphi(d)=\sum_{r\mid d}\varphi(d)+\sum_{d\mid b}\varphi(d)$$

则 $r^a b=\sum_{r\mid d}\varphi(d)+b$，从而

$$\sum_{r\mid d}\varphi(d)=r^a b-b=\frac{p-1}{2}-\frac{\frac{1}{2}(p-1)}{\left(\frac{1}{2}(p-1)\right)_r}$$

由 $PSL(2,p)$ 中 d 阶元的个数知 $PSL(2,p)$ 中 r-奇异元的个数 S_r 为 $\sum_{r\mid d}\frac{1}{2}p(p+1)\varphi(d)$，则

$$\mu_r(PSL(2,p))=\frac{S_r}{|PSL(2,p)|}=\frac{\sum_{r\mid d}\frac{1}{2}p(p+1)\varphi(d)}{\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)}=\frac{\sum_{r\mid d}\varphi(d)}{p-1}$$

故

$$\mu_r(PSL(2,p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(p-1)_r}$$

同理当 $r\neq 2$ 且 $r\mid\frac{1}{2}(p+1)$ 时，有

$$\mu_r(PSL(2,p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(p+1)_r}$$

情形 3 $r \mid p$. 由 $PSL(2, p)$ 中 d 阶元的个数可知 $PSL(2, p)$ 中 r-奇异元的个数 S_r 为 p^2-1，则 $\mu_r(PSL(2, p))=\dfrac{S_r}{|PSL(2, p)|}=\dfrac{2}{p}$. 即证引理 3.

设 G 是有限群，定义 G 的素图 $\Gamma(G)$：$\Gamma(G)$ 的顶点集为 $\pi(G)$，两个不同的顶点 p, r 有边相连当且仅当 G 中有一 pr 阶元，$t(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支数，$\pi_i(i=1,2,\cdots)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支所含顶点之集. 如果 $2 \,\Big|\, |G|$，则总设 $2 \in \pi_1$.

首先给出 Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构：

引理 4[12] (i) 设 G 是偶阶 Frobenius 群，H 是 Frobenius 核，K 是 Frobenius 补，则 $t(G)=2$，$\Gamma(G)=\{\pi(H), \pi(K)\}$；

(ii) 2-Frobenius 群可解.

以下是由 Williams 给出的具有非连通素图的群的结构：

引理 5[13-14] 设 G 是有限群，G 的素图非连通，则 G 有如下 3 种结构：

(i) Frobenius 群；

(ii) 2-Frobenius 群；

(iii) G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 K/H 是非交换单群，H 和 G/K 是 π_1-群，H 是幂零群且 $|G/K| \,\Big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$.

另外，对于非连通素图的单群的分类可参见文献[14]的表 Ib-Ie，IIa-IIc、文献[15]的表 Ia，Ib，II，III 以及文献[16].

定理 1 的证明

首先，若 $p=2,3$，根据 GAP 小群容易知道定理 1 成立. 以下不妨设 $p \geqslant 5$，根据引理 1 知 $|G|=|PSL(2, p)|$，即 $|G|=\dfrac{p(p^2-1)}{2}$. 我们将分为 4 步进行证明：

步骤 1 G 是完全群，即 $G'=G$.

否则，G 有一极大正规子群 N，使得 $G/N \cong Z_r$，其中 r 是素数，即有 $\mu_r(G) \geqslant 1-\dfrac{1}{r}$.

当 $r=2$ 且 $2 \nmid p$ 时，有 $\mu_r(G) \geqslant 1-\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}$. 由引理 3 知

$$\mu_r(PSL(2, p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{(p \pm 1)_2}<\frac{1}{2}$$

这与 $\mu_r(G)=\mu_r(PSL(2, p))$ 矛盾.

当 $r \neq 2$ 且 $r \nmid p$ 时，有 $\mu_r(G) \geqslant 1-\dfrac{1}{r}>\dfrac{1}{2}$. 同样通过引理 3 得

$$\mu_r(PSL(2, p))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(p \pm 1)_r}<\frac{1}{2}$$

这与 $\mu_r(G)=\mu_r(PSL(2, p))$ 矛盾.

当 $r \mid p$ 时，有 $\mu_r(G) \geqslant 1-\dfrac{1}{r}$，而

$$\mu_r(PSL(2, p))=\frac{2}{p} \leqslant 1-\frac{1}{r}$$

因此

$$\mu_r(G)=\mu_r(PSL(2, p))=\frac{2}{p}=1-\frac{1}{r}$$

即有 $p=r=3$，这与我们假设的 $p\geqslant 5$ 矛盾.

综上所述，G/N 是非交换单群，G 是完全群.

步骤 2 顶点 p 是 G 的素图的孤立点，且 G 中的 Sylow p-子群不正规.

证明顶点 p 是 G 的素图的孤立点等价于证明对任意素数 $r(\neq p)$，G 中无 pr 阶元.

由于

$$|G|=|PSL(2,p)|=\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

则 G 的 Sylow p-子群 P 同构于 Z_p. 设 G 的 Sylow p-子群的个数为 n_p，G 中 p-奇异元的个数为 $S_p(G)$. 由 Sylow 定理知 $n_p\equiv 1(\bmod p)$，则 G 中 p-奇异元的个数 $S_p(G)\geqslant(p-1)n_p$，由引理 3 知 $S_p(G)=p^2-1$，从而 $n_p=p+1,1$.

首先假设 $n_p=p+1$，则 G 中的 p 阶元的个数为$(p+1)(p-1)$. 而 $S_p(G)=p^2-1$，故 G 中 p 阶元的个数等于 p-奇异元的个数，即 G 中无 pr 阶元.

再假设 $n_p=1$，即 Sylow p-子群正规，则 G 中 p 阶元的个数为 $p-1$. 由引理 2 知 $\mu_p(G)=\sum_{i=1}^{k}(1-\mu_p(C_G(x_i)))$，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 p 阶元的共轭类代表. 由于 G 的 Sylow p-子群 P 同构于 Z_p，则 $C_G(x_i)$ 的 Sylow p-子群就是 G 的 Sylow p-子群. 又由引理 2 和引理 3 知 $\mu_p(C_G(x_i))\leqslant\frac{|P|-1}{|P|}$，从而

$$\mu_p(G)=\sum_{i=1}^{k}(1-\mu_p(C_G(x_i)))\geqslant 1-\mu_p(C_G(x_i))\geqslant 1-\frac{|P|-1}{|P|}=\frac{1}{|P|}=\frac{1}{p}$$

故由引理 3 知 $\mu_p(G)=\frac{2}{p}$. 因此 p 阶元至多有两个共轭类.

首先假设 p 阶元只有一个共轭类. 设 x_1 为 p 阶元共轭类的代表，$C_G(x_1)$ 中 p-奇异元的个数为 $S_p(C_G(x_1))$. 由引理 2 和引理 3 知

$$\mu_p(G)=\frac{2}{p}=1-\mu_p(C_G(x_1))$$

我们有 $\mu_p(C_G(x_1))=\frac{p-2}{p}$，即$\frac{S_p(C_G(x_1))}{|C_G(x_1)|}=\frac{p-2}{p}$. 由于 p 阶元有一个共轭类，则 p 阶元的共轭类长为 $|G:C_G(x_1)|=p-1$，从而$|C_G(x_1)|=\frac{p(p+1)}{2}$. 故

$$S_p(C_G(x_1))=\frac{p-2}{p}|C_G(x_1)|=\frac{(p-2)(p+1)}{2}$$

而$(p-1)\mid S_p(C_G(x_1))$，我们有$(p-1)\mid(p-2)$或$(p-1)\mid(p+1)$，即 p 只能为 2，这与 $p\geqslant 5$ 矛盾.

以下假设 p 阶元有两个共轭类. 设 x_2,x_3 为 p 阶元共轭类的代表. 同样由引理 2 和引理 3 知

$$\mu_p(G)=\frac{2}{p}=1-\mu_p(C_G(x_2))+1-\mu_p(C_G(x_3))$$

由于 $1-\mu_p(C_G(x_i))\geqslant\frac{1}{p}$，则

$$1-\mu_p(C_G(x_2))=1-\mu_p(C_G(x_3))=\frac{1}{p}$$

即

$$\frac{S_p(C_G(x_2))}{|C_G(x_2)|}=\frac{S_p(C_G(x_3))}{|C_G(x_3)|}=\frac{p-1}{p} \tag{1}$$

由于 p 阶元有两个共轭类，则 p 阶元的两个共轭类长的和为

$$|G:C_G(x_2)|+|G:C_G(x_3)|=p-1$$

从而

$$\frac{1}{|C_G(x_2)|}+\frac{1}{|C_G(x_3)|}=\frac{2}{p(p+1)}$$

结合(1)式得

$$\frac{1}{S_p(C_G(x_2))}+\frac{1}{S_p(C_G(x_3))}=\frac{2}{(p+1)(p-1)}$$

通过放缩有

$$\frac{1}{S_p(C_G(x_2))}+\frac{1}{S_p(C_G(x_3))}=\frac{S_p(C_G(x_2))+S_p(C_G(x_3))}{S_p(C_G(x_2))\cdot S_p(C_G(x_3))}\geqslant\frac{4}{S_p(C_G(x_2))+S_p(C_G(x_3))}$$

从而

$$\frac{2}{(p+1)(p-1)}\geqslant\frac{4}{S_p(C_G(x_2))+S_p(C_G(x_3))}$$

即

$$S_p(C_G(x_2))+S_p(C_G(x_3))\geqslant 2(p+1)(p-1)$$

如果 $S_p(C_G(x_2))>(p+1)(p-1)$ 或 $S_p(C_G(x_3))>(p+1)(p-1)$,则与 $S_p(G)=p^2-1$ 矛盾. 如果 $S_p(C_G(x_2))=S_p(C_G(x_3))=(p+1)(p-1)$,则由(1)式得 $|C_G(x_2)|=|C_G(x_3)|=p(p+1)$. 由于 $n_p=1$,则 $P\lhd G$. 由 N/C 定理知

$$N_G(P)/C_G(P)=G/C_G(P)\lesssim \mathrm{Aut}(P)\cong Z_{p-1} \tag{2}$$

设 f 是 G 到 $G/C_G(P)$ 的同态映射,N 是包含 $C_G(P)$ 的极大正规子群. 由子群对应定理知,$G/N\cong(G/C_G(P))/f(N)$. 又由(2)式知 $(G/C_G(P))/f(N)$ 同构于素数阶循环群,通过步骤1知 G/N 是非交换单群,则 $G/N=1$. 又由于 $G/C_G(P)\cong G/C_G(\langle x_2\rangle)\cong Z_{\frac{p-1}{2}}$,则 $\frac{p-1}{2}=1$,即 $p=3$,这与我们假设的 $p\geqslant 5$ 矛盾. 因此 $n_p\neq 1$,即 G 中的 Sylow p-子群不正规.

步骤3 G 既不是 Frobenius 群也不是 2-Frobenius 群.

首先假设 G 是 Frobenius 群且 G 是偶阶. 设 H 是 Frobenius 核,K 是 Frobenius 补,由引理4知 $t(G)=2$ 且 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$. 由步骤2知 G 中顶点 p 是孤立点,则 $\Gamma(G)=\{p,\pi(K)\}$ 或 $\Gamma(G)=\{p,\pi(H)\}$.

若 $\Gamma(G)=\{p,\pi(K)\}$,则 P 是 Frobenius 核,从而 P 在 G 中正规,矛盾.

若 $\Gamma(G)=\{p,\pi(H)\}$,则 P 是 Frobenius 补,从而 $|P|\mid(|H|-1)$,即 $p\left|\left(\frac{(p+1)(p-1)}{2}-1\right)\right.$,故 $p=3$,这与我们假设的 $p\geqslant 5$ 矛盾.

假设 G 是 2-Frobenius 群且 G 是偶阶. 由引理4知 2-Frobenius 群可解,这与 G 是完全群矛盾.

步骤4 $G\cong PSL(2,p)$.

若群 G 为引理5中的结构(iii),即 G 有一正规列 $1\unlhd H\unlhd K\unlhd G$,其中 K/H 是非交换单群,H 和 G/K 是 π_1-群. 由于 $G/K\lesssim \mathrm{Out}(K/H)$,而单群的外自同构群为可解群[9],则 G/K 为可解群. 由步骤1知 G 是完全群,故 $G=K$. 假设 $p\mid |H|$,由于 H 是 π_1-群且幂零,则 $p=2$,这与假设 $p\geqslant 5$ 矛盾. 从而 $p\mid |G/H|$,故 G/H 的素图非连通,且 p 是 G/H 的素图的孤立点. 以下运用非连通素图的单群分类[14-16]进行证明. 注意,$|G/H|\;\left|\;\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\right.$.

下面证明 $G/H\cong PSL(2,p)$,显然由 $|G|=|PSL(2,p)|$ 就证明了 $G\cong PSL(2,p)$. 以下 s 为奇素数,q 为素数幂,单群的阶参见文献[17]. 我们根据素图分支的个数进行讨论.

G/H 的素图为两个连通分支：

情形 1　$G/H\cong A_{s-1}(q)$，其中 $s\geqslant 2$，q 为奇素数幂，或 q 为 2 的幂且 $(s,q)\neq(3,2),(3,4)$.

由于 $A_{s-1}(q)$ 的孤立点为 $\dfrac{q^s-1}{q-1}\gcd(s,q-1)$，$G/H$ 的孤立点为 p，则 $\dfrac{q^s-1}{q-1}\gcd(s,q-1)=p$，即

$$(q^s-1)=p(q-1)\gcd(s,q-1) \tag{3}$$

又由于 $G/H\cong A_{s-1}(q)$ 且 $|G/H|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|A_{s-1}(q)|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(s,q-1)}q^{\frac{s(s-1)}{2}}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^s-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1) \tag{4}$$

将(3) 式代入(4) 式，得

$$q^{\frac{s(s-1)}{2}}(q^2-1)(q^3-1)\cdots p(q-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

则 $q^{\frac{s(s-1)}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(p+1)(p-1)$. 由(3) 式知 $p\leqslant q^s-1$，代入 $q^{\frac{s(s-1)}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}(p+1)(p-1)$ 有 $q^{\frac{s(s-1)}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}q^s(q^s-2)<\dfrac{q^{2s}}{2}$，于是 $s<5$. 同时由于 $s\geqslant 2$ 且 s 是奇素数，则 $s=3$. 将 $s=3$ 代入(3) 式得 $q^3-1=p(q-1)\gcd(3,q-1)$，即 $p\leqslant q^3-1$. 将 $s=3$ 代入(4) 式得 $\dfrac{q^3(q^2-1)(q^3-1)}{(3,q-1)}\,\Big|\,\dfrac{p(p+1)(p-1)}{2}$. 根据

$$q^3-1=p(q-1)\gcd(3,q-1)$$

得

$$q^3(q^2-1)(q-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}(p+1)(p-1)$$

由于 $p\leqslant q^3-1$，则 $\dfrac{(p+1)(p-1)}{2}\leqslant\dfrac{q^3(q^3-2)}{2}$. 从而

$$q^3(q^2-1)(q-1)\leqslant\frac{(p+1)(p-1)}{2}\leqslant\frac{q^3(q^3-2)}{2}$$

于是 $q=2$. 将 $s=3$，$q=2$ 代入原条件 $|G/H|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$ 和 $G/H\cong A_{s-1}(q)$ 中，得

$$G/H\cong A_2(2)\cong PSL(2,7)$$

情形 2　$G/H\cong A_s(q)$，其中 $(q-1)\mid(s+1)$ 且 $s\geqslant 1$.

由于 $A_s(q)$ 的孤立点为 $\dfrac{q^s-1}{q-1}$，G/H 的孤立点为 p，则 $\dfrac{q^s-1}{q-1}=p$，即 $q^s-1=p(q-1)$. 又由于 $G/H\cong A_s(q)$ 且 $|G/H|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|A_s(q)|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(s+1,q-1)}q^{\frac{s(s+1)}{2}}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^s-1)(q^{s+1}-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

根据 $q^s-1=p(q-1)$ 得

$$\frac{1}{(s+1,q-1)}q^{\frac{s(s+1)}{2}}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q-1)(q^{s+1}-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}(p+1)(p-1)$$

根据 $p=\dfrac{q^s-1}{q-1}$ 得

$$\frac{(p+1)(p-1)}{2}=\frac{(q^s+q-2)(q^s-q)}{2(q-1)^2}<\frac{q^{2s}}{2(q-1)^2}$$

从而由整除关系易知

$$\frac{q^{\frac{s(s+1)}{2}}}{(s+1,\ q-1)}<\frac{q^{2s}}{2(q-1)^2}$$

即 $q^{\frac{s(s+1)}{2}}<q^{2s}$，故 $s<3$. 由于 $s\geqslant 1$，且 s 是奇素数，则 $s=1$. 当 $s=1$ 时，通过 $\frac{q^s-1}{q-1}=p$ 得 $p=1$，这与我们假设的 $p\geqslant 5$ 矛盾.

情形3 $G/H\cong B_{2m}(q)$，其中 $m\geqslant 2$ 且 q 为奇素数幂.

由于 $B_{2m}(q)$ 的孤立点为 $\frac{q^l+1}{2}$，G/H 的孤立点为 p，则 $\frac{q^l+1}{2}=p$，即 $q^l+1=2p$. 又由于

$$|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong B_{2m}(q)$$

则 $|B_{2m}(q)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(2,\ q-1)}q^{2^{2m}}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2^{m+1}}-1)\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

根据 $p=\frac{q^l+1}{2}$ 得

$$\frac{1}{(2,\ q-1)}q^{2^{2m}}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2^m}-1)\ \Big|\ \frac{1}{16}(q^l+1)(q^l+3)(q^l-1)$$

显然有 $(q^{2^{2m}},\ q^l+1)=1$，$(q^{2^{2m}},\ q^l-1)=1$，$q^{2^{2m}}\nmid(q^l+3)$，这与整除关系矛盾.

假设 $G/H\cong C_{2m}(q)$，其中 $m\geqslant 1$，且 q 为奇素数幂；$G/H\cong C_{2m}(q)$，其中 q 为2的幂. 由于 $|C_{2m}(q)|=|B_{2m}(q)|$，则证明与 $G/H\cong B_{2m}(q)$ 一致.

情形4 $G/H\cong B_s(3)$，其中 $s\geqslant 2$.

由于 $B_s(3)$ 的孤立点为 $\frac{3^s-1}{2}$，G/H 的孤立点为 p，则 $\frac{3^s-1}{2}=p$，即 $3^s-1=2p$. 又由于 $G/H\cong B_s(3)$ 且 $|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|B_s(3)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即 $3^{s^2}(3^2-1)\cdots(3^{2s}-1)\mid p(p+1)(p-1)$. 根据 $p=\frac{3^s-1}{2}$ 得 $3^{s^2}(3^2-1)\cdots(3^{2s}-1)\ \Big|\ \frac{1}{8}(3^s-1)(3^s+1)(3^s-3)$. 由原条件知 $s\geqslant 2$，显然有 $(3^{s^2},\ 3^s-1)=1$，$(3^{s^2},\ 3^s+1)=1$，$3^{s^2}\nmid(3^s-3)$，这与整除关系矛盾.

假设 $G/H\cong C_s(3)$，其中 $s\geqslant 2$. 由于 $|B_s(3)|=|C_s(3)|$，则证明与 $G/H\cong B_s(3)$ 一致.

情形5 $G/H\cong {}^2A_{s-1}(q^2)$，其中 $s\geqslant 3$.

由于 G/H 的孤立点为 p，${}^2A_{s-1}(q^2)$ 的孤立点为 $\frac{q^s+1}{q+1}\gcd(s,\ q+1)$，则 $\frac{q^s+1}{q+1}\gcd(s,\ q+1)=p$，即

$$q^s+1=p(q+1)\cdot(s,\ q+1)$$

又由于 $G/H\cong {}^2A_{s-1}(q^2)$ 且 $|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|{}^2A_{s-1}(q^2)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(s,\ q^2+1)}q^{s(s-1)}(q^4-1)(q^6+1)\cdots(q^{2s}-(-1)^s)\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

根据 $q^s+1=p(q+1)\cdot(s,\ q+1)$ 得

$$\frac{1}{(s,\ q^2+1)}q^{s(s-1)}(q^4-1)(q^6+1)\cdots(q^s-1)p(q+1)\gcd(s,\ q+1)<\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

则 $q^{s(s-1)}(q^s-1)<\frac{1}{2}(p+1)(p-1)$. 由 $q^s+1=p(q+1)\cdot(s,\ q+1)$ 知 $p\leqslant q^s+1$，则

$$q^{s(s-1)}(q^s-1)<\frac{(p+1)(p-1)}{2}\leqslant\frac{(q^s+2)\cdot q^s}{2}$$

由于 $q^s-1>\dfrac{q^s}{2}$，则 $q^{s(s-1)}<q^s+2<q^{s+1}$，于是 $s<1+\sqrt{2}$，这与 $s\geqslant 3$ 矛盾.

情形 6　$G/H\cong{}^2A_s(q^2)$，其中$(q+1)\mid(s+1)$ 且 $s\geqslant 2$.

由于G/H 的孤立点为 p，${}^2A_s(q^2)$ 的孤立点为$\dfrac{q^s+1}{q+1}$，则$\dfrac{q^s+1}{q+1}=p$，即 $q^s+1=p(q+1)$. 又由于 $G/H\cong{}^2A_s(q^2)$ 且 $|G/H|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|{}^2A_s(q^2)|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(s+1,q^2+1)}q^{s(s+1)}(q^4-1)(q^6+1)\cdots(q^{2(s-1)}-(-1)^{s+1})\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\tag{5}$$

由(5) 式左边得

$$\frac{q^{s(s+1)}(q^4-1)(q^6+1)\cdots(q^{2(s-1)}-(-1)^{s+1})}{(s+1,q^2+1)}\geqslant q^{s(s+1)}(q^{s+1}+1)$$

由(5) 式右边得

$$\frac{p(p+1)(p-1)}{2}\leqslant\frac{q^s(q^s+1)(q^s+2)}{2}$$

由整除关系得 $q^{s(s+1)}(q^{s+1}+1)\leqslant\dfrac{1}{2}q^s(q^s+1)(q^s+2)$，这与 $q^{s(s+1)}(q^{s+1}+1)>\dfrac{1}{2}q^s(q^s+1)(q^s+2)$ 矛盾.

情形 7　$G/H\cong{}^2D_{2^n}(q^2)$，其中 $n\geqslant 1$ 且 q 为奇素数幂.

由于${}^2D_{2^n}(q^2)$ 的孤立点为$\dfrac{q^l+1}{2}$，G/H 的孤立点为 p，则$\dfrac{q^l+1}{2}=p$. 又由于

$$|G/H|\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong{}^2D_{2^n}(q^2)$$

则 $|{}^2D_{2^n}(q^2)|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{1}{(4,q^{2^{n+1}}+1)}\cdot q^{2^{n+1}(2^n-1)}(q^{2^{n+1}}+1)(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(2^n-1)}-1)\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

根据 $p=\dfrac{q^l+1}{2}$ 得

$$\frac{1}{(4,q^{2^{n+1}}+1)}\cdot q^{2^{n+1}(2^n-1)}(q^{2^{n+1}}+1)(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(2^n-1)}-1)\,\Big|\,\frac{1}{16}(q^l+1)(q^l+3)(q^l-1)$$

显然有 $q^{2^{n+1}(2^n-1)}\nmid(q^l-1)$，$q^{2^{n+1}(2^n-1)}\nmid(q^l+1)$，因此 $q^{2^{n+1}(2^n-1)}\mid(q^l+3)$，则 $q=3$ 且 $2^{n+1}(2^n-1)=1$. 这与 $2^{n+1}(2^n-1)\geqslant 4$ 矛盾.

情形 8　$G/H\cong{}^2D_s(3^2)$，其中 $s\geqslant 5$ 且 $s\neq 2^n+1$.

由于${}^2D_s(3^2)$ 的孤立点为$\dfrac{3^s+1}{4}$，G/H 的孤立点为 p，则$\dfrac{3^s+1}{4}=p$. 又由于

$$|G/H|\,\Big|\,\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong{}^2D_s(3^2)$$

则 $|{}^2D_s(3^2)|\,\Big|\,\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$9^{s(s-1)}(9^s+1)(9^2-1)(9^4-1)\cdots(9^{2(s-1)}-1)\mid p(p+1)(p-1)$$

根据 $p=\dfrac{3^s+1}{4}$ 得

$$9^{s(s-1)}(9^s+1)(9^2-1)(9^4-1)\cdots(9^{2(s-1)}-1)\,\Big|\,\frac{1}{64}(3^s+1)(3^s+5)(3^s-3)$$

显然有 $9^{s(s+1)}\nmid(3^s+1)$，$9^{s(s+1)}\nmid(3^s+5)$. 因此 $9^{s(s+1)}\mid(3^s-3)$，即 $2s(s-1)$ 只可能为 1. 这与 $2s(s-1)\geqslant 40$ 矛盾. 同理可证 $G/H\cong{}^2D_l(3^2)$，其中 $l=2^n+1$ 且 $l\neq s$.

假设 G/H 同构于单群 S，根据 Atlas 定理[17,9] 知群 S 的阶，则 S 取以下群之一：

① $D_s(2)$，其中 $s\geqslant 3$，$|D_s(2)|=2^{s(s-1)}(2^s-1)(2^2-1)(2^4-1)\cdots(2^{2(s-1)}-1)$；

② $D_{s+1}(2)$，其中 $s\geqslant 2$，$|D_{s+1}(2)|=2^{s(s+1)}(2^{s+1}-1)(2^2-1)(2^4-1)\cdots(2^{2s}-1)$；

③ $D_s(3)$，其中 $s\geqslant 5$，$|D_s(3)|=3^{s(s-1)}(3^s-1)(3^2-1)(3^4-1)\cdots\dfrac{3^{2(s-1)}-1}{(4,\ 3^s-1)}$；

④ $D_{s+1}(3)$，其中 $s\geqslant 3$，$|D_{s+1}(3)|=3^{s(s+1)}(3^{s+1}-1)(3^2-1)(3^4-1)\cdots\dfrac{3^{2s}-1}{(4,\ 3^{s+1}-1)}$；

⑤ $D_s(5)$，其中 $s\geqslant 5$，$|D_s(5)|=5^{s(s-1)}(5^s-1)(5^2-1)(5^4-1)\cdots\dfrac{5^{2(s-1)}-1}{(4,\ 5^s-1)}$；

⑥ ${}^3D_4(q^3)$，其中 q 为奇素数幂，$|{}^3D_4(q^3)|=q^{36}(q^{24}+q^{12}+1)(q^{18}-1)(q^6-1)$；

⑦ ${}^2D_{k+1}(2)$，其中 $k=2^n$ 且 $n\geqslant 2$，$|{}^2D_{k+1}(2)|=2^{k(k+1)}(2^{k+1}+1)(2^2-1)\cdots\dfrac{2^{2k}-1}{(4,\ 2^{k+1}+1)}$；

⑧ ${}^2D_k(q)$，这里 q 为 2 的幂，其中 $k=2^n$ 且 $n\geqslant 2$，$|{}^2D_k(q)|=q^{k(k-1)}(q^k+1)(q^2-1)(q^4-1)\cdots\dfrac{q^{2(k-1)}-1}{(4,\ q^k+1)}$；

⑨ $G_2(q)$，其中 $q\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 q 为奇素数幂，$|G_2(q)|=q^6(q^6-1)(q^2-1)$；

⑩ $E_6(q)$，其中 $q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 q 为奇素数幂；$E_6(q)$，其中 $q\neq 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 q 为奇素数幂，

$|E_6(q)|=\dfrac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{(3,\ q-1)}$；

⑪ ${}^2E_6(q^2)$，其中 $q\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 q 为 2 的幂；${}^2E_6(q^2)$，其中 q 为奇素数幂，

$|{}^2E_6(q^2)|=\dfrac{q^{72}(q^{24}-1)(q^{18}+1)(q^{16}-1)(q^{12}-1)(q^{10}+1)(q^4-1)}{(3,\ q^2+1)}$；

⑫ ${}^2A_3(2^2)$，$|{}^2A_3(2^2)|=4^6\times(4^2-1)(4^3+1)(4^4-1)$；

⑬ $F_4(q)$，其中 q 为奇素数幂，$|F_4(q)|=q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$；

⑭ ${}^2F_4(2)'$，$|{}^2F_4(2)'|=2^{11}\times 3^3\times 5^2\times 13$；

⑮ $C_s(2)$，其中 $s\geqslant 2$，$|C_s(2)|=2^{s^2}(2^2-1)(2^4-1)\cdots(2^{2s}-1)$；

⑯ $\mathrm{Alt}(n)$，其中 $n=s,s+1,s+2$，n 和 $n-2$ 不全为素数且 $n\geqslant 7$，$|\mathrm{Alt}(n)|=\dfrac{n!}{2}$.

由于 $G/H\cong S$ 且 $|G/H|\ \Big|\ \dfrac{p(p+1)(p-1)}{2}$，则 $|S|\ \Big|\ \dfrac{p(p+1)(p-1)}{2}$. 又由于 G/H 的孤立点为 p，S 的孤立点见文献[14] 的表 Ib，Ic、文献[15] 的表 Ia，Ib 以及文献[16]，则 G/H 的孤立点 p 等于 S 的孤立点，从而 $|S|>\dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与 $|S|\ \Big|\ \dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$ 矛盾.

G/H 的素图为 3 个连通分支：

情形 1　$G/H\cong\mathrm{Alt}(n)$，其中 $n=5,6$.

由于 $\mathrm{Alt}(n)$ 的孤立点为 3 或 5，G/H 的孤立点为 p，则 $p=3,5$. 而 $p\geqslant 5$，我们有 $p=5$. 又由于 $G/H\cong\mathrm{Alt}(n)$ 且 $|G/H|\ \Big|\ \dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|\mathrm{Alt}(n)|\ \Big|\ \dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即 $\dfrac{n!}{2}\ \Big|\ \dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 显然，当 $p=5$ 时有 $|\mathrm{Alt}(n)|\ \Big|\ \dfrac{1}{2}p(p+1)(p-1)$ 成立，从而 $G/H\cong\mathrm{Alt}(5)$.

情形 2　$G/H\cong A_1(q)$，其中 $q\equiv 1(\bmod 4)$ 且 q 为奇素数幂.

由于 $A_1(q)$ 的孤立点为 q 或 $\frac{q+1}{2}$，G/H 的孤立点为 p，则 $q=p$ 或 $\frac{q+1}{2}=p$，又由于

$$|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong A_1(q)$$

则 $|A_1(q)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 当 $q=p$ 时有 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，当 $\frac{q+1}{2}=p$ 时有 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}>\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与整除关系矛盾. 从而 $G/H\cong A_1(p)\cong PSL(2,p)$，其中 $p\equiv 1(\bmod 4)$.

假设 $G/H\cong A_1(q)$，其中 $q\equiv -1(\bmod 4)$ 且 q 为奇素数幂.

由于 $A_1(q)$ 的孤立点为 q 或 $\frac{q-1}{2}$，G/H 的孤立点为 p，则 $q=p$ 或 $\frac{q-1}{2}=p$，又由于

$$|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong A_1(q)$$

则 $|A_1(q)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即

$$\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$$

当 $q=p$ 时有 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，当 $\frac{q-1}{2}=p$ 时有 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}>\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与整除关系矛盾. 从而 $G/H\cong A_1(p)\cong PSL(2,p)$，其中 $p\equiv -1(\bmod 4)$.

假设 $G/H\cong A_1(q)$，其中 q 为 2 的幂. 由于 $A_1(q)$ 的孤立点为 $q-1$ 或 $q+1$，G/H 的孤立点为 p，则 $q-1=p$ 或 $q+1=p$. 又由于

$$|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong A_1(q)$$

则 $|A_1(q)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即 $\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 当 $q-1=p$ 时有 $q(q^2-1)>\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与整除关系矛盾. 当 $q+1=p$ 时，$\frac{q(q^2-1)}{(2,q-1)}\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$ 成立当且仅当 $q=2,4$. 而 $q+1=p\geqslant 5$，则 $q=4$，从而 $G/H\cong A_1(4)\cong L_2(5)$.

情形 3　$G/H\cong A_2(2)$.

由于 $A_2(2)$ 的孤立点为 3 或 7，G/H 的孤立点为 p，则 $3=p$ 或 $7=p$，又由于

$$|G/H|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)\qquad G/H\cong A_2(2)$$

则 $|A_2(2)|\ \Big|\ \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 即 $2^3(2^2-1)(2^3-1)\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 当 $3=p$ 时有 $2^3(2^2-1)(2^3-1)>\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与整除关系矛盾. 当 $7=p$ 时有 $2^3(2^2-1)(2^3-1)\Big|\frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 从而 $G/H\cong A_2(2)\cong L_2(7)$.

情形 4　$G/H\cong {}^2G_2(3^{2m+1})$，其中 $q=3^{2m+1}$ 且 $m\geqslant 1$.

由于 ${}^2G_2(3^{2m+1})$ 的孤立点为 $q^2-\sqrt{3q}+1$ 或 $q^2+\sqrt{3q}+1$，G/H 的孤立点为 p，则 $q^2-\sqrt{3q}+1=p$ 或 $q^2+\sqrt{3q}+1=p$. 又由于

$$|G/H| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1) \qquad G/H \cong {}^2G_2(3^{2m+1})$$

则 $|{}^2G_2(3^{2m+1})| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，即 $q^3(q^3+1)(q-1) \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 显然有 $q \nmid p$，$q \nmid p+1$，$q \nmid p-1$，这与整除关系矛盾.

假设 G/H 同构于单群 S，根据 Atlas 定理[17,9] 知群 S 的阶，则 S 取以下群之一：

① $E_7(3)$，$|E_7(3)| = \frac{1}{2}3^{63} \times (3^{18}-1)(3^{14}-1)(3^{12}-1)(3^{10}-1)(3^8-1)(3^6-1)(3^2-1)$；

② $E_7(2)$，$|E_7(2)| = 2^{63} \times (2^{18}-1)(2^{14}-1)(2^{12}-1)(2^{10}-1)(2^8-1)(2^6-1)(2^2-1)$；

③ ${}^2F_4(q)$，其中 q 为 2 的幂，$|{}^2F_4(q)| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$；

④ $F_4(q)$，其中 q 为 2 的幂，$|F_4(q)| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$；

⑤ ${}^2D_s(3^2)$，其中 $s = 2^n+1$ 且 $n \geqslant 2$，$|{}^2D_s(3^2)| = 9^{s(s-1)} \times (9^s+1) \times (9^2-1) \times (9^4-1) \cdots \frac{(9^{2(s-1)}-1)}{(4,\ 9^s+1)}$；

⑥ $G_2(q)$，其中 $q \equiv 0 \pmod 3$ 且 q 为奇素数幂，$|G_2(q)| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$；

⑦ ${}^2A_5(2^2)$，$|{}^2A_5(2^2)| = 4^{15}(4^2-1)(4^3+1)(4^4-1)(4^5+1)(4^6-1)$；

⑧ $\mathrm{Alt}(n)$，这里 $n = s$，$n-2 = q$，$n \geqslant 7$，其中 q 为奇素数幂，$|\mathrm{Alt}(n)| = \frac{n!}{2}$.

由于 $G/H \cong S$ 且 $|G/H| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 又由于 G/H 的孤立点为 p，S 的孤立点见文献[14] 的表 Id、文献[15] 的表 II，则 G/H 的孤立点 p 等于 S 的孤立点，从而 $|S| > \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$矛盾.

G/H 的素图为 4 或 5 个连通分支：

假设 G/H 同构于单群 S，则 S 是以下群之一：当 q 为 2 的幂时，S 同构于 $A_2(4)$；${}^2E_6(4)$；$E_8(q)$，其中 $q \equiv 2,3 \pmod 5$；$E_8(q)$，其中 $q \equiv 0,1,4 \pmod 5$；${}^2B_2(q)$，其中 $q = 2^{2k+1}$ 且 k 为正整数. 当 q 为奇素数幂时，S 同构于 $E_8(q)$，其中 $q \equiv 2,3 \pmod 5$；$E_8(q)$，其中 $q \equiv 0,1,4 \pmod 5$. 由于 $G/H \cong S$ 且 $|G/H| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 又由于 G/H 的孤立点为 p，S 的孤立点见文献[14] 的表 Ie 以及文献[15] 的表 III，则 G/H 的孤立点 p 等于 S 的孤立点，再根据文献[9] 的第 311 页知 $|S|$，从而 $|S| > \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$矛盾.

最后假设 G/H 同构于零散单群 S. 由于 $G/H \cong S$ 且 $|G/H| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，则 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$. 又由于 G/H 的孤立点为 p，S 的孤立点见文献[14] 的表 IIa-IIc，则 G/H 的孤立点 p 等于 S 的孤立点，再根据文献[9] 的第 312 页知 $|S|$，从而 $|S| > \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$，这与 $|S| \,\Big|\, \frac{1}{2}p(p+1)(p-1)$ 矛盾.

综上所述 $G/H \cong PSL(2,\ p)$，从而 $G \cong PSL(2,\ p)$.

参考文献：

[1] 钱焱，陈贵云. 同阶交换子群个数之集为{1，3}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：100-104.

[2] 雷倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[3] 刘鑫，杨梅，晏燕雄. 单群 A_8 与 $L_3(4)$的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(4)：5-8.

[4] ISAACS I M，KANTOR W M，SPALTENSTEIN N. On the Probability That a Group Element is p-Singular [J]. Journal of Algebra，1995，176(1)：139-181.

[5] BABAI L，PÁLFY P P，SAXL J. On the Number of p-Regular Elements in Finite Simplegroups [J]. LMS Journal of Computation and Mathematics，2009，12：82-119.

[6] QIAN G H，WANG Y M. On Class Size of p-Singular Elements in Finite Groups [J]. Communications in Algebra，2009，37(4)：1172-1181.

[7] GUEST S. The Exact Number of r-Regular Elements in Finite Exceptional Groups [D]. Southampton：University of Southampton，2013.

[8] ZHAO X H，CHEN R F，ZHOU Y Y，et al. On the Centralizers of the p-Regular Elements in a Finite Group [J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society，New Series，2021，52(2)：353-360.

[9] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 北京：科学出版社，2014.

[10] 邵长国. 用同阶元个数研究有限群 [D]. 苏州：苏州大学，2008.

[11] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin：Springer-Verlag，1967.

[12] 陈贵云. Frobenius 群与 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485-487.

[13] 何立官，陈贵云. 关于 Mathieu 群的一个新刻画 [J]. 数学进展，2017，46(5)：729-734.

[14] WILLIAMS J S. Prime Graph Components of Finite Groups [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487-513.

[15] IIYORI N，YAMAKI H. Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type Over the Field of Even Characteristic [J]. Journal of Algebra，1993，155(2)：335-343.

[16] IIYORI N，YAMAKI H. Corrigendum："Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type Over the Field of Even Characteristic" [J]. Journal of Algebra，1996，181(2)：659.

[17] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

责任编辑　廖坤