

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.12.012

关于矩阵乘法教学设计的一些思考^①

张海艳, 李卿擎, 吴素琴

陆军炮兵防空兵学院 基础部, 合肥 230031

摘要: 本文通过发生教学法对矩阵乘法的定义进行了教学设计, 根据学生的认知规律, 帮助学生了解矩阵乘法的创立过程, 理解矩阵乘法的本质. 特别地, 从矩阵乘法的本质出发, 由线性变换的复合顺序不同导致结果不同, 说明矩阵乘法不满足交换律的原因. 通过比较、举反例, 总结出矩阵乘法的运算规律和特点. 通过分析线性方程组、矩阵方程与矩阵乘法之间的关系, 让学生体会矩阵乘法在矩阵理论中的重要性. 最后结合 Matlab 软件从图像处理方面介绍了矩阵乘法的应用. 教学中多次设计了与学生互动的环节, 以学生为主体、教师为主导的教学模式增加了学生在发现知识过程中的学习投入和情感投入, 激发了学生学习数学的内在动机, 培养了学生发现知识的能力, 提高了学生分析问题和解决问题的能力.

关键词: 发生教学法; 矩阵乘法; 线性变换; 图像处理

中图分类号: G642.0

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2022)12-0118-07

Some Idea on the Teaching Design for Matrix Multiplication

ZHANG Haiyan, LI Qingqing, WU Suqin

Department of Basic, Army Academy of Artillery and Air Defense of PLA, Hefei 230031, China

Abstract: The article designs the definition of matrix multiplication through the generative teaching method. According to the cognitive laws of students, it helps students to understand the creation process of matrix multiplication and the essence of matrix multiplication. In particular, starting from the essence of matrix multiplication, we notice that different composite orders of linear transformations lead to different results, which shows that matrix multiplication does not satisfy the commutative law. Then, the operation rules and characteristics of matrix multiplication are summarized by comparison and negative examples. By analyzing the relationship between linear equations, matrix equations and matrix multiplication, students can realize the importance of matrix multiplication in matrix theory. Finally, the application of matrix multiplication is introduced from the aspect of image processing combined with Matlab software. The interaction with students has been designed for many times in teaching. Teaching of "Student-centered, teacher-led" increases students' learning input and emotional input in the process of discovering knowledge, stimulates students' intrinsic motivation to learn mathematics, cultivates students' ability to discover knowledge and excellent intelligence, and improves students' ability to analyze and solve problems.

Key words: generative teaching method; matrix multiplication; linear transformation; image processing

① 收稿日期: 2022-05-16

基金项目: 陆军炮兵防空兵学院(2021年)科研自主立项基金项目(PFXY210101088);安徽省质量工程项目(2020jyxm1850).

作者简介: 张海艳, 助教, 主要从事应用数学及教学的研究.

《教育部关于一流本科课程建设的实施意见》(教高[2019]8号)中指出:“课程目标坚持知识、能力、素质有机融合,培养学生解决复杂问题的综合能力和高级思维.课程设计增加研究性、创新性、综合性内容,加大学生学习投入,科学‘增负’,让学生体验‘跳一跳才能够得着’的学习挑战”.因此我们要积极探索教学的新方法,创新教学模式,提高本科教育质量,培养符合新时代要求的大学生.对大学数学的教学,要实现此目标,必须推行数学教学改革,增加数学教学难度,拓展数学教学深度,把数学课堂变成启迪智慧的场所.

随着大数据时代的发展,互联网在源源不断地产生各种结构的海量数据^[1],其中包含了大量的非结构化数据,对这些数据的处理离不开矩阵理论.矩阵运算是线性代数课程教学中重要的知识点之一,而矩阵乘法又是矩阵理论中最重要的运算之一.多数教师在讲授这部分内容时会直接给出矩阵乘法的公式,然后再解释公式的含义.有许多文献对矩阵乘法的教学方法做了探讨.文献[2]介绍了发生教学法的理论基础和在矩阵运算教学中的应用.文献[3]从实际生活背景引入,讲解了矩阵乘法的理论部分.文献[4]也从实际应用背景出发,详细地分析了矩阵乘法的运算法则和特征.文献[5]主要从行和列的角度对矩阵乘法进行了拓展.文献[6]分别从数学角度和图形学角度讨论了矩阵乘数,矩阵乘向量和矩阵乘矩阵.文献[7]从不同维度的空间变换探讨了矩阵乘法不满足乘法交换律的问题.文献[8]从实例出发解释了矩阵乘法规则的自然性和科学性.为培养学生知其然、知其所以然的数学素养,激发学生的探索精神和创新精神,本文基于发生教学法,从矩阵乘法定义的历史背景(即知识发生的源头)讲起,让学生认识一般矩阵乘法定义的来源,理解矩阵乘法的本质.通过比较和举反例,得出矩阵乘法的运算性质,特别地,从本质出发让学生深刻理解为什么矩阵乘法不满足交换律,让学生知其然并知其所以然.通过矩阵乘法将线性方程组写成矩阵方程的形式,启发学生在解决问题时要抓住事物的本质.最后通过学生们熟悉的图像编辑软件,引入数学实验,拓展数学应用^[9],加深同学们对矩阵乘法和矩阵理论强大运用的认识.

1 教学策略

矩阵作为数学工具之一,在现代科学中的应用日益突出,在机器学习、图像处理、无人驾驶、电子工程等方面有着非常重要的应用^[10].矩阵源起于数的思想,是数的拓展,即数阵.矩阵与数类似,可以进行运算.然而,矩阵乘法与数乘相比,过程比较复杂,初学者不理解为什么要这样定义.在教学中,教师可以通过矩阵乘法被创造的过程讲起,带领学生领悟知识的创造过程,促使学生对知识理解得更加深刻和透彻.

教师通过知识的发生过程了解人类是如何获得某些认识的,从而对学生应该如何领悟这些认识做出更好的再创造,这种方法称为发生教学法.发生教学法借鉴历史引入主题,保护学生猎奇的天性,通过引导学生重现知识的再发现过程,培养学生的创造力和创新精神.布鲁纳发现学习理论认为,只有学生自己亲自发现的知识才是真正属于他自己的东西.教学目的不该是学生记住教师和教科书上所陈述的内容,而是要培养学生发现知识的能力,从而培养学生卓越的智力.这样学生就好比得到了打开知识大门的钥匙,可以独立前进了.

2 教学过程

2.1 追根溯源

矩阵加法的定义要求必须是两个同型矩阵才可以施行,只需将对应位置上的元素相加,即可得到两矩阵的和矩阵.在定义矩阵乘法时,同学们自然地会想到(1)式的定义方法

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{bmatrix} \quad (1)$$

即将两个同型矩阵对应位置上的元素相乘,得到它们的乘积矩阵.历史上的确有人曾经这样定义矩阵的乘积,这种乘积称为矩阵的 Hadamard 乘积^[11].

如今, Hadamard 乘积在算法中经常使用,然而在当时的基础数学领域,这种定义方法缺乏实际的应用背景和理论价值,没有被推广开来.历史有其偶然也有其必然,现在广泛应用的矩阵乘积被称为一般的矩阵乘积,它是由英国数学家阿瑟·凯莱在研究线性变换的复合时提出来的.矩阵乘积的这一定义推动了矩阵理论的快速发展.目前,矩阵乘积是矩阵理论中最重要的运算之一.

矩阵的创立是用来解线性方程组问题的,与线性方程组关系非常密切的一类问题即是线性变换问题.

凯莱在研究线性变换的复合时,将线性变换所对应的矩阵之间的运算关系定义为矩阵乘法.

一般矩阵乘法的由来:

1) 线性变换的本质

由变量 x_1, x_2, \dots, x_n 到变量 y_1, y_2, \dots, y_m 的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

的本质是一个由实数空间 \mathbb{R}^n 到实数空间 \mathbb{R}^m 的映射,即多维空间上的映射,可见这个映射可以将 n 维空间中的元素映射到 m 维空间当中. 高等数学中学习过数集上的映射以及映射的复合,学生自然会想知道线性变换的复合是什么样的.

2) 矩阵乘法的定义

根据

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \\ y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \end{cases} \quad (3)$$

计算可得由变量 x_1, x_2 到 z_1, z_2 的线性变换

$$\begin{cases} z_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})x_2 \\ z_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})x_2 \end{cases} \quad (4)$$

线性变换(4)是先做线性变换(3),再做线性变换(2)的结果,即是线性变换(2)与(3)的复合,称为(2)与(3)的乘积. 由于线性变换与其系数矩阵是一一对应的关系,3个线性变换所对应的矩阵分别为 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} ,此时称矩阵 \mathbf{C} 是矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的乘积,记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ^[12].

2.2 理论探究学习

2.2.1 小组讨论,发现规律

通过让学生观察,总结出矩阵 \mathbf{C} 中元素与 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 中元素之间的关系为

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{kj} \quad i=1,2; j=1,2 \quad (5)$$

根据(5)式的运算规则,分组讨论,共同解决以下问题:

- 1) 是否任意两个矩阵都能施行乘法运算?
- 2) 请确定乘积矩阵 \mathbf{C} 中元素的构成和 \mathbf{C} 的形式.

通过学生分享讨论结果,使学生掌握矩阵能相乘的条件,即左矩阵的列数等于右矩阵的行数. 相乘的计算方法为左行右列法——矩阵乘积元素 c_{ij} 等于左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列对应元素乘积之和. 乘积矩阵的行列数——左矩阵的行数为乘积矩阵的行数,右矩阵的列数为乘积矩阵的列数等. 最后共同总结出矩阵乘法的一般定义:

定义 1 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times p$ 矩阵, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 是一个 $p \times n$ 矩阵, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, 如果

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$$

则称矩阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 \mathbf{A} 与矩阵 \mathbf{B} 的乘积,记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

传统的教学理念认为学生知识、技能的获得均来自于教师,所以教师在授课时往往不考虑学生的感受,将知识与技能满堂灌. 近年来一直在提倡应以学生为主体、教师为主导的方式进行教学^[13]. 通过学生课堂上讨论并分享讨论结果的方式,充分发挥学生在课堂上的主体作用,增加学生在发现知识过程中的学习投入和情感投入,提高学生学习的内在动机. 学生在讨论中碰撞出知识的火花,一步步打开真理的大门,深刻掌握知识点的同时,提高语言表达能力和知识讲授能力,增强学好数学的勇气和自信心.

2.2.2 做比较, 总结规律

在学习矩阵加减法时, 我们是通过与实数的加减法比较^[14]引出的, 其运算规律与实数的加减法运算规律较为一致, 由此继续引导学生思考矩阵乘法的运算规律又是如何? 是否仍然和实数乘法的运算规律一致? 引导学生总结出矩阵乘法的运算规律.

表 1 数的乘法与矩阵乘法之间的联系与区别

	数的乘法	矩阵乘法
不同点	任意两个实数都可以相乘	两个矩阵相乘要求左矩阵 A 的列数必须等于右矩阵 B 的行数
	交换律 $ab = ba$	一般地 $AB \neq BA$
	消去律 若 $a \neq 0$ 且 $ab = ac$, 则 $b = c$; 特别地, 若 $ab = 0$ 时, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.	若 $A \neq O$ 且 $AB = AC$, 不能断定 $B = C$; 特别地, 若 $AB = O$ 时, 不能断定 $A = O$ 或 $B = O$, 其中 O 为零矩阵.
相同点	结合律 $(ab)c = a(bc)$	$(AB)C = A(BC)$
	分配律 $(a+b)c = ac + bc$; $a(b+c) = ab + ac$	左分配律 $A(B+C) = AB + AC$ 右分配律 $(A+B)C = AC + BC$

2.2.3 举反例, 溯本求源

在说明矩阵乘法一般不满足交换律和消去律时, 最直接的方法就是举反例.

例 1 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

计算 AC , AB 和 BA .

由 $AC = O$, 可以进一步说明矩阵相乘不满足消去律.

从计算结果中可知, $AB \neq BA$, 即矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法的这一特点与数的乘法有很大的区别, 为什么会有这样的结果呢? 这里从矩阵乘法的本质来说明:

例 1 中矩阵 A 所对应的线性变换为平面上任意一个向量关于 x 轴的投影变换, 即

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

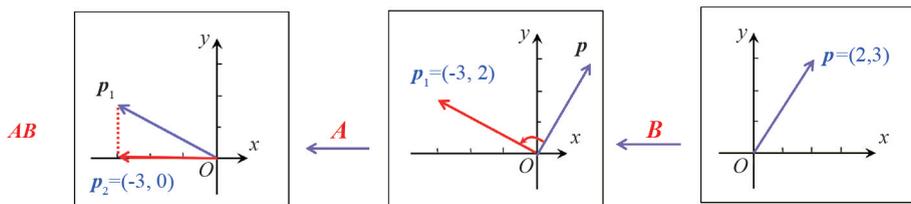
B 所对应的线性变换为绕原点逆时针旋转 90° 的旋转变换, 即

$$\begin{cases} x_2 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_2 = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

其中 $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

下面考虑 A 与 B 所对应的线性变换对平面 \mathbb{R}^2 中任意向量复合作用后的效果, 不妨取 \mathbb{R}^2 中的一个元素 $p = (2, 3)$ (p 在平面中可以代表向量).

AB 所对应的复合线性变换作用于 p , 指先将向量 p 绕原点逆时针旋转 90° , 再对得到的向量 p_1 向 x 轴作投影, 变换后的结果为 $p_2 = (-3, 0)$ (见图 1);

图 1 $p_2 = (-3, 0)$

BA 所对应的复合线性变换作用于 p , 指先对向量 p 作 x 轴的投影, 得到向量 p_3 , 再绕 x 轴逆时针旋转 90° ,

结果为 $p_4 = (0, 2)$ (见图 2).

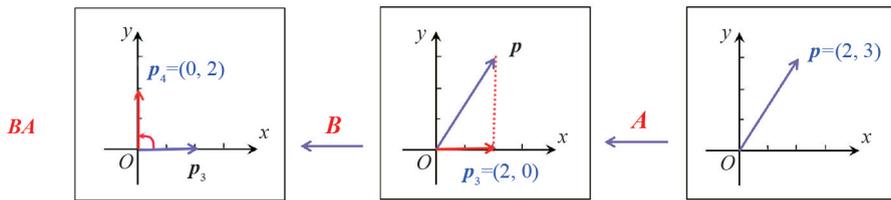


图 2 $p_4 = (0, 2)$

因此线性变换复合的顺序不一样, 结果也往往不一样, 所以, 矩阵乘法运算一般不满足交换律. 此处, AB 称为 A 左乘 B , BA 可称为 A 右乘 B . 矩阵乘法运算满足分配律, 但是由于其不满足交换律, 分配律区分为左分配律和右分配律.

2.3 矩阵方程与线性方程组之间的关系

在解二元一次方程组和三元一次方程组的过程中, 发现方程组的系数对方程组的解起决定性作用. 事实上, 大约在公元前 1 世纪, 我国的《九章算术》的“方程”章中就叙述了一个三元线性方程组的解法, 当时用算筹将未知数的系数和常数项排列成一个长方阵, 运用遍乘直除算法求解, 这就是矩阵最早的雏形, 遍乘直除算法就是现今矩阵的初等变换. 以算法体系为特征的中国传统数学, 为世界数学的发展开创了新观念^[15].

行列式和矩阵都是伴随着解线性方程组而产生的, 都是通过对方程组的系数进行处理而达到解方程的目的. 行列式用来解未知量个数与方程个数相等的线性方程组. 1850 年, 西尔维斯特在研究未知量个数与方程个数不相等的线性方程组时, 行列式不能使用, 提出了矩阵一词, 表示一项由 m 行 n 列元素组成的矩形阵列, 这是最早矩阵一词的使用. 根据矩阵乘法的运算规则, 含有 n 个未知数, m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成矩阵乘法的形式. 令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则线性方程组可记作 $Ax = b$. 此式可看成是矩阵相乘的特殊形式. 其中 A 称为矩阵方程的系数矩阵, x 称为未知数矩阵, b 称为常数项矩阵. 未知量是矩阵的方程称为矩阵方程.

这一形式可以推广到更一般的情形, 令

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

矩阵方程 $AX = B$ 可看作是由系数矩阵相同的 p 个线性方程组组成的. 求矩阵方程的解是后续课程中的重要内容. 矩阵乘法的一般定义, 将求线性方程组的解的问题转换成了求矩阵方程的问题, 极大地简化了线性方程组的求解问题, 这也是矩阵乘法在矩阵论中相当重要的原因.

利用矩阵乘法将线性方程组写成矩阵方程的形式, 只需对矩阵进行相应的处理即可方便快捷地解决线性方程组的解的问题. 启发学生在解决问题时要善于抓住问题的本质, 做到事半功倍.

2.4 矩阵乘法在图像处理中的应用

矩阵乘法在图像处理中有着非常重要的应用. 我们对图片的数字化处理实质上就是对图片所对应的矩阵进行相应的运算. 为了理解这点, 以一个简单的例子说明.

例 2 将图 3 中矩形的 4 个顶点绕原点逆时针旋转 90° ,

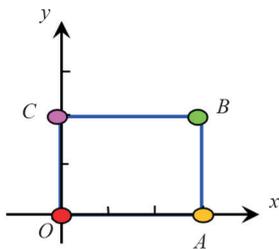


图 3 矩形 $OABC$

点 O, A, B, C 所对应的点坐标作为列向量构成的矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

绕原点逆时针旋转 90° 的线性变换所对应的矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

对 O, A, B, C 这 4 个点同时做线性变换, 就是用 \mathbf{R} 左乘 \mathbf{G} , 计算 $\mathbf{R}\mathbf{G}$, 得到旋转后的 4 个点构成的矩阵为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

旋转后的 4 个点记为 O, A', B', C' , 对应图像为

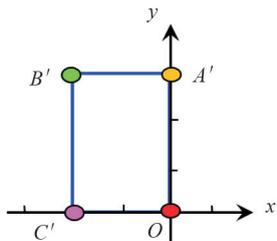


图 4 矩形 $OA'B'C'$

注意, 此处仅仅是将矩形的 4 个顶点进行了旋转.

一般地, 对一张图片进行旋转, 本质上是用旋转变换所对应的矩阵左乘图片所对应的像素矩阵. 具体地用 Matlab 软件进行演示, 如图 5, 即是将战斗机图片逆时针旋转 30° ,



(a) 原图

(b) 旋转 30° 后的图

图 5 战斗机图片

另外, 利用矩阵的运算可以实现对图片的剪切、伸缩以及图片信息的隐藏等. 将相应的 Matlab 程序发送到智慧平台, 供学有余力的学生课后学习和操作. 利用人们常用的图像编辑, 引起学生学习的兴趣, 使学

生认识到矩阵乘法运算的广泛应用,更加重视矩阵理论的学习.

3 小结

本文利用发生教学法,根据学生认知规律,从矩阵乘法的创立过程出发,对矩阵乘法的内容进行了教学设计,带领学生重新经历矩阵乘法的创造过程,理解矩阵乘法的本质是线性变换的复合.通过课堂小组讨论,总结得出矩阵乘法运算规则和运算规律的特点,从本质出发阐述矩阵乘法一般不满足交换律的原因.这个过程,不仅是学生掌握数学知识的过程,更是学生发展创造力,培养科学精神的过程.而后分析了线性方程组与矩阵方程之间的关系,让学生进一步理解了矩阵乘法运算的现实意义.最后从学生常用的图像处理的角度探讨了矩阵乘法的应用,让学生深刻体会到知识来源于实践,概念的创造是用来解决问题的,不是凭空创造出来的.通过 Matlab 的实验操作和课后练习,让学生熟悉数学软件的使用,体会矩阵理论和数学软件的强大应用,培养学生的抽象思维和逻辑思维,加强学生们未来学以致用、学以善用的综合能力和水平^[16].

参考文献:

- [1] 应坚超,蒲飞,徐晨鸥.基于互逆和对称关系补全的知识图谱数据扩展方法[J].西南大学学报(自然科学版),2020,42(11):43-51.
- [2] 张俊忠.发生教学法在矩阵运算教学中的应用[J].西南师范大学学报(自然科学版),2020,45(10):135-140.
- [3] 黄海松,刘卫华.关于矩阵乘法教法的思考[J].学园,2018(7):48,50.
- [4] 王晓平,阮杰昌,任建英.“三教”改革背景下矩阵乘法的教学设计[J].现代职业教育,2021(23):48-49.
- [5] 严奉霞,刘吉英.矩阵乘法教学的一种设计[J].高等数学研究,2015,18(6):51-53.
- [6] 王亚红,梅良才.谈矩阵乘法的理解[J].教育信息化论坛,2019(6):110,115.
- [7] 周艳,梁小花.如何更好地讲解矩阵乘法——线性代数教学思考之一[J].教育教学论坛,2018(44):172-173.
- [8] 蒲和平,李厚彪.对矩阵乘法定义的教学探讨[J].高等数学研究,2018,21(1):65-67,103.
- [9] 闻道君,曾静,王鹏富.关于伴随矩阵的混合式教学设计[J].西南师范大学学报(自然科学版),2021,46(4):172-177.
- [10] DAVID C L.线性代数及其应用[M].3版.刘深泉,洪毅,马东魁,等,译.北京:机械工业出版社,2005.
- [11] 陈引兰,燕敏,韦鹤玲.矩阵的 Hadamard 积及积的特性[J].湖北师范学院学报(自然科学版),2016,36(2):26-28.
- [12] 同济大学数学系.工程数学线性代数[M].6版.北京:高等数学出版社.
- [13] 涂涛,张煜明.基于知识图谱和共词分析的“互联网+教育”研究评述[J].西南大学学报(自然科学版),2021,43(1):1-11.
- [14] 林海波.比较法和反例在矩阵乘法教学中的应用[J].中国科技信息,2011(17):180.
- [15] 李文林.数学史概论[M].3版.北京:高等教育出版社,2011:200-220.
- [16] 吴素琴,王鹏,王振纬.基于课程思政建设的重要极限教学设计[J].高等数学研究,2021,24(4):125-127.

责任编辑 廖坤