第 48 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 1 月
Vol. 48　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan.　2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.001

对流环境下具有额外食物资源的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型[①]

杨旺，　张国洪

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了对流环境下具有额外食物资源的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型. 其中假设捕食者进行随机扩散和定向迁移的混合运动，而食饵只进行简单的随机扩散. 首先得到了模型的耗散性，然后分析了模型边界平衡态解的稳定性，进一步得到了系统种群一致持续的条件. 研究表明，在一定条件下，流速的增加可以为食饵提供保护，从而有利于捕食者与食饵的持久共存.

关　键　词：额外食物资源；对流；Leslie-Gower 捕食者；稳定性；一致持续性

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)01－0001－08

Leslie-Gower Predator-Bait Model in Convective Environments with Additional Food Resources

YANG Wang，　ZHANG Guohong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we study a Leslie-Gower predator-bait model in a convective environment with additional food resources, where the predators are assumed to perform a mixture of random diffusion and directional migration, while the bait only performs simple random diffusion. The dissipativity of the system is first obtained, and then the stability of the equilibrium solution at the boundary of the system is analyzed, and the conditions for the consistent persistence of the system population are further obtained. It is shown that under certain conditions, the increase of flow rate can provide protection for the food bait, which is conducive to the persistent coexistence of predators and food bait.

Key words: additional food resources; convection; Leslie-Gower predator; stability; consistent persistence

捕食者和食饵之间的相互作用是自然界中最常见的现象之一，长期以来受到生态学家和数学家的广泛关注. 文献[1-2]提出了各种类型的捕食者-食饵模型，并研究了其动力学行为. 特别地，Leslie 提出了如下 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型[3-4]：

① 收稿日期：2022－07－20
基金项目：国家自然科学基金项目(11871403).
作者简介：杨旺，硕士研究生，主要从事动力系统的研究.
通信作者：张国洪，副教授.

$$\begin{cases} u_t = u(r_1 - v - au) \\ v_t = v\left(r_2 - \dfrac{bv}{u}\right) \end{cases} \tag{1}$$

这里的 u 和 v 分别表示食饵与捕食者的密度. r_1 与 r_2 分别为食饵和捕食者的增长率，a 是捕食者作用于食饵的捕食系数，都为大于0的常数. $\dfrac{bv}{u}$ 称为 Leslie-Gower 项，表示捕食者的环境容纳量与食饵数量成正比. 在很多情况下，食饵的严重短缺会导致捕食者寻找其他的食物来源，这种情况可以通过将模型(1)中的 Leslie-Gower 项改为 $\dfrac{bv}{u+c}$ 来刻画，这里的 c 衡量着额外食物提供给捕食者营养的水平，模型(1)即变为修正的 Leslie-Gower 模型[5-6].

文献[7]在模型(1)的基础上建立了具有随机扩散的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型，其动态结果和模型(1)类似，即系统的唯一正平衡点是全局稳定的[8]. 除了随机扩散，许多物种还可能向某个方向定向迁移，如在对流环境(如河流)中被单向流动的水流推动等. 近年来，越来越多的学者开始研究河流生态系统中单向水流的冲刷作用对种群的动态影响[9-10]. 综合上述讨论，本文建立如下对流环境下修正的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型：

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + u(r_1 - u - av) & 0 < x < l,\ t > 0 \\ v_t = d_2 v_{xx} - q v_x + v\left(r_2 - \dfrac{bv}{u+c}\right) & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & t > 0 \\ d_2 v_x(0, t) - q v(0, t) = v_x(l, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geqslant 0, \not\equiv 0,\ v(x, 0) = v_0(x) \geqslant 0, \not\equiv 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{2}$$

这里 d_1, d_2 是相应的扩散速度，q 是捕食者受到的对流速度，l 表示河流长度，均为正常数. 其他变量和参数与模型(1)的意义相同. $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 分别表示食饵与捕食者的初始分布. 这里我们假设模型(2)中的捕食者进行包含随机扩散和定向迁移的混合运动，而食饵进行纯粹的随机扩散，这种情况在生态学中是有可能发生的，例如食饵是常居于河底的藻类植物(此处的流速为0)，而捕食者是常居于流速不为0区域的食藻类生物. 由于食饵只进行随机扩散，边界条件 $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ 表示没有食饵会通过边界. 捕食者的边界条件 $d_2 v_x(0, t) - qv(0, t) = v_x(l, t) = 0$ 表示上游为无流的边界(即没有个体通过上游)，下游为自由流的边界条件(表示下游个体离开水域的速度和流速相同，例如溪流进入湖泊). 在本文中，我们总是假设 $d_1, d_2, r_1, r_2, c, a, b, q$ 皆为正常数，并且河流长度为固定值 $l = 1$.

为了研究模型(2)的动力学行为，首先考虑在没有食饵(即 $u \equiv 0$)的情况下，模型(2)所对应的如下单物种模型：

$$\begin{cases} v_t = d_2 v_{xx} - q v_x + v\left(r_2 - \dfrac{bv}{c}\right) & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ d_2 v_x(0, t) - q v(0, t) = v_x(1, 0) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) \geqslant 0, \not\equiv 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

模型(3)的动力学行为由如下线性特征值问题决定：

$$\begin{cases} d_2 \phi_{xx} - q\phi_x + r_2 \phi = \lambda \phi & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ d_2 \phi_x(0) - qv(0) = v_x(1) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

由 Krein-Rutman 定理易知，特征值问题(4)存在单的主特征值 $\lambda_1(d_2, q, r_2)$ 和对应的严格正的特征函数 $\phi_1(d_2, q, r_2)$. 根据文献[11]的引理2.2(b)和文献[12]的引理2.2，可得如下的两个结论，其在后文将对模型(2)的理论分析发挥重要作用：

引理1 设 $d_2, r_2, q > 0$，存在唯一的 $q^* > 0$，这里的 q^* 由 $\lambda_1(d_2, q^*, r_2) = 0$ 唯一确定，使得当 $0 < q < q^*$ 时，$\lambda_1(d_2, q, r_2) > 0$，并且模型(3)存在唯一正稳态解 $\theta(d_2, q)$，且是全局渐进稳定的. 当 $q \geqslant q^*$ 时，$\lambda_1(d_2, q, r_2) \leqslant 0$，并且模型(3)的解 $u = 0$ 是全局渐进稳定的.

引理 2　设 $d_2, r_2>0$，$0<q<q^*$. 模型(3)的正稳态解 $\theta(d_2, q)$ 关于 q 连续可微且单调递减，并且满足 $0<\theta(d_2, q)<\dfrac{cr_2}{b}$，$\lim\limits_{q\to 0^+}\theta(d_2, q)=\dfrac{cr_2}{b}$ 和 $\lim\limits_{q\to q^{*-}}\theta(d_2, q)=0$.

1　模型的耗散性

定理 1　对于给定的初始条件，存在正常数 ρ_1 和 ρ_2，使得模型(2)的解满足 $0<u(x, t)\leqslant\rho_1$ 和 $0<v(x, t)\leqslant\rho_2$.

证　根据文献[13]，可知模型(2)的解局部存在且唯一. 故接下来只需证明解的有界性. 由极大值原理可知 $u(x, t)>0$，$v(x, t)>0$. 结合模型(2)中关于 u 的方程可得

$$u_t\leqslant d_1u_{xx}+u(r_1-u)\qquad 0<x<1,\ t>0$$

根据抛物型方程的比较原理，易知 $\limsup\limits_{t\to+\infty}u(x, t)\leqslant r_1$. 因此存在一个只依赖于初值 $u_0(x)$ 的正常数 ρ_1，使得 $0<u(x, t)\leqslant\rho_1$. 再根据模型(2)关于 v 的方程，有

$$v_t\leqslant d_2v_{xx}-qv_x+v\left(r_2-\frac{b}{\rho_1+c}v\right)\qquad 0<x<1,\ t>0$$

令 $V(x, t)$ 满足

$$\begin{cases}V_t=d_2V_{xx}-qV_x+V\left(r_2-\dfrac{bV}{\rho_1+c}\right) & 0<x<1,\ t>0\\ d_2V_x(0, t)-qV(0, t)=V_x(1, t)=0 & t>0\\ V(x, 0)=v_0(x) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

由引理 1、引理 2，易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x, t)\leqslant\dfrac{(\rho_1+c)r_2}{b}$，再由抛物型方程的比较原理得

$$\limsup_{t\to+\infty}v(x, t)\leqslant\frac{(\rho_1+c)r_2}{b}$$

因此存在一个只依赖于初值 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 的正常数 ρ_2，使得 $0<v(x, t)\leqslant\rho_2$. 则模型(2)存在唯一正解 (u, v)，并且最终有界.

2　边界平衡态解的稳定性

易得模型(2)总是存在边界平衡态解 $(0, 0)$, $(r_1, 0)$. 当 $0<q<q^*$ 时还存在边界平衡态解 $(0, \theta(d_2, q))$. 下面我们研究这 3 个平衡态解的稳定性.

定理 2　模型(2)的灭绝平衡态解 $(0, 0)$ 总是不稳定的.

证　模型(2)在 $(0, 0)$ 处线性化后对应的特征值问题为

$$\begin{cases}d_1\varphi_{xx}+r_1\varphi=\lambda\varphi & 0<x<1\\ d_2\psi_{xx}-q\psi_x+r_2\psi=\lambda\psi & 0<x<1\\ \varphi_x(1)=\varphi_x(0)=0\\ d_2\psi_x(0)-q\psi(0)=\psi_x(1)=0\end{cases}\tag{5}$$

由引理 1 知，特征值问题(5)第一个方程的主特征值 $\lambda_1(d_1, 0, r_1)=r_1>0$，因此模型(2)的平衡点 $(0, 0)$ 总是不稳定的.

定理 3　当 $0<q<q^*$ 时，平衡态解 $(r_1, 0)$ 是不稳定的；当 $q>q^*$ 时，平衡态解 $(r_1, 0)$ 是全局渐进稳定的.

证　首先证明平衡点 $(r_1, 0)$ 的局部稳定性. 考虑模型(2)在 $(r_1, 0)$ 处线性化后的特征值问题

$$\begin{cases}d_1\varphi_{xx}-r_1\varphi-ar_1\psi=\lambda\varphi & 0<x<1\\ d_2\psi_{xx}-q\psi_x+r_2\psi=\lambda\psi & 0<x<1\\ \varphi_x(1)=\varphi_x(0)=0\\ d_2\psi_x(0)-q\psi(0)=\psi_x(1)=0\end{cases}\tag{6}$$

定义 Λ 是特征值问题(6) 的谱，显然 $\Lambda=\Lambda\{\psi=0\}\cup\Lambda\{\psi\neq 0\}$. 当 $\psi=0$ 时，考察特征值问题

$$d_1\varphi_{xx}-r_1\varphi=\lambda\varphi \qquad 0<x<1,\ \varphi_x(1)=\varphi_x(0)=0 \tag{7}$$

易知问题(7) 的主特征值 $\lambda_1(d_1,0,-r_1)=-r_1<0$. 因此对特征值问题(7) 的特征值 λ 都有 $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant\lambda_1<0$，则 $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\Lambda\{\psi=0\}\}<0$. 当 $\psi\neq 0$ 时，考察特征值问题

$$\begin{cases}d_2\psi_{xx}-q\psi_x+r_2\psi=\lambda\psi & 0<x<1\\ d_2\psi_x(0)-q\psi(0)=\psi_x(1)=0\end{cases} \tag{8}$$

定义 $\sigma\left[d_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_2\right]$ 为算子 $d_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_2$ 在相应边界条件下的谱，则 $\Lambda\{\psi\neq 0\}\subseteq\sigma\left[d_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_2\right]$. 根据引理1，若 $0<q<q^*$，则问题(8) 的主特征值 $\lambda_1(d_2,q,r_2)>0$，因此

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\Lambda\{\psi=0\}\cup\Lambda\{\psi\neq 0\}\}>0$$

$(r_1,0)$ 不稳定. 若 $q>q^*$，则问题(8) 的主特征值 $\lambda_1(d_2,q,r_2)<0$，因此

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\Lambda\{\psi=0\}\cup\Lambda\{\psi\neq 0\}\}<0$$

$(r_1,0)$ 局部渐进稳定.

现在证明平衡点 $(r_1,0)$ 是全局吸引的. 由极大值原理易知 $u(x,t)>0$，$v(x,t)>0$. 且根据定理1知

$$\limsup_{t\to+\infty}u(x,t)\leqslant r_1 \tag{9}$$

故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T_1>0$，当 $t>T_1$ 时，$u(x,t)<r_1+\varepsilon$. 则模型(2) 中关于 v 的方程满足

$$v_t\leqslant d_2v_{xx}-qv_x+v\left(r_2-\frac{bv}{r_1+c+\varepsilon}\right) \qquad 0<x<1,\ t>T_1$$

由比较原理可知，当 $t>T_1$ 时，$v(x,t)\leqslant\bar{V}(x,t)$. 其中 $\bar{V}(x,t)$ 是方程

$$\begin{cases}\bar{V}_t=d_2\bar{V}_{xx}-q\bar{V}_x+\bar{V}\left(r_2-\frac{b\bar{V}}{r_1+c+\varepsilon}\right) & 0<x<1,\ t>T_1\\ d_2\bar{V}_x(0,t)-q\bar{V}(0,t)=\bar{V}_x(1,t)=0 & t>0\\ \bar{V}(x,0)=v(x,T_1) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的解. 根据引理1，当 $q>q^*$ 时，$\bar{V}=0$ 是全局渐进稳定的. 因此有 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(x,t)=0$. 则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T_2>T_1$，当 $t>T_2$ 时 $v(x,t)<\varepsilon$. 使得模型(2) 中关于 u 的方程满足

$$u_t\geqslant d_1u_{xx}+u(r_1-a\varepsilon-u) \qquad 0<x<1,\ t>T_2$$

考虑方程

$$\begin{cases}U_t^\varepsilon=d_1U_{xx}^\varepsilon+U^\varepsilon(r_1-a\varepsilon-U^\varepsilon) & 0<x<1,\ t>T_2\\ U_x^\varepsilon(0,t)=U_x^\varepsilon(1,t)=0 & t>0\\ U^\varepsilon(x,T_2)=v(x,T_2) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{10}$$

取 ε 足够小，使得方程(10) 的主特征值 $\lambda_1(d_1,0,r_1-a\varepsilon)=r_1-a\varepsilon>0$. 显然有 $\lim\limits_{t\to+\infty}U^\varepsilon(x,t)=r_1-a\varepsilon$. 进一步由比较原理知 $u(x,t)\geqslant U^\varepsilon(x,t)$. 因此 $\liminf\limits_{t\to+\infty}u(x,t)\geqslant r_1-a\varepsilon$. 结合(9) 式以及 ε 的任意性，可得

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=r_1$$

因此 $(r_1,0)$ 是全局吸引的，故 $(r_1,0)$ 全局渐进稳定.

注1 定理3表明总存在一个流速阈值 q^*，使得当模型(2) 的流速大于该阈值(即 $q>q^*$) 时，平衡态解 $(r_1,0)$ 总是全局稳定的. 这意味者流速较大时，捕食者灭绝，而食饵存活.

接下来，我们考虑流速较小，即 $0<q<q^*$ 时的情况，此时系统存在边界平衡态解 $(0,\theta(d_2,q))$.

定理4 设 $0<q<q^*$.

(i) 当 $r_1>\frac{acr_2}{b}$ 时，边界平衡态解 $(0,\theta(d_2,q))$ 总是不稳定的；

(ii) 当 $r_1<\frac{acr_2}{b}$ 时，存在唯一的 $0<q^{**}<q^*$，使得当 $q<q^{**}$ 时，平衡点 $(0,\theta(d_2,q))$ 全局渐进

稳定；当 $q > q^{**}$ 时，平衡点 $(0, \theta(d_2, q))$ 不稳定.

证　模型(2) 在 $(0, \theta(d_2, q))$ 处线性化后的特征值问题为

$$\begin{cases} d_1\varphi_{xx} + (r_1 - a\theta(d_2, q))\varphi = \lambda\varphi & 0 < x < 1 \\ d_2\psi_{xx} - q\psi_x + \dfrac{b}{c^2}\theta^2(d_2, q)\varphi + \left(r_2 - \dfrac{2b}{c}\theta(d_2, q)\right)\psi = \lambda\psi & 0 < x < 1 \\ \varphi_x(1) = \varphi_x(0) = 0 \\ d_2\psi_x(0) - q\psi(0) = \psi_x(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

同样地，定义 Λ' 是特征值问题(11) 的谱，则 $\Lambda' = \Lambda'\{\psi = 0\} \cup \Lambda'\{\psi \neq 0\}$. 当 $\varphi = 0$ 时，考察特征值问题

$$\begin{cases} d_2\psi_{xx} - q\psi_x + \left(r_2 - \dfrac{2b}{c}\theta(d_2, q)\right)\psi = \lambda\psi & 0 < x < 1 \\ d_2\psi_x(0) - q\psi(0) = \psi_x(1) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

记特征值问题(12) 的主特征值为 $\lambda_1\left(d_2, q, r_2 - \dfrac{2b}{c}\theta(d_2, q)\right)$. 注意到 $\theta(d_2, q)$ 是模型(3) 的正平衡解，显然有 $\lambda_1\left(d_2, q, r_2 - \dfrac{b}{c}\theta(d_2, q)\right) = 0$. 进一步，易知 $r_2 - \dfrac{b}{c}\theta(d_2, q) > r_2 - \dfrac{2b}{c}\theta(d_2, q)$. 根据文献[14]的引理 2.2，可知问题(12) 的主特征值

$$\lambda_1\left(d_1, q, r_2 - \frac{2b}{c}\theta(d_2, q)\right) < \lambda_1\left(d_1, q, r_2 - \frac{b}{c}\theta(d_2, q)\right) = 0$$

因此 $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \Lambda\{\varphi = 0\}\} < 0$. 故特征值问题(11) 主特征值的正负将由 $\varphi \neq 0$ 时的特征方程

$$\begin{cases} d_1\varphi_{xx} + (r_1 - a\theta(d_2, q))\varphi = \lambda\varphi & 0 < x < 1 \\ \varphi_x(1) = \varphi_x(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

决定. 记特征值问题(13) 的主特征值为 $\lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q))$，定义 $\sigma\left[d_1\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + r_1 - a\theta(d_2, q)\right]$ 为算子 $d_1\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + r_1 - a\theta(d_2, q)$ 的谱，则 $\Lambda'\{\varphi \neq 0\} \subseteq \sigma\left[d_1\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + r_1 - a\theta(d_2, q)\right]$.

由引理 2 知，当 $d_2, r_2 > 0$，并且 $0 < q < q^*$ 时，有 $\theta(d_2, q) < \dfrac{cr_2}{b}$. 因此 $r_1 - a\theta(d_2, q) > r_1 - \dfrac{acr_2}{b}$ 总是成立. 当 $r_1 > \dfrac{acr_2}{b}$ 时，根据文献[14] 的引理 3 可以得到

$$\lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q)) > \lambda_1\left(d_1, 0, r_1 - \frac{acr_2}{b}\right) > 0 \tag{14}$$

平衡态解不稳定. 当 $r_1 < \dfrac{ac}{b}r_2$，且 $q \to 0^+$ 时，$\lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, 0)) = r_1 - \dfrac{ac}{b}r_2 < 0$. 当 $q \to q^{*-}$ 时，$\lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q^*)) = r_1 > 0$. 由 $\theta(d_2, q)$ 关于 q 单调递减，易知 λ_1 关于 q 连续可微且单调递增，而事实上

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}q} = -\frac{a\int_0^1 \theta'\varphi^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \varphi^2\,\mathrm{d}x}$$

其中 $\theta' = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}q}$. 则存在临界值 $q^{**} \in (0, q^*)$，有

$$\begin{cases} \lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q)) < 0 & 0 < q < q^{**} \\ \lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q)) = 0 & q = q^{**} \\ \lambda_1(d_1, 0, r_1 - a\theta(d_2, q)) > 0 & q^{**} < q < q^* \end{cases} \tag{15}$$

因此当 $r_1 < \dfrac{acr_2}{b}$ 且 $0 < q < q^{**}$ 时，特征值问题(11) 的主特征值 $\lambda_1 < 0$，平衡点 $(0, \theta(d_2, q))$ 局部渐进

稳定. 最后，利用与定理 3 相同的方法可以证明此时$(0, \theta(d_2, q))$是全局吸引的.

3 模型的一致持续性

在这一节中，我们使用一致持续性理论来研究模型(2)的一致持续性条件，相关理论的详细介绍可以参见文献[15-16].

定理 5 设$0 < q < q^*$. 当$r_1 > \dfrac{acr_2}{b}$或$0 < r_1 < \dfrac{acr_2}{b}$时，$q^{**} < q < q^*$，模型(2)是一致持续的，即存在一个正常数$\eta$，使得

$$\liminf_{t \to +\infty} v(x, t) \geqslant \eta \qquad \liminf_{t \to +\infty} u(x, t) \geqslant \eta$$

证 定义$\Theta(t)$是模型(2)在空间$P = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C[0, 1] \times C[0, 1]: \tilde{u} > 0, \tilde{v} > 0\}$中解的半流，设$P_0 = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in P: \tilde{u} \not\equiv 0, \tilde{v} \not\equiv 0\}$，$\partial P = P - P_0$. 由强极大值原理知，当$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$时，模型(2)的解$\tilde{u}(x, t) > 0$，$\tilde{v}(x, t) > 0$. 因此$P_0$是$P$中的开集并且是正向不变集. 显然$\partial P$包含$(0, 0)$，$(r_1, 0)$，$(0, \theta(d_2, q))$. 接下来的证明将分为以下部分：

步骤 1 定义$M_\partial = \{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \partial P_0: \Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \partial P_0, \ \forall t \geqslant 0\}$，$w((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))$是正向轨道$\{\Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0): t \geqslant 0\}$的极限集. 那么

$$\bigcup_{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in M_\partial} w((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) = \{(0, 0), (r_1, 0), (0, \theta(d_2, q))\}$$

事实上，对$\forall (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in M_\partial$，有$\Theta(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \partial P_0$，即对任意的$t > 0$，有$\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) \equiv 0$或$\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) \equiv 0$. 当$\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) \equiv 0$时，则$\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))$满足

$$\begin{cases} \tilde{v}_t = d_2 \tilde{v}_{xx} - q\tilde{v}_x + V\left(r_2 - \dfrac{b\tilde{v}}{c}\right) & 0 < x < 1, t > 0 \\ d_2 \tilde{v}_x(0, t) - q\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}_x(1, t) = 0 & t > 0 \\ \tilde{v}(x, 0) = \tilde{v}_0(x) \geqslant, \not\equiv 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

由引理 1 知$\lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{v}(x, t) = \theta(d_2, q)$或$\lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{v}(x, t) = 0$，当$\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) \equiv 0$时，则$\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))$满足

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = d_1 \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}(r_1 - \tilde{u}) & 0 < x < 1, t > 0 \\ \tilde{u}_x(0, t) = \tilde{u}_x(1, t) = 0 & t > 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

易知$\lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{u}(x, t) = r_1$.

步骤 2 证明$(r_1, 0)$和$(0, 0)$是弱排斥子. 首先证明前者，即对$\forall (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$，存在$\delta_1 > 0$，使得

$$\limsup_{t \to +\infty} \| \Theta(t)((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) - (r_1, 0) \| \geqslant \delta_1 \tag{16}$$

使用反证法，假设(16)式不成立. 则对$\forall \delta > 0$，存在$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$，使得$\limsup\limits_{t \to +\infty} \| \Theta(t)((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) - (r_1, 0) \| < \delta$，故存在$t_0 > 0$，使得对$\forall t > t_0$，有$\| \tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) - r_1 \| < \delta$，$\| \tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)) \| < \delta$. 结合模型(2)中$v$的方程，有

$$\begin{cases} \tilde{v}_t \geqslant d_2 \tilde{v}_{xx} - q\tilde{v}_x + \tilde{v}\left(r_2 - \dfrac{\delta}{c - \delta}\right) & 0 < x < 1, t > t_0 \\ d_2 \tilde{v}_x(0, t) - q\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}_x(1, t) = 0 & t > t_0 \end{cases}$$

因为$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in P_0$，由最大值原理，可知$\tilde{v}(x, t_0) > 0$. 因此存在$\alpha_0 > 0$，使得$v(x, t_0) \geqslant \alpha_0 \psi_1^\delta(x)$，其中$\psi_1^\delta(x)$是主特征值$\lambda_1\left(d_2, q, r_2 - \dfrac{\delta}{c - \delta}\right)$对应的主特征函数. 令$\underline{v}(x, t)$是方程

$$\begin{cases}\underline{v}_t = d_2\,\underline{v}_{xx} - q\,\underline{v}_x + \underline{v}\left(r_2 - \dfrac{\delta}{c-\delta}\right) & 0<x<1,\ t>t_0\\ d_2\,\underline{v}_x(0,t) - q\,\underline{v}(0,t) = \underline{v}_x(1,t) = 0 & t>t_0\\ \underline{v}(x,t_0) = \alpha_0\psi_1^{\delta}(x) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的解. 由比较原理，当 $t\geqslant t_0$ 时，

$$\tilde{v}(x,t) > \underline{v}(x,t) = \alpha_0 \mathrm{e}^{\lambda_1\left(d_2,\,q,\,r_2-\frac{\delta}{c-\delta}\right)(t-t_0)}\psi_1^{\delta}(x)$$

由引理 1 知，当 $0<q<q^*$ 时，$\lambda_1(d_2, q, r_2)>0$. 取 $\delta>0$ 足够小，使得 $\lambda_1\left(d_2, q, r_2-\dfrac{\delta}{c-\delta}\right)>0$. 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))=+\infty$，这与假设矛盾. 因此$(r_1, 0)$是一致弱排斥子，$\{(r_1, 0)\}$是 P 中孤立的不变集. 另外，通过类似的推导，可以证得$\{(0, 0)\}$也是 P 中孤立的不变集，这里不再赘述.

步骤 3　证明$(0, \theta(d_2, q))$是弱排斥子，即对 $\forall(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，存在 $\delta_2>0$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))-(0, \theta(d_2, q))\|\geqslant\delta_2$$

使用反证法，假设不成立，则对$\forall\delta>0$，存在$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，使得$\limsup\limits_{t\to+\infty}\|\Theta(t)((\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))-(0, \theta(d_2, q))\|<\delta$，故存在 $t_1>0$，使得对 $\forall t>t_1$，有 $\|\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))\|<\delta$，$\|\tilde{v}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)-\theta(d_2, q))\|<\delta$. 结合模型(2) 中 u 的方程，有

$$\begin{cases}\tilde{u}_t \geqslant d_1\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}[r_1 - a(\theta(d_2,q)+\delta)-\delta] & 0<x<1,\ t>t_1\\ \tilde{u}_x(0,t) = \tilde{u}_x(1,t) = 0 & t>t_1\end{cases}$$

因为$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，由最大值原理可知 $\tilde{u}(x, t_1)>0$. 定义 $\mu_1^{\delta}=\lambda_1(d_1, 0, r_1-a(\theta(d_2, q)+\delta)-\delta)$，$\varphi_1^{\delta}(x)>0$ 是对应的特征函数. 令$\underline{u}(x, t)$是方程

$$\begin{cases}\underline{u}_t = d_1\,\underline{u}_{xx} + \underline{u}[r_1 - a(\theta(d_2,q)+\delta)-\delta] & 0<x<1,\ t>t_1\\ \underline{u}_x(0,t) = \underline{u}_x(1,t) = 0 & t>t_1\\ \underline{u}(x,t_1) = a_1\varphi_1^{\delta}(x) & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的解. 其中 $a_1>0$，并且满足 $\tilde{u}(x, t_1)>a_1\varphi_1^{\delta}(x)$. 易知$\underline{u}(x, t)=a_1\mathrm{e}^{\mu_1^{\delta}(t-t_1)}\varphi_1^{\delta}(x)$是方程的解. 故由比较原理知，对$\forall t\geqslant t_1$，有

$$\tilde{u}(x,t) > \underline{u}(x,t) = a_1\mathrm{e}^{\mu_1^{\delta}(t-t_1)}\varphi_1^{\delta}(x)$$

由(14)，(15) 式可知，当 $r_1>\dfrac{acr_2}{b}$ 或 $0<r_1<\dfrac{acr_2}{b}$，$q^{**}<q<q^*$ 时，有 $\lambda_1(d_1, 0, r_1-a\theta(d_2, q))>0$. 因此 只要取 $\delta>0$ 足够小，总能使得 $\mu_1^{\delta}>0$. 这意味着$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{u}(x, t, (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0))=+\infty$，与假设矛盾. 因此$(0, \theta(d_2, q))$是一致弱排斥子，$\{(0, \theta(d_2, q))\}$ 是 P 中孤立的不变集.

步骤 4　定义连续函数 $\mathscr{D}$：$P\longrightarrow[0, +\infty)$，对 $\forall(\tilde{u}, \tilde{v})\in P$，

$$\mathscr{D}((\tilde{u}, \tilde{v}))=\min\{\min_{x\in[0,1]}\tilde{u}(x),\ \min_{x\in[0,1]}\tilde{v}(x)\}$$

由比较原理知$\mathscr{D}^{-1}(0, +\infty)\subseteq P_0$. 当$\mathscr{D}((\tilde{u}, \tilde{v}))>0$，或$(\tilde{u}, \tilde{v})\in P_0$ 且$\mathscr{D}((\tilde{u}, \tilde{v}))=0$时，有$\mathscr{D}(\Theta(t)(\tilde{u}, \tilde{v}))>0$. 根据文献[16] 知 $\mathscr{D}$ 是半流 $\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 的一个距离函数.

由定理 1 知 $\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 是点耗散的. 再由扩散算子的光滑性，半流 $\Theta(t)$：$P\longrightarrow P$ 是紧的. 根据文献[17] 的定理 2.6，$\Theta(t)$ 存在一个吸引 P 中任意有界集的全局吸引子. 已知$(0, 0)$，$(r_1, 0)$，$(0, \theta(d_2, q))$都是一致弱排斥子且在 P 中孤立，则有

$$W^s((0,0))\cap\mathscr{D}^{-1}(0,+\infty)=\varnothing\qquad W^s((r_1,0))\cap\mathscr{D}^{-1}(0,+\infty)=\varnothing$$
$$W^s(0,\theta(d_2,q))\cap\mathscr{D}^{-1}(0,+\infty)=\varnothing$$

其中$W^s((0, 0))$，$W^s((r_1, 0))$，$W^s((0, \theta(d_2, q)))$分别是$(0, 0)$，$(r_1, 0)$，$(0, \theta(d_2, q))$的稳定集. 因此$\{(0, 0)\cup(r_1, 0)\cup(0, \theta(d_2, q))\}$的子集在 ∂P_0 中不能形成环. 根据文献[16] 的定理 3，总存在 $\eta>0$，使得对 $\forall(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\in P_0$，有

$$\min_{(\tilde{u},\tilde{v})\in W((\tilde{u}_0,\tilde{v}_0))}\mathscr{D}((\tilde{u},\tilde{v}))>\eta$$

因此对 $\forall(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\in P_0$，存在正常数 η 使得 $\liminf\limits_{t\to+\infty}u(x,t)\geqslant\eta$，$\liminf\limits_{t\to+\infty}v(x,t)\geqslant\eta$.

参考文献：

[1] 宋倩倩，李艳玲. 一类带交叉扩散项的捕食-食饵模型全局分歧研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(1)：106-115.

[2] 吕小俊，李睿. 离散型时滞 Lotka-Volterra 食饵-捕食者系统的 8 个正周期解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(7)：114-123.

[3] LESLIE P H. Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics [J]. Biometrika，1948，35(3/4)：213-245.

[4] LESLIE P H. A Stochastic Model for Studying the Properties of Certain Biological Systems by Numerical Methods [J]. Biometrika，1958，45(1/2)：16-31.

[5] JI C Y，JIANG D Q，SHI N Z. Analysis of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-type II Schemes with Stochastic Perturbation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，359(2)：482-498.

[6] YUE Q. Dynamics of a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling-Type II Schemes and a Prey Refuge [J]. Springer Plus，2016，461(5)：1-12.

[7] DU Y H，HSU S B. A Diffusive Predator-Prey Model in Heterogeneous Environment [J]. Journal of Differential Equations，2004，203：331-364.

[8] HSU S B，HUANG T W. Global Stability for a Class of Predator-Prey Systems [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics，1995，55(3)：763-783.

[9] 张柏枫，张国洪. 对流环境下具有混合迁移模式的捕食者-食饵模型分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(5)：1-9.

[10] LAM K Y，LOU Y，LUTSCHER F . Evolution of Dispersal in Closed Advective Environments [J]. Journal of Biological Dynamics，2014，2014(23)：37-41.

[11] TANG D，CHEN Y M. Global Dynamics of a Lotka-Volterra Competition-Diffusion System in Advective Homogeneous Environments [J]. Journal of Differential Equations，2020，269(2)：1465-1483.

[12] LOU Y，NIE H，WANG Y. Coexistence and Bistability of a Competition Model in Open Advective environments [J]. Mathematical Biosciences，2018，306：10-19.

[13] SMOLLER J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations [M]. New-York：Springer-Verlag，1983.

[14] NIE H，WANG B，WU J H. Invasion Analysis on a Predator-Prey System in Open Advective Environments [J]. Journal of Mathematical Biology，2020，81(6)：1429-1463.

[15] LOU Y，LUTSCHER F. Evolution of Dispersal in Open Advective Environments [J]. Journal of Mathematical Biology，2014，69(6)：1319-1342.

[16] SMITH H L，ZHAO X Q. Robust Persistence for Semidynamical Systems [J]. Nonlinear Analysis，Theory，Methods and Applications，2001，47(9)：6169-6179.

[17] MAGAL P，ZHAO X Q. Global Attractors and Steady States for Uniformly Persistent Dynamical Systems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis，2005，37(1)：251-275.

责任编辑 廖坤