DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.002

薄区域上随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度极限行为①

钟文虎，　陈光淦，　张元元

四川师范大学 数学科学学院/可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室，成都 610068

摘要：研究了三维薄区域上由白噪声驱动的随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度极限行为. 通过分析相应的统计解和稳态测度，考虑非线性项的弱收敛，获得了当薄区域厚度 ε 趋近于 0 时，三维薄区域上随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度收敛于二维区域上随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度. 进一步地，当薄区域厚度 ε 和粘性系数 υ 同时趋近于 0 时，三维薄区域上随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度收敛于二维区域上非线性 Schrödinger 方程的稳态测度.

关　键　词：随机 Ginzburg-Landau 方程；薄区域；稳态测度；统计解

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)01－0009－09

Steady-State Metric Limit Behavior of the Stochastic Ginzburg-Landau Equation over a Thin Region

ZHONG Wenhu，　CHEN Guangjian，　ZHANG Yuanyuan

Sichuan Key Laboratory of Visual Computing and Virtual Reality/
School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China

Abstract: This paper studies the steady-state metric limiting behavior of the stochastic Ginzburg-Landau equation driven by white noise over a three-dimensional thin region. By analyzing the corresponding statistical solutions and steady-state measures and considering the weak convergence of the nonlinear terms, the steady-state measures of the stochastic Ginzburg-Landau equation on a thin three-dimensional region converge to that of the stochastic Ginzburg-Landau equation on a two-dimensional region when the thickness of the thin region tends to zero. Further, the steady-state measure of the stochastic Ginzburg-Landau equation in the thin three-dimensional region converges to the steady-state measure of the nonlinear Schrödinger equation in the two-dimensional region when the thickness of the thin region and the viscosity

①　收稿日期：2021－08－24
基金项目：国家自然科学基金项目(11571245).
作者简介：钟文虎，硕士研究生，主要从事随机偏微分方程的研究.

coefficient converge to zero at the same time.

Key words: stochastic Ginzburg-Landau equation; thin region; steady-state measure; statistical solution

Ginzburg-Landau方程是研究不稳定波理论，描述超导现象的重要模型，最初由Ginzburg等[1]在刻画超导相变时导出. 该方程应用广泛，例如模拟色散波在流体力学等物理领域的传播[2]，也应用于光学、等离子体物理、化学反应[3]等.

本文研究三维薄区域 D_ε 上由白噪声驱动的随机 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{cases}\partial_t u-(\mathrm{i}+\upsilon)\Delta u+\mathrm{i}\lambda\,|\,u\,|^2u=\sqrt{\upsilon}\,\dot{\zeta}_\varepsilon\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{1}$$

其中：u 为定义在$[0,+\infty)\times D_\varepsilon$上的复值函数，$D_\varepsilon$ 具有光滑的边界∂D_ε，薄区域厚度 $0<\varepsilon\ll 1$，i为复值单位，$\lambda>0$ 为常数，粘性系数 $\upsilon>0$，$\dot{\zeta}_\varepsilon$ 是一个 Wiener 过程. 赋予方程(1)周期边界条件

$$\begin{cases}u(x_1,x_2,x_3)=u(x_1+2\pi,x_2,x_3)=-u(-x_1,x_2,x_3)\\ u(x_1,x_2,x_3)=u(x_1,x_2+2\pi,x_3)=-u(x_1,-x_2,x_3)\\ u(x_1,x_2,x_3)=u(x_1,x_2,x_3+2\pi)=-u(x_1,x_2,-x_3)\end{cases}\quad \boldsymbol{x}:=(x_1,x_2,x_3)\in\partial D_\varepsilon\tag{2}$$

文献[4]证明了二维有界区域上的随机 Ginzburg-Landau 方程的遍历性和指数混合性. 文献[5]推广了文献[4]的结果，当有界区域的维度小于或等于4时，证明了随机 Ginzburg-Landau 方程的遍历性，并且得到了稳态测度的指数估计. 最近几年，文献[6-8]系统地研究了随机 Ginzburg-Landau 方程的遍历性与指数混合性. 关于稳态测度的极限行为，文献[9]运用区域均值化投射算子，证明了三维随机 Navier-Stokes 方程的稳态测度收敛于二维随机 Navier-Stokes 方程的稳态测度.

本文的目的是将文献[9]的研究工作推广至方程(1). 由于投射算子改变了方程(1)的结构，因此难以保证投射算子作用后的方程(1)仍然具有耗散性质，这导致稳态测度的极限行为不易由能量估计获得. 通过弱收敛估计，得到方程(1)的稳态统计解的收敛结果，然后将收敛性质转化到稳态测度上，最终获得了方程(1)的稳态测度的极限行为：当 ε 趋近于0时，方程(1)的稳态测度收敛于二维区域上随机 Ginzburg-Landau 方程的稳态测度；进一步地，当 ε,υ 同时趋近于0时，方程(1)的稳态测度收敛于二维区域上非线性 Schrödinger 方程的稳态测度.

本文结构如下，第一节描述三维薄区域上的随机 Ginzburg-Landau 方程模型，给出适定性与遍历性. 第二节给出二维区域上随机 Ginzburg-Landau 方程和非线性 Schrödinger 方程的适定性与遍历性. 第三节呈现方程(1)稳态测度的两类极限行为.

1 薄区域上的随机 Ginzburg-Landau 方程

1.1 空间设置

设 $1\leqslant p,m<\infty$，定义 Sobolev 空间 $W^{m,p}(D_\varepsilon;\mathbb{C})$ 和可积函数空间 $L^p(D_\varepsilon;\mathbb{C})$. 记所有满足(2)式的函数 $u(\boldsymbol{x})\in W^{2,2}(D_\varepsilon;\mathbb{C})$ 组成的空间为 W_ε，空间 V_ε 是 W_ε 在 $W^{1,2}(D_\varepsilon;\mathbb{C})$ 中的闭包，空间 H_ε 是 W_ε 在 $L^2(D_\varepsilon;\mathbb{C})$ 中的闭包. 空间 H_ε 的内积为$(u,v)_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\displaystyle\int_{D_\varepsilon}u\bar{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 $u,v\in H_\varepsilon$，$\bar{v}$ 表示 v 的共轭函数. 空间 $L^p(D_\varepsilon;\mathbb{C})$，$H_\varepsilon$，$V_\varepsilon$ 和 W_ε 的范数分别记为 $\|\cdot\|_{L_\varepsilon^p}$，$|\cdot|_\varepsilon$，$\|\cdot\|_\varepsilon$ 和 $\|\cdot\|_{W_\varepsilon}$，定义域为 W_ε 的 Laplace 算子记为 A_ε.

设 X 是一个 Banach 空间，空间 $\mathscr{P}(X)$ 由所有定义在 X 上的 Borel 概率测度组成，$C_b(X)$ 为定义在 X 上的有界连续泛函空间. 记$(P,f)=\displaystyle\int_X f(z)P(\mathrm{d}z)$，其中 $P\in\mathscr{P}(X)$，$f\in C_b(X)$. 设 $\sigma>0$，定义 Sobolev

空间 $W^{\sigma,p}(0,T;X)$，范数记为 $\|\cdot\|_{W^{\sigma,p}(0,T;X)}$. 任给 $\varphi\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，设

$$\mathscr{X}:=L^2(0,T;W^{2-\sigma,2}(D_\varepsilon;\mathbb{C}))\cap C(0,T;W^{-\frac{3}{4}-\sigma,2}(D_\varepsilon;\mathbb{C}))$$

$$\mathscr{Y}:=L^2(0,T;W_\varepsilon)\cap(W^{1,\frac{4}{3}}(0,T;L^{\frac{4}{3}}(D_\varepsilon;\mathbb{C}))+W^{\varphi,4}(0,T;V_\varepsilon))$$

嵌入 $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ 是紧的[10].

定义 1　称一个 Borel 概率测度序列 $\{P_n\}\subset\mathscr{P}(X)$ 弱收敛于一个 Borel 概率测度 $P\in\mathscr{P}(X)$，记为 $P_n\rightharpoonup P$，$n\to\infty$，如果对于任意的 $f\in C_b(X)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n,f)=(P,f)$.

1.2　白噪声与统计解

设 $j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$，Wiener 过程 ζ_ε 有分解形式 $\zeta_\varepsilon(t,\boldsymbol{x})=\sum\limits_j b_j^\varepsilon\beta_j(t)e_{\gamma_j}(\boldsymbol{x})+\hat{b}_j^\varepsilon\hat{\beta}_j(t)e_{\Gamma_j^\varepsilon}(\boldsymbol{x})$，其中 b_j^ε 与 $\hat{b}_j^\varepsilon$ 是一系列实值，满足 $B_0:=\sum\limits_j(b_j^\varepsilon)^2+(\hat{b}_j^\varepsilon)^2<\infty$. 复值 Wiener 过程 $\beta_j(t)$ 与 $\hat{\beta}_j(t)$ 相互独立，算子 A_ε 在空间 H_ε 中生成标准正交基 $\{e_{\gamma_j}(\boldsymbol{x}),e_{\Gamma_j^\varepsilon}(\boldsymbol{x})\}$，相应的特征值为 γ_j 和 Γ_j^ε.

定义 2　称 P_ε^υ 为方程(1) 的统计解，若存在新的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathfrak{P})$ 以及随机过程 $\hat{u}(t,x)\in V_\varepsilon$ 和 $\hat{\zeta}_\varepsilon(t)\in V_\varepsilon$，满足 $\mathscr{D}(\hat{u}(t))=P_\varepsilon^\upsilon\in\mathscr{P}(\mathscr{X})$，且下列条件成立：

(i) $\hat{\zeta}_\varepsilon(t)$ 是一个 Wiener 过程，且与 $\zeta_\varepsilon(t)$ 同分布；

(ii) 随机变量 $\hat{u}(0)$ 与 Wiener 过程 $\hat{\zeta}_\varepsilon(t)$ 相互独立，且 $\mathscr{D}(\hat{u}(0))=\mathscr{D}(u(0))$；

(iii) 对于任意的 $\phi\in W_\varepsilon\cap C^\infty(D_\varepsilon)$ 和 $t\geqslant 0$，随机过程 $\hat{u}(t,x)$ 满足

$$(\hat{u}(t)-\hat{u}(0),\phi)_\varepsilon+\left(\int_0^t(\upsilon+\mathrm{i})A_\varepsilon\hat{u}+\mathrm{i}\lambda\,|\hat{u}|^2\hat{u}\,\mathrm{d}s,\phi\right)_\varepsilon=(\sqrt{\upsilon}\hat{\zeta}_\varepsilon(t),\phi)_\varepsilon,\ \mathfrak{P}-\text{a. s}\tag{3}$$

其中，$\mathscr{D}(\hat{u}(t))$ 表示随机过程 $\hat{u}(t)$ 的分布.

定义 3　设 P_ε^υ 为方程(1) 的统计解，相应的随机过程 $\hat{u}(t)\in V_\varepsilon$ 满足定义 2. 称统计解 P_ε^υ 是稳态的(不变的)，如果对于任意的 $\tau>0$，有 $\mathscr{D}(\hat{u}(t))=\mathscr{D}(\hat{u}(\tau+t))$. 统计解 P_ε^υ 在映射 $\hat{u}(\cdot)\longrightarrow\hat{u}(0)$ 下的像 $\mathscr{D}(\hat{u}(0))$ 被称为 P_ε^υ 的迹测度.

定义 4　一个 Borel 概率测度 $\mu\in\mathscr{P}(V_\varepsilon)$ 被称为方程(1) 的稳态测度，如果它对于方程(1) 在空间 V_ε 中定义的 Markov 过程是平稳的，即任给 $f\in C_b(V_\varepsilon)$，有 $\int_{V_\varepsilon}f(u_0)\mu(\mathrm{d}u_0)=\int_{V_\varepsilon}E(f(u(t;u_0)))\mu(\mathrm{d}u_0)$.

定义 V_ε 上的连续泛函 $h_0(u)=\frac{1}{2}\,|u|_\varepsilon^2$ 和 $h_1(u)=\frac{1}{2}\|u\|_\varepsilon^2+\frac{\lambda}{4}\|u\|_{L_\varepsilon^4}^4$. 记 $B_1:=\sum\limits_{j=1}^\infty\gamma_j(b_j^\varepsilon)^2+\Gamma_j^\varepsilon(\hat{b}_j^\varepsilon)^2$，$B_2:=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in D_\varepsilon}\sum\limits_{j=1}^\infty(b_j^\varepsilon)^2(e_{\gamma_j}(\boldsymbol{x}))^2+(\hat{b}_j^\varepsilon)^2(e_{\Gamma_j^\varepsilon}(\boldsymbol{x}))^2$.

1.3　适定性与遍历性

引理 1[5,10]　设 u_0 是一个 V_ε 值的随机变量，与 $\zeta_\varepsilon(t)$ 相互独立，且满足 $E(h_0(u_0))<\infty$，$E(h_1(u_0))<\infty$，$B_1<\infty$，$B_2<\infty$，则对于任意的 $T>0$，下列结论成立：

(i) 方程(1) 存在解 $u_\varepsilon^\upsilon\in L^2(0,T;W_\varepsilon)\cap C(0,T;V_\varepsilon)$. 解 u_ε^υ 在概率意义下唯一且对于 $t\in[0,T]$ 有

$$E(|u_\varepsilon^\upsilon|_\varepsilon^2)+2\upsilon\int_0^t E(\|u_\varepsilon^\upsilon\|_\varepsilon^2)\mathrm{d}s=E(|u_0|_\varepsilon^2)+\upsilon t\,B_0\tag{4}$$

(ii) 方程(1) 的解 $u_\varepsilon^\upsilon(t,\boldsymbol{x})$ 有分解形式 $u_\varepsilon^\upsilon=u_1-u_2+\sqrt{\upsilon}\zeta_\varepsilon$，其中 $u_1=u_0+\int_0^t(\upsilon+\mathrm{i})\Delta u_\varepsilon^\upsilon\mathrm{d}s$，$u_2=\int_0^t\mathrm{i}\lambda\,|u_\varepsilon^\upsilon|^2u_\varepsilon^\upsilon\mathrm{d}s$，且存在独立于 ε,υ 的常数 C，使得这个分解满足

$$E(\|u_\varepsilon^\upsilon\|_{\mathscr{Y}}):=E(\|u_1\|^2_{W^{1,2}(0,T;H_\varepsilon)})+E(\|u_2\|^{\frac{4}{3}}_{W^{1,\frac{4}{3}}(0,T;L_\varepsilon^{\frac{4}{3}})})+E(\|\sqrt{\upsilon}\zeta_\varepsilon\|^4_{W^{\varphi,4}(0,T;V_\varepsilon)})\leqslant C \quad (5)$$

(iii) 方程(1) 存在稳态测度 $\mu_\varepsilon^\upsilon\in\mathscr{P}(V_\varepsilon)$，当 $t\to\infty$ 时，方程(1) 的解 $u_\varepsilon^\upsilon(t)$ 依分布收敛于 μ_ε^υ；

(iv) 若存在正整数 $n,\bar{n}$，使得对于所有的 $1\leqslant|j_1|\leqslant n$，$1\leqslant|j_2|\leqslant\bar{n}$ 都有 $b^\varepsilon_{j_1}\neq 0$，$\hat{b}^\varepsilon_{j_2}\neq 0$，则方程(1) 的稳态测度唯一存在.

方程(1) 的解 $u_\varepsilon^\upsilon(t)$ 定义了一个 Markov 过程[11]，记 $P_t(u_0,\cdot):=\mathscr{D}(u_\varepsilon^\upsilon(t;u_0))$.

引理 2 若引理 1 中的假设条件都满足，则下列结论成立：

(i) 存在独立于 ε,υ 的常数 C，使得方程(1) 的稳态测度 μ_ε^υ 满足

$$\int_{V_\varepsilon}\|u\|^2_{W_\varepsilon}\mu_\varepsilon^\upsilon(\mathrm{d}u)\leqslant C \quad (6)$$

(ii) 方程(1) 存在唯一的稳态统计解 $P_\varepsilon^\upsilon\in\mathscr{P}(\mathscr{X})$，且存在独立于 ε,υ 的常数 C，满足

$$\int_{\mathscr{X}}\|u\|_{\mathscr{Y}}P_\varepsilon^\upsilon(\mathrm{d}u)\leqslant C \quad (7)$$

证 设 u 为方程(1) 的解，对 $h_1(u)$ 使用 Itô 公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}h_1(u)=&(\nabla u,\nabla\mathrm{d}u)_\varepsilon+\lambda(|u|^2u,\mathrm{d}u)_\varepsilon+\frac{1}{2}(\nabla\mathrm{d}u,\nabla\mathrm{d}u)_\varepsilon+\frac{3}{2}\lambda(|u|^2\mathrm{d}u,\mathrm{d}u)_\varepsilon\leqslant\\&-\upsilon\|u\|^2_{W_\varepsilon}\mathrm{d}t-3\lambda\upsilon(|u|^2,|\nabla u|^2)_\varepsilon\mathrm{d}t+\upsilon B_1\mathrm{d}t+\\&3\lambda\upsilon|u|^2_\varepsilon B_2\mathrm{d}t-(\Delta u,\sqrt{\upsilon}\mathrm{d}\zeta_\varepsilon)_\varepsilon-\lambda(|u|^2u,\sqrt{\upsilon}\mathrm{d}\zeta_\varepsilon)_\varepsilon\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&E(h_1(u))+\upsilon\int_0^t E(\|u\|^2_{W_\varepsilon})\mathrm{d}s+3\lambda\upsilon\int_0^t E(|u|^2,|\nabla u|^2)_\varepsilon\mathrm{d}s\leqslant\\&E(h_1(u_0))+\upsilon B_1t+3\upsilon\lambda B_2\int_0^t E(|u|^2_\varepsilon)\mathrm{d}s\end{aligned} \quad (8)$$

取 $\|u\|^2_{W_\varepsilon}\leqslant R<\infty$，运用 $P_t(u_0,\cdot)$ 和 Fatou 引理，结合(4) 式和(8) 式得

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon}\|u\|^2_{W_\varepsilon}\mu_\varepsilon^\upsilon(\mathrm{d}u)\leqslant&\int_{V_\varepsilon}(\|u\|^2_{W_\varepsilon}\wedge R)\mu_\varepsilon^\upsilon(\mathrm{d}u)\leqslant\\&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{V_\varepsilon}(\|u\|^2_{W_\varepsilon}\wedge R)\mathscr{D}(u(t))(\mathrm{d}u)\leqslant C\end{aligned}$$

其中 $C=B_1+3B_0B_2$，独立于 ε 和 υ.

根据文献[12]，方程(1) 的稳态解存在，不妨设为 $u(t)$，于是 $P_\varepsilon^\upsilon=\mathscr{D}(u(t))$ 就是方程(1) 的稳态统计解. 若 P' 是方程(1) 的另一个稳态统计解，则 $P'=\mathscr{D}(\bar{u}(t,\boldsymbol{x}))$，其中 $\bar{u}(t,\boldsymbol{x})$ 是形式上满足(3) 式的方程(1) 的解. 由定义 2 的条件(ii) 知 $\mathscr{D}(u(0))=\mathscr{D}(\bar{u}(0))$，于是 P' 与 P_ε^υ 具有相同的初始测度，因此 $P'=P_\varepsilon^\upsilon$. 最后由(5) 式和 $P_t(u_0,\cdot)$ 得 $\int_{\mathscr{X}}\|u\|_{\mathscr{Y}}P_\varepsilon^\upsilon(\mathrm{d}u)\leqslant C$，通过引理 1 知 C 独立于 ε 和 υ.

2 极限系统

2.1 二维区域上的随机 Ginzburg-Landau 方程

类似于第一节设置 D_ε 上的空间 $L^p(D_\varepsilon;\mathbb{C})$，$H_\varepsilon$，$V_\varepsilon$，$W_\varepsilon$，$\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$，设置二维区域上相应的空间 $L^p(D;\mathbb{C})$，$\widetilde{H}$，$\widetilde{V}$，$\widetilde{W}$，$\widetilde{\mathscr{X}}$ 和 $\widetilde{\mathscr{Y}}$，其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为二维有界区域，具有光滑的边界 ∂D. 空间 $L^p(D;\mathbb{C})$，$\widetilde{H}$，$\widetilde{V}$，$\widetilde{W}$ 和 $\widetilde{\mathscr{Y}}$ 的范数分别记为 $\|\cdot\|_{L^p}$，$|\cdot|_D$，$\|\cdot\|_D$，$\|\cdot\|_{\widetilde{W}}$ 和 $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$. 另外，空间 $\widetilde{H}$ 的内积记为 $(\cdot,\cdot)$，定义域为 $\widetilde{W}$ 的 Laplace 算子记为 A. 嵌入 $\widetilde{\mathscr{Y}}\subset\widetilde{\mathscr{X}}$ 是紧的[10].

二维区域上的随机 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{cases}\partial_t v-(\mathrm{i}+\upsilon)\Delta v+\mathrm{i}\lambda\,|\,v\,|^2 v=\sqrt{\upsilon}\,\dot{\zeta}\\ v(0)=v_0\end{cases}\tag{9}$$

其中：v 为定义在$[0,+\infty)\times D$ 上的复值函数，$\zeta(t)$ 是一个 $\widetilde{H}$ 值的 Wiener 过程. 对于 $j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$，过程 ζ 有分解形式 $\zeta(t,\boldsymbol{x}')=\sum_j b_j\beta_j(t)\widetilde{e}_{\gamma_j}(\boldsymbol{x}')$，$\boldsymbol{x}':=(x_1,x_2)\in D$，常数 b_j 满足 $\widetilde{B}_0=\sum_j(b_j)^2<\infty$，并且 $\widetilde{e}_{\gamma_j}$ 是算子 A 在 $\widetilde{H}$ 中生成的特征函数，相应的特征值为 γ_j. 设 $\widetilde{B}_1=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j(b_j^{\varepsilon})^2$，$\widetilde{B}_2=\sup_{x'\in D}\sum_{j=1}^{\infty}(b_j^{\varepsilon})^2(\widetilde{e}_{\gamma_j}(\boldsymbol{x}'))^2$. 定义 $\widetilde{V}$ 上的连续泛函 $\widetilde{h}_0(v)=\dfrac{1}{2}\,|\,v\,|_D^2$ 和 $\widetilde{h}_1(v)=\dfrac{1}{2}\,\|\,v\,\|_D^2+\dfrac{\lambda}{4}\,\|\,v\,\|_{L^4}^4$. 另外，类似于方程(1)，赋予方程(9)、方程(14) 和方程(15) 周期边界条件，并定义相应的稳态测度和稳态统计解，后文中不再重复叙述.

引理 3[5,10]　设 v_0 是一个 $\widetilde{V}$ 值的随机变量，与 $\zeta(t)$ 相互独立，满足 $E(\widetilde{h}_0(v_0))<\infty$，$E(\widetilde{h}_1(v_0))<\infty$，$\widetilde{B}_1<\infty$，$\widetilde{B}_2<\infty$，则对于任意的 $T>0$，下列结论成立：

(i) 方程(9) 存在解 $v^{\upsilon}\in L^2(0,T;\widetilde{W})\cap C(0,T;\widetilde{V})$. 解 v^{υ} 在概率意义下唯一，且对于 $t\in[0,T]$ 有

$$E(\,|\,v^{\upsilon}\,|_D^2)+2\upsilon\int_0^t E(\,\|\,v^{\upsilon}\,\|_D^2)\mathrm{d}s=E(\,|\,v_0\,|_D^2)+\upsilon t\widetilde{B}_0\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&E(\widetilde{h}_1(v^{\upsilon}))+\upsilon\int_0^t E(\,\|\,v^{\upsilon}\,\|_{\widetilde{W}}^2)\mathrm{d}s+3\lambda\upsilon\int_0^t E(\,|\,v^{\upsilon}\,|^2,\,|\,\nabla v^{\upsilon}\,|^2)\mathrm{d}s\leqslant\\&E(\widetilde{h}_1(v_0))+\upsilon\widetilde{B}_1 t+3\upsilon\lambda\widetilde{B}_2\int_0^t E(\,|\,v^{\upsilon}\,|_D^2)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{11}$$

(ii) 方程(9) 存在稳态测度 $\mu^{\upsilon}\in\mathscr{P}(\widetilde{V})$，且存在独立于 υ 的常数 C，满足

$$\int_{\widetilde{V}}\|\,v\,\|_{\widetilde{W}}^2\mu^{\upsilon}(\mathrm{d}v)\leqslant C\tag{12}$$

(iii) 若存在正整数 n，使得对于所有的 $1\leqslant|\,j\,|\leqslant n$ 都有 $b_j\neq 0$，则方程(9) 的稳态测度唯一存在；

(iv) 若(iii) 中的假设条件成立，则方程(9) 存在唯一的稳态统计解 $P^{\upsilon}\in\mathscr{P}(\widetilde{\mathscr{X}})$，且存在独立于 υ 的常数 C，满足

$$\int_{\widetilde{X}}\|\,v\,\|_{\widetilde{\mathscr{Y}}}P^{\upsilon}(\mathrm{d}v)\leqslant C\tag{13}$$

2.2　非线性 Schrödinger 方程

给出二维有界区域 D 上的非线性 Schrödinger 方程

$$\partial_t v-\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{i}\lambda\,|\,v\,|^2 v=0\tag{14}$$

和三维薄区域 D_ε 上的非线性 Schrödinger 方程

$$\partial_t u-\mathrm{i}\Delta u+\mathrm{i}\lambda\,|\,u\,|^2 u=0\tag{15}$$

由于 $\lambda>0$，方程(14) 和方程(15) 的解唯一存在[13].

引理 4[13]　若初值 $v_0\in\widetilde{V}$，满足 $\widetilde{h}_0(v_0)<\infty$，$\widetilde{h}_1(v_0)<\infty$，则方程(14) 存在稳态测度 μ 和稳态解 $v(t,\boldsymbol{x}')$，且 $\mu=\mathscr{D}(v(0))$.

引理 5[13]　若初值 $u_0\in V_\varepsilon$，满足 $h_0(u_0)<\infty$，$h_1(u_0)<\infty$，则方程(15) 存在稳态测度 μ_ε 和稳态解 $u_\varepsilon(t,\boldsymbol{x})$，且 $\mu_\varepsilon=\mathscr{D}(u_\varepsilon(0))$.

定义映射 $K_\varepsilon:H_\varepsilon\longrightarrow\widetilde{H}$，$(K_\varepsilon u)(\boldsymbol{x}')=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{\varepsilon}u(\boldsymbol{x}',x_3)\mathrm{d}x_3$ 和映射 $K_\varepsilon^*:\widetilde{H}\longrightarrow H_\varepsilon$，$(K_\varepsilon^* v)(\boldsymbol{x})=v(\boldsymbol{x}',0)$. 对于测度 $\mu\in\mathscr{P}(V_\varepsilon)$，记 $K_\varepsilon\mu$ 表示 μ 在 K_ε 作用下的像，满足 $(K_\varepsilon\mu,f)=(\mu,K_\varepsilon^* f)$，其中 $f\in C_b(\widetilde{V})$. 定义算子 $\hat{K}_\varepsilon:H_\varepsilon\longrightarrow H_\varepsilon$，$(\hat{K}_\varepsilon u)(\boldsymbol{x})=K_\varepsilon^* K_\varepsilon u=v(\boldsymbol{x}',0)$，其中 $v(\boldsymbol{x}')=(K_\varepsilon u)(\boldsymbol{x}')$. 算子 $\hat{K}_\varepsilon$ 定义了空间 H_ε 上的一个正交投影，与算子 A_ε 在空间 H_ε 中生成的正交投影相同[9]. 记 id 为恒等映射，于

是 $H_\varepsilon=\hat{K}_\varepsilon H_\varepsilon \oplus \hat{I}_\varepsilon H_\varepsilon$，其中 $\hat{K}_\varepsilon+\hat{I}_\varepsilon=id$. 另外，算子 $\hat{K}_\varepsilon$ 和 $\hat{I}_\varepsilon$ 满足下列性质[9]：

(i) $\hat{K}_\varepsilon \partial_{x_i}=\partial_{x_i}\hat{K}_\varepsilon$，$\hat{I}_\varepsilon \partial_{x_i}=\partial_{x_i}\hat{I}_\varepsilon$，$i=1,2$；

(ii) $(K_\varepsilon u,v)=(u,K_\varepsilon^* v)_\varepsilon$，$\forall u\in H_\varepsilon$，$\forall v\in \widetilde{H}$；

(iii) $|\hat{I}_\varepsilon u|_\varepsilon \leqslant \varepsilon\,|\partial_3 \hat{I}_\varepsilon u|_\varepsilon$，$\forall u\in V_\varepsilon$.

3 稳态测度的极限行为

3.1 区域投射极限

定理 1 若引理 1 与引理 3 中的假设条件都成立，且极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j (b_j^\varepsilon-b_j)^2=0 \tag{16}$$

成立. 设 μ_ε^ν 是方程(1)的稳态测度，P_ε^ν 是方程(1)的稳态统计解，则下列结论成立：

(i) 定义在 $\widetilde{V}$ 上的 Borel 概率测度序列 $\{K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\nu\}$ 有弱收敛 $K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\nu \rightharpoonup \mu^\nu$，$\varepsilon\to 0$，其中 μ^ν 是方程(9)的唯一稳态测度；

(ii) 定义在 $\widetilde{\mathscr{X}}$ 上的 Borel 概率测度序列 $\{K_\varepsilon P_\varepsilon^\nu\}$ 有弱收敛 $K_\varepsilon P_\varepsilon^\nu \rightharpoonup P^\nu$，$\varepsilon\to 0$，其中 P^ν 是方程(9)的唯一稳态统计解.

证 由于(6)式和(7)式对于 ε 一致成立，运用 Prokhorov 定理[11]得，分别定义在空间 $\widetilde{V}$ 和 $\widetilde{\mathscr{X}}$ 上的概率测度集族 $\{K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\nu\}_\varepsilon$ 和 $\{K_\varepsilon P_\varepsilon^\nu\}_\varepsilon$ 存在弱收敛的子序列，不妨设

$$K_{\varepsilon_j}\mu_{\varepsilon_j}^\nu \rightharpoonup \mu^\nu,\ j\to\infty \tag{17}$$

$$K_{\varepsilon_j}P_{\varepsilon_j}^\nu \rightharpoonup P^\nu,\ j\to\infty \tag{18}$$

下面分别证明 P^ν 是方程(9)的稳态统计解，μ^ν 是方程(9)的稳态测度.

运用 Skorokhod 定理构建一个新的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathfrak{P})$，以及随机过程 $K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)$ 和 $\hat{v}^\nu(t)$，满足 $K_{\varepsilon_j}P_{\varepsilon_j}^\nu=\mathscr{D}(K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t))$ 和 $P^\nu=\mathscr{D}(\hat{v}^\nu(t))$，且

$$K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)\to \hat{v}^\nu(t),\ j\to\infty,\ \mathfrak{P}\text{-a. s.} \tag{19}$$

由于 $P_{\varepsilon_j}^\nu$ 是方程(1)的稳态统计解，因此 $\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)$ 是方程(1)的稳态解. 记 $v:=K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)$，于是

$$\begin{aligned}&(v(t)-v(0),\phi)+\int_0^t((\nu+\mathrm{i})Av+\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)|^2\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)),\phi)\mathrm{d}s=\\&(K_{\varepsilon_j}\zeta_{\varepsilon_j}(t),\phi),\ \forall t\geqslant 0,\ \forall\phi\in\widetilde{W}\cap C^\infty(D),\ \mathfrak{P}\text{-a. s.}\end{aligned}$$

取 $e:=\phi=\tilde{e}_{\gamma_j}$，并记

$$\Xi_e^{\varepsilon_j}:=(v(t)-v(0),e)+\int_0^t((\nu+\mathrm{i})Av+\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)|^2\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu(t)),e)\mathrm{d}s$$

考虑 $\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu|^2\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu)$ 和 $\mathrm{i}\lambda(|K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu|^2K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu)$ 之间的逼近. 记 $u:=\hat{u}_{\varepsilon_j}^\nu$，于是

$$\begin{aligned}S_1:=&|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2u),e)-(\mathrm{i}\lambda(|v|^2v),e)|=\\&|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2K_{\varepsilon_j}^*K_{\varepsilon_j}u),e)+(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2\hat{I}_{\varepsilon_j}u),e)-(\mathrm{i}\lambda(|v|^2v),e)|\leqslant\\&|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2K_{\varepsilon_j}^*v),e)-(\mathrm{i}\lambda(|v|^2v),e)|+|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2\hat{I}_{\varepsilon_j}u),e)|:=\\&J_1+J_2\end{aligned} \tag{20}$$

运用 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$J_1=|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2K_{\varepsilon_j}^*v),e)-(\mathrm{i}\lambda(|v|^2v),e)|=$$

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{i}\lambda(|\hat{K}_{\varepsilon_j}u+\hat{I}_{\varepsilon_j}u|^2-|v|^2)K^*_{\varepsilon_j}v,K^*_{\varepsilon_j}e)_\varepsilon|\leqslant\\
&|(\mathrm{i}\lambda|\hat{I}_{\varepsilon_j}u|^2K^*_{\varepsilon_j}v,K^*_{\varepsilon_j}e)_\varepsilon|+|(2\mathrm{i}\lambda(\hat{I}_{\varepsilon_j}u)\cdot|K^*_{\varepsilon_j}v|^2,K^*_{\varepsilon_j}e)_\varepsilon|\leqslant\\
&\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}(\|\hat{I}_{\varepsilon_j}u\|^2_{L^4_\varepsilon}|v|_D+\|v\|^2_{L^4}|\hat{I}_{\varepsilon_j}u|_\varepsilon)\leqslant\\
&\varepsilon_j\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}(\|u\|^2_{W_\varepsilon}+\|v\|^2_{\widetilde{W}}+\|u\|^4_\varepsilon+\|v\|^4_D+\|u\|^2_\varepsilon+\|v\|^2_D)
\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
J_2=&|(\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2\hat{I}_{\varepsilon_j}u),e)|\leqslant\\
&\varepsilon_j\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}|u|^2_{L^4_\varepsilon}|\hat{I}_{\varepsilon_j}u|_\varepsilon\leqslant\\
&\varepsilon_j\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}(\|u\|^2_{W_\varepsilon}+\|u\|^4_\varepsilon+\|v\|^2_D)
\end{aligned}\tag{22}$$

记 $\psi(t):=(\|u\|^2_{W_\varepsilon}+\|v\|^2_{\widetilde{W}}+\|u\|^4_\varepsilon+\|v\|^4_D+\|u\|^2_\varepsilon+\|v\|^2_D)$，结合(20)－(22)式得

$$S_1\leqslant\varepsilon_j\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}\psi(t)\tag{23}$$

(23)式表明当 $\varepsilon_j\to0$ 时，$\mathrm{i}\lambda K_{\varepsilon_j}(|u|^2u)$ 弱收敛于 $\mathrm{i}\lambda(|v|^2v)$. 由(23)式和 Chebyshev 不等式[14]得，对于任意的 $\delta>0$ 有

$$\mathfrak{P}\left\{\int_0^t S_1\mathrm{d}s>\delta\right\}\leqslant\varepsilon_jC_{e,\lambda,\delta}\int_0^t E(\psi(s))\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon_j\hat{C}_{e,\lambda,\delta}\tag{24}$$

其中常数 $\hat{C}_{e,\lambda,\delta}$ 不依赖 ε_j. (19)式和(24)式表明

$$\Xi^{\varepsilon_j}_e\to\Xi_e,\ \varepsilon_j\to0,\ \mathfrak{P}\text{-a.s}\tag{25}$$

其中

$$\Xi_e:=\left(v(t)-v_0-\int_0^t(\mathrm{i}+\upsilon)\Delta v(s)-\mathrm{i}\lambda|v(s)|^2v(s)\mathrm{d}s,e\right)$$

由 $\Xi^{\varepsilon_j}_e=(\zeta_{\varepsilon_j},K^*_{\varepsilon_j}e)_\varepsilon$ 知，对于任意的 $e_1\neq e_2\in\{\tilde{e}_{\gamma_j}\}$，有 $\Xi^{\varepsilon_j}_{e_1}$ 和 $\Xi^{\varepsilon_j}_{e_2}$ 相互独立，因此 Ξ_{e_1} 和 Ξ_{e_2} 也是相互独立的，于是(25)式表明存在一个与 ζ 同分布的 Wiener 过程，替换到方程(9)中满足 v 是方程(9)的解. 通过定义2知 P^υ 是方程(9)的统计解，唯一性由引理3给出. 最后，(18)式蕴含了 P^υ 的稳态性.

由引理1知，定义在 $\widetilde{V}_\varepsilon$ 上的有界泛函 $f(v)=\|v\|^2_{\widetilde{W}_\varepsilon}$ 满足 $\frac{1}{t}\int_0^t(\mathscr{D}(\hat{u}^\upsilon_{\varepsilon_j}(s)),K^*_{\varepsilon_j}f(v))\mathrm{d}s\leqslant C$，其中常数 C 不依赖 ε_j，从而有

$$\frac{1}{t}\int_0^t(\mathscr{D}(\hat{v}^\upsilon(s)),f(v))\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon j\to0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(K_{\varepsilon_j}\mathscr{D}(\hat{u}^\upsilon_{\varepsilon_j}(s)),f(v))\mathrm{d}s\right)\leqslant C\tag{26}$$

记 $\bar{\mu}^\upsilon_t:=\frac{1}{t}\int_0^t(\mathscr{D}(\hat{v}^\upsilon),\cdot)\mathrm{d}s$，运用 Prokhorov 定理，结合(26)式得序列 $\{\bar{\mu}^\upsilon_t\}$ 存在弱收敛的子序列，不妨设 $\bar{\mu}^\upsilon_t\rightharpoonup\bar{\mu}^\upsilon$，$t\to\infty$. 通过文献[15]得 $\bar{\mu}^\upsilon$ 就是方程(9)的稳态测度. 运用 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}(K_{\varepsilon_j}\mu^\upsilon_{\varepsilon_j},g(v))=&\lim_{j\to\infty}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(K_{\varepsilon_j}\mathscr{D}(\hat{u}^\upsilon_{\varepsilon_j}(s)),g(v))\ \mathrm{d}s\right)=\\
&\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(\mathscr{D}(\hat{v}^\upsilon(s)),g(v))\mathrm{d}s\right)=\\
&(\bar{\mu}^\upsilon,g(v)),\ \forall g\in C_b(\widetilde{V}_\varepsilon)
\end{aligned}\tag{27}$$

(27)式表明 $K_{\varepsilon_j}\mu^\upsilon_{\varepsilon_j}$ 弱收敛于方程(9)的稳态测度 $\bar{\mu}^\upsilon$. 通过引理3知，$\hat{v}^\upsilon(t)$ 是方程(9)的稳态解，从而有 $\bar{\mu}^\upsilon=\mathscr{D}(\hat{v}^\upsilon(0))$，于是 $\bar{\mu}^\upsilon$ 是 P^υ 的迹测度. 又由(17)式和(18)式知，μ^υ 也是 P^υ 的迹测度，所以

$$\bar{\mu}^\upsilon=\mu^\upsilon$$

唯一性由引理3给出.

3.2 粘性消失极限

定理2 若引理1与引理3中的假设条件都成立,(16)式成立,且 $\tilde{h}_0(v_0)<\infty$, $\tilde{h}_1(v_0)<\infty$, $h_0(u_0)<\infty$ 和 $h_1(u_0)<\infty$. 设 μ_ε^υ 是方程(1)的稳态测度, P_ε^υ 是方程(1)的稳态统计解,则

(i) 定义在 $\tilde{V}$ 上的Borel概率测度序列 $\{K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\upsilon\}$ 有弱收敛 $K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\upsilon\rightharpoonup\mu^\upsilon$, $\varepsilon\to 0$, 其中 μ^υ 是方程(9)的唯一稳态测度. 进一步地, $\mu^\upsilon\rightharpoonup\mu$, $\upsilon\to 0$, 其中 μ 是方程(14)的稳态测度.

(ii) 定义在 $\tilde{\mathscr{X}}$ 上的Borel概率测度序列 $\{K_\varepsilon P_\varepsilon^\upsilon\}$ 有弱收敛 $K_\varepsilon P_\varepsilon^\upsilon\rightharpoonup P^\upsilon$, $\varepsilon\to 0$, 其中 P^υ 是方程(9)的唯一稳态统计解. 进一步地, $P^\upsilon\rightharpoonup P:=\mathscr{D}(\bar{v}(t))$, $\upsilon\to 0$, 其中 $\bar{v}(t)$ 是方程(14)的稳态解.

(iii) 结论(i)和结论(ii)中的收敛顺序与 ε,υ 无关,即当 $\varepsilon,\upsilon\to 0$ 时,有 $\mu_\varepsilon^\upsilon\rightharpoonup\mu$, $P_\varepsilon^\upsilon\rightharpoonup P$.

证 运用Prokhorov定理,结合(6)式和(7)式得序列 $\{K_\varepsilon\mu_\varepsilon^\upsilon\}_{0<\varepsilon,\upsilon\leqslant 1}$ 和 $\{K_\varepsilon P_\varepsilon^\upsilon\}_{0<\varepsilon,\upsilon\leqslant 1}$ 分别存在弱收敛的子序列,不妨设

$$K_{\varepsilon_j}\mu_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}\rightharpoonup\mu,\ j\to\infty \tag{28}$$

$$K_{\varepsilon_j}P_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}\rightharpoonup P,\ j\to\infty \tag{29}$$

由Skorokhod定理知,存在随机过程 $K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^{\upsilon}(t)$ 和 $\hat{v}(t)$, 满足 $K_{\varepsilon_j}P_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}=\mathscr{D}(K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j})$ 和 $P=\mathscr{D}(\hat{v})$, 且

$$K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}\to\hat{v},\ j\to\infty,\ \mathfrak{P}\text{-a.s} \tag{30}$$

记 $v:=K_{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}$, $u:=\hat{u}_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}$, 对于任意的 $e\in\{\tilde{e}_{\gamma_j}\}$, 考虑下面两个逼近:

$$S_2:=|((\mathrm{i}+\upsilon_j)K_{\varepsilon_j}A_\varepsilon u-\mathrm{i}Av,\ e)|=|(\upsilon_j\nabla v,\ \nabla e)|\leqslant\upsilon_j C_e\|v\|_D \tag{31}$$

$$S_3:=|(\sqrt{\upsilon_j}K_{\varepsilon_j}\dot{\zeta}_{\varepsilon_j},\ e)| \tag{32}$$

结合(23),(31)和(32)式得

$$S_1+S_2+S_3\leqslant\varepsilon_j\lambda C\cdot\sup_{x'\in D}\{|e(\boldsymbol{x}')|\}\psi(t)+\upsilon_j C_e\|v\|_D+|(\sqrt{\upsilon_j}K_{\varepsilon_j}\dot{\zeta}_{\varepsilon_j},\ e)| \tag{33}$$

运用Chebyshev不等式,结合(4),(8),(10),(11)和(33)式得,对于任意的 $\delta>0$ 有

$$\mathfrak{P}\left\{\int_0^t S_1+S_2+S_3\mathrm{d}s>\delta\right\}\leqslant(\varepsilon_j+\upsilon_j)\bar{C}_{e,\delta,\lambda} \tag{34}$$

其中 $\bar{C}_{e,\delta,\lambda}$ 与 ε_j,υ_j 无关. 于是(30)式和(34)式表明

$$\Xi_e^{\varepsilon_j}\to\xi_e,\ \varepsilon_j,\ \upsilon_j\to 0,\ \mathfrak{P}\text{-a.s} \tag{35}$$

其中

$$\xi_e:=(v(t)-v_0-\int_0^t\mathrm{i}\Delta v(s)-\mathrm{i}\lambda\ |v(s)|^2 v(s)\mathrm{d}s,\ e)$$

接下来,使用定理1中的方法,由(35)式推出结论(i)和结论(ii)成立.

通过(34)式知,在取极限的过程中, ε_j 和 υ_j 相互独立. 于是,使用定理1中的方法,并在形式上重复定理1的证明过程,结合(6),(7),(12)和(13)式得到下列收敛结果:

$$\mu_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}\rightharpoonup\mu_{\varepsilon_j},\ \upsilon_j\to 0;\ K_{\varepsilon_j}\mu_{\varepsilon_j}\rightharpoonup\mu,\ \varepsilon_j\to 0$$

$$P_{\varepsilon_j}^{\upsilon_j}\rightharpoonup P_{\varepsilon_j}:=\mathscr{D}(u_{\varepsilon_j}(t)),\ \upsilon_j\to 0;\ K_{\varepsilon_j}P_{\varepsilon_j}\rightharpoonup P,\ \varepsilon_j\to 0$$

其中, μ_{ε_j} 和 $u_{\varepsilon_j}(t)$ 分别是方程(15)的稳态测度和稳态解,故结论(iii)成立.

参考文献:

[1] GINZBURG V L, LANDAU L D. On the Theory of Superconductivity [M]//On Superconductivity and Superfluidity. Berlin Heidelberg: Springer, 2009: 113-137.

[2] NEWELL A，WHITEHEAD J. Finite Bandwidth，Finite Amplitude Convection [J]. Journal of Fluid Mechanics，1969，38：279-303.

[3] HUBER G，ALSTRØM P. Universal Decay of Vortex Density in Two Dimensions [J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，1993，195(3-4)：448-456.

[4] ODASSO C. Ergodicity for the Stochastic Complex Ginzburg-Landau Equations [J]. Annales De l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics，2006，42(4)：417-454.

[5] NERSESYAN V. Polynomial Mixing for the Complex Ginzburg-Landau Equation Perturbed by a Random Force at Random Times [J]. Journal of Evolution Equations，2008，8(1)：1-29.

[6] PENG X H，HUANG J H，ZHANG R R. Ergodicity and Exponential Mixing of the Real Ginzburg-Landau Equation with a Degenerate Noise [J]. Journal of Differential Equations，2020，269(4)：3686-3720.

[7] SHEN T L，HUANG J H. Ergodicity of the Stochastic Coupled Fractional Ginzburg-Landau Equations Driven by Stable Noise [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B，2017，22(2)：605-625.

[8] ZHENG Y，HUANG J H. Exponential Convergence for the 3D Stochastic Cubic Ginzburg-Landau Equation with Degenerate Noise [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B，2019，24(10)：5621-5632.

[9] CHUESHOV I，KUKSIN S. Stochastic 3D Navier-Stokes Equations in a Thin Domain and Its α -Approximation [J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2008，237(10-12)：1352-1367.

[10] KUKSIN S，SHIRIKYAN A. Randomly Forced CGL Equation：Stationary Measures and the Inviscid Limit [J]. Journal of Physics A：Mathematical and General，2004，37(12)：3805-3822.

[11] KUKSIN S，SHIRIKYAN A. Mathematics of Two-Dimensional Turbulence [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2012.

[12] BARTON-SMITH M. Invariant Measure for the Stochastic Ginzburg Landau Equation [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA，2004，11(1)：29-52.

[13] BOURGAIN J. Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations [M]. Rhode Island：American Mathematical Society，1999.

[14] EVANS L C. An Introduction to Stochastic Differential Equations [M]. Rhode Island：American Mathematical Society，2012.

[15] DA PRATO G，ZABCZYK J. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1996.

责任编辑　张枸