第 48 卷 第 1 期 西南师范大学学报（自然科学版） 2023 年 1 月
Vol. 48 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.003

一类广义 Kirchhoff 方程基态变号解的存在性[①]

黄婷， 晏颖， 商彦英

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了一类广义 Kirchhoff 方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\triangle u+V(x)u=g(u)$$

其中 $a,b>0$ 是常数. 由于在方程中出现了非局部项 $b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\triangle u$，所以，方程的变分泛函与 $b=0$ 时方程的变分泛函具有不同的性质. 与相关文献相比，g 不需要满足单调性条件，并且非线性项 g 包含 $g(t)=|t|^{p-2}t(2<p\leqslant 4)$ 这种情况，V 也不需要满足强制性条件. 首先引入辅助算子，构造伪梯度向量场，证明了下降流不变集的存在性. 其次，由于 4-超线性 AR 条件不成立，所以引入了一种非局部扰动方法，即增加了一个高阶项 $\beta|u|^{r-2}u$ 和另一个非局部扰动. 对于扰动问题，通过改进的 AR 条件和下降流不变集下的极大极小参数得到了扰动问题的变号解，进而得到了原方程的变号解. 最后，证明了该变号解是原方程的基态变号解.

关 键 词：Kirchhoff 方程；变号解；非局部扰动方法；下降流不变集

中图分类号：O176.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2023)01-0018-08

Existence of Ground State Sign-changing Solutions for a Class of Generalized Kirchhoff Equations

HUANG Ting， YAN Ying， SHANG Yanying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Study a class of generalized Kirchhoff equations

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\triangle u+V(x)u=g(u)$$

where $a,b>0$ are constants. Since there are nonlocal terms $b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\triangle u$ in the equation, the variational generalization of the equation has different properties from the case $b=0$. In contrast to the related literature, g does not need to satisfy the monotonicity condition and the nonlinear term g contains $g(t)=|t|^{p-2}t(2<p\leqslant 4)$ this case, V also does not need to satisfy the mandatory condition. Firstly, an

① 收稿日期：2022-05-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：黄婷，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：商彦英，副教授.

auxiliary operator is introduced to construct a pseudo-gradient vector field to prove the existence of a descending flow invariant set. Second，since the 4-hyperlinear AR condition does not hold，it is necessary to introduce a nonlocal perturbation method by adding a higher-order term $\beta|u|^{r-2}u$ and another nonlocal perturbation. For the perturbed problem，the variational solution of the perturbed problem is obtained by the improved AR condition and the extremely minimal parameter under the descending flow invariant set，which in turn leads to the variational solution of the original problem. Finally，it is proved that the variational solution is the base-state variational solution of the original problem.

Key words：Kirchhoff equation；variational solution；nonlocal perturbation method；descending flow invariant set

本文研究 Kirchhoff 方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\triangle u+V(x)u=g(u)\qquad x\in\mathbb{R}^3,\ u\in H^1(\mathbb{R}^3)\tag{1}$$

其中 $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，$g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$a$ 和 b 是正常数.

由于非局部项$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 的存在，Kirchhoff 问题被视为非局部问题. 关于这类方程的正解、多解和基态解的研究可参见文献[1-8]. 近年来，Kirchhoff 方程的变号解受到广泛关注. 文献[9]在 $g(x,t)$ 满足次临界条件的情形下，利用极大极小方法和下降流不变集得到了 Kirchhoff 方程的变号解. 文献[10]利用 Nehari 流形和变分法得到了带临界指数的 Kirchhoff 方程的基态变号解. 文献[11]在 $g(|x|,t)$ 满足 4-超线性增长条件的情况下，得到了方程(1) 仅变号 k 次的径向解. 文献[12]利用不变集和 Ljusternik-Schnirelman 型极大极小方法，得到了方程(1) 的无穷多个变号解. 文献[13]在如下 AR 条件(G) 成立时，得到了方程(1) 的基态变号解：

(G) 存在 $\mu>2$，使得 $tg(t)\geqslant\mu G(t)>0$ 对于所有 $t\neq 0$ 成立，其中 $G(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$.

我们把条件(G) 减弱为以下条件：

(g_1) 存在 $\mu>2$，使得 $tg(t)-\mu G(t)\geqslant -\upsilon t^2$ 对于所有 $t\neq 0$ 成立，其中 $\upsilon>0$ 充分小.

在本文中，假设 $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 和 $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 分别满足如下条件：

(V_1) $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)=V_0>0$；

(V_2) $V(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 是径向对称且可微的，$(\nabla V(x),x)\in L^\infty(\mathbb{R}^3)\cup L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. 此外，存在 $\mu>2$，使得

$$\frac{\mu-2}{\mu}V(x)-(\nabla V(x),x)\geqslant 0$$

(g_2) $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 并且 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)}{t}=0$；

(g_3) $\limsup\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{|g(t)|}{|t|^{p-1}}<\infty$，$p\in(2,6)$.

显然，条件(g_1) 比(G) 弱. 本文利用文献[13]的思想，在上述条件(V_1)－(V_2) 和(g_1)－(g_3) 下，仍然得到了方程(1) 的基态变号解.

记 Hilbert 空间

$$E=\left\{u\in H_r^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

其内积定义为

$$\langle u, v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(a \nabla u \nabla v+V(x) u v) \mathrm{d} x$$

其范数为

$$\|u\|=\sqrt{\langle u, u\rangle}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(a|\nabla u|^2+V(x) u^2\right) \mathrm{d} x\right)^{\frac{1}{2}}$$

方程(1) 对应的能量泛函为

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3} G(u) \mathrm{d} x$$

方程的解与泛函的临界点一一对应. 本文用 C, C_i 表示各种正常数. 记 S 为最佳 Sobolev 常数:

$$S=\inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \backslash\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^6 \mathrm{d} x\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{2}$$

本文的主要结果如下:

定理 1 　假设条件$(V_1)-(V_2)$和$(g_1)-(g_3)$成立，则方程(1) 至少有一个径向对称的基态变号解.

由于4-超线性 Ambrosetti-Rabinowtiz 条件不成立，导致PS序列的有界性难以得到，所以需要引入一个扰动问题来克服这种困难. 设 $\alpha \in\left(0, \frac{\mu-2}{3 \mu+2}\right)$，固定 $\lambda, \beta \in(0,1]$，$r \in\left(\max \left\{p, \frac{9}{2}\right\}, 6\right)$. 考虑如下扰动问题:

$$-\left(a+b \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x\right) \triangle u+V(x) u=g_{\lambda, \alpha, \beta}(u) \qquad u \in E \tag{3}$$

其中

$$g_{\lambda, \alpha, \beta}(u)=g(u)+\beta|u|^{r-2} u-\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 \mathrm{d} x\right)^\alpha u$$

与之有关的能量泛函为

$$J_{\lambda, \beta}(u)=J(u)+\frac{\lambda}{2(1+\alpha)}\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 \mathrm{d} x\right)^{1+\alpha}-\frac{\beta}{r} \int_{\mathbb{R}^3}|u|^r \mathrm{d} x \tag{4}$$

引理 1 　设 u 是 $J_{\lambda, \beta}$ 在 E 中的临界点，$(\lambda, \beta) \in(0,1] \times(0,1]$，则

$$\frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x+\frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u^2 \mathrm{d} x+\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x), x) u^2 \mathrm{d} x+\frac{b}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x\right)^2+$$
$$\frac{3 \lambda}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 \mathrm{d} x\right)^{1+\alpha}-3 \int_{\mathbb{R}^3}\left(G(u)+\frac{\beta}{r}|u|^r\right) \mathrm{d} x=0$$

作为 Lax-Milgram 定理的应用，对于每一个 $u \in E$，方程

$$-\left(a+b \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 \mathrm{d} x\right) \triangle v+V(x) v+\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 \mathrm{d} x\right)^\alpha v=g(u)+\beta|u|^{r-2} u \tag{5}$$

都有唯一的弱解 $v \in E$. 为了构造 $J_{\lambda, \beta}$ 的下降流，引入一个辅助算子

$$T_{\lambda, \beta}: u \in E \longmapsto v \in E$$

其中 $v=T_{\lambda, \beta}(u)$ 是方程(5) 唯一的弱解. 由文献[13] 可知，算子 $T_{\lambda, \beta}$ 具有以下性质:

(i) $T_{\lambda, \beta}$ 是连续且紧的;

(ii) $\forall u \in E$，$J_{\lambda, \beta}^{\prime}(u-T_{\lambda, \beta}(u)) \geqslant\|u-T_{\lambda, \beta}(u)\|^2$;

(iii) $\forall u \in E$，$\|J_{\lambda, \beta}^{\prime}(u)\|^2 \leqslant\|u-T_{\lambda, \beta}(u)\|(1+C_1\|u\|^2+C_2\|u\|^{2 \alpha})$;

(iv) $(\lambda, \beta) \in(0,1] \times(0,1]$，$c<d$，$\tau>0$，若 $J_{\lambda, \beta}(u) \in[c, d]$，$\|J_{\lambda, \beta}^{\prime}(u)\| \geqslant \tau$，则存在 $\delta>0$，使得 $\|u-T_{\lambda, \beta}(u)\| \geqslant \delta$.

为了得到变号解，令

$$P^+=\{u\in E: u\geqslant 0\}\qquad P^-=\{u\in E: u\leqslant 0\}$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，设

$$P_\varepsilon^+=\{u\in E:\mathrm{dist}(u, P^+)<\varepsilon\}\qquad P_\varepsilon^-=\{u\in E:\mathrm{dist}(u, P^-)<\varepsilon\}$$

$$\mathrm{dist}(u, P^\pm)=\inf_{v\in P^\pm}\|u-v\|$$

$$W=P_\varepsilon^+\cup P_\varepsilon^-$$

容易验证 W 是 E 中开的对称子集，并且 $E\backslash W$ 只包含变号解. 记

$$K=\{u\in E: J'_{\lambda,\beta}(u)=0\}\qquad E_0=E\backslash K$$

$$K_c=\{u\in E: J_{\lambda,\beta}(u)=c, J'_{\lambda,\beta}(u)=0\}\qquad J_{\lambda,\beta}^c=\{u\in E: J_{\lambda,\beta}(u)\leqslant c\}$$

与文献[14]中引理 2.4 的证明类似，可以得到当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 时，方程(3)的所有变号解都包含在 $E\backslash W$ 中.

引理 2 [15]（形变引理）　设 $S\subset E$，$c\in\mathbb{R}$，$\varepsilon,\delta>0$，满足

$$\|J'_{\lambda,\beta}(u)\|^2\geqslant\varepsilon_0\qquad\forall u\in J_{\lambda,\beta}^{-1}([c-2\varepsilon_0, c+2\varepsilon_0])\cap S_{2\delta}$$

其中

$$S_{2\delta}=\{u\in S:\mathrm{dist}(u, S)<2\delta\}$$

则对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_1<\varepsilon_0$，存在映射 $\eta\in C([0, 1]\times E, E)$，使得：

(i) $\eta(t, u)=u$，当 $t=0$ 或者 $u\notin J_{\lambda,\beta}^{-1}([c-2\varepsilon_1, c+2\varepsilon_1])$ 时成立；

(ii) $\eta(1, J_{\lambda,\beta}^{c+\varepsilon}\cap S)\subset J_{\lambda,\beta}^{c-\varepsilon}$；

(iii) $\forall u\in E$，$J_{\lambda,\beta}(\eta(\cdot, u))$ 是非增的；

(iv) $\forall t\in[0, 1]$，$\eta(t, \widetilde{P}_\varepsilon^+)\subset\widetilde{P}_\varepsilon^+$，$\eta(t, \widetilde{P}_\varepsilon^-)\subset\widetilde{P}_\varepsilon^-$；

(v) $\forall t\in[0, 1]$，若 $J_{\lambda,\beta}(\cdot)$ 是偶泛函，则映射 $\eta(t, \cdot)$ 是奇的.

定义 1 [16]　如果下列形变性质成立：若 $K_c\backslash W=\varnothing$，其中 $W=P\cup Q$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $\eta\in C(E, E)$ 满足：

(a) $\eta(\widetilde{P})\subset\widetilde{P}$，$\eta(\widetilde{Q})\subset\widetilde{Q}$；

(b) $\eta|_{I^{c-2\varepsilon}}=\mathrm{id}$；

(c) $\eta(I^{c+\varepsilon}\backslash W)\subset I^{c-\varepsilon}$.

则 $\{P, Q\}$ 是 c 水平集上关于 I 的可容许不变集族.

引理 3 [16]　假设 $\{P, Q\}$ 是 c 水平集上关于 I 的可容许不变集族，其中 $c\geqslant c^*=\inf\limits_{u\in\partial P\cap\partial Q}I(u)$，并且存在一个连续映射 $\Psi_0:\triangle\longmapsto E$ 满足：

(i) $\Psi_0(\partial_1\triangle)\subset P$，$\Psi_0(\partial_2\triangle)\subset Q$；

(ii) $\Psi_0(\partial_0\triangle)\cap M=\varnothing$，其中 $M=P\cap Q$；

(iii) $\sup\limits_{u\in\Psi_0(\partial_0\triangle)}I(u)<c^*$.

其中

$$\triangle=\{(t_1, t_2)\in\mathbb{R}^2: t_1,t_2\geqslant 0, t_1+t_2\leqslant 1\}$$

$$\partial_1\triangle=\{0\}\times[0, 1]\qquad\partial_2\triangle=[0, 1]\times\{0\}$$

$$\partial_0\triangle=\{(t_1, t_2)\in\mathbb{R}^2: t_1,t_2\geqslant 0, t_1+t_2=1\}$$

定义 $c=\inf\limits_{\Psi\in\Gamma}\sup\limits_{u\in\Psi(\triangle)\backslash W}I(u)$，其中

$$\Gamma=\{\Psi\in C(\triangle, E):\Psi(\partial_1\triangle)\subset P, \Psi(\partial_2\triangle)\subset Q, \Psi|_{\partial_0\triangle}=\Psi_0|_{\partial_0\triangle}\}$$

则 $c\geqslant c^*$，$K_c\backslash W\neq\varnothing$.

定理 1 的证明

我们将利用引理 3 证明方程(3)存在变号解，再通过取极限得到方程(1)的基态变号解. 设 $P=P_\varepsilon^+$，

$Q = P_\varepsilon^-$，$I = J_{\lambda,\beta}$，$S = E \backslash W$. 由引理2可知，$\{P_\varepsilon^+, P_\varepsilon^-\}$ 是泛函 $J_{\lambda,\beta}$ 在 c 水平集上的可容许不变集族. 下面将分3步来完成定理1的证明.

步骤1 取 $v_1, v_2 \in C_{0,r}^\infty(B_1(0))$，使得 $\mathrm{supp}(v_1) \cap \mathrm{supp}(v_2) = \varnothing$，其中 $v_1 < 0$，$v_2 > 0$，$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$. 当 $(t, s) \in \triangle$ 时，设

$$\varphi_0(t, s) = R^2[tv_1(R\,\cdot) + sv_2(R\,\cdot)]$$

显然

$$\varphi_0(0, s)(\cdot) = R^2 s v_2(R\,\cdot) \in P_\varepsilon^+ \qquad \varphi_0(t, 0)(\cdot) = R^2 t v_1(R\,\cdot) \in P_\varepsilon^-$$

由文献[13]的引理3.10可知，对任意的 $u \in \partial P_\varepsilon^+ \cap \partial P_\varepsilon^-$，$J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$. 因此，$c^* = \inf\limits_{u \in \partial P_\varepsilon^+ \cap \partial P_\varepsilon^-} J_{\lambda,\beta}(u) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$. 设 $u_t = \varphi_0(t, 1-t)$，$t \in [0, 1]$. 我们有

$$\ell = \min\{\|tv_1 + (1-t)v_2\|_2 : 0 \leqslant t \leqslant 1\} > 0$$

当 $u \in \varphi_0(\partial_0 \triangle)$ 时，$\|u_t\|_2^2 \geqslant \ell R$. 对任意固定的 $u \in M = P_\varepsilon^+ \cap P_\varepsilon^-$，

$$\|u^\pm\|_q = \inf_{v \in P^\mp} \|u - v\|_q \leqslant C \inf_{v \in P^\mp} \|u - v\| \leqslant C\,\mathrm{dist}(u, P^\mp)$$

所以，存在 $m > 0$，使得 $\|u\|_q \leqslant m\varepsilon$. 因此，$\varphi_0(\partial_0 \triangle) \cap P_\varepsilon^+ \cap P_\varepsilon^- = \varnothing$. 通过直接计算可以得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t|^2 \mathrm{d}x = R^3 \int_{\mathbb{R}^3} (t^2 |\nabla v_1|^2 + (1-t)^2 |\nabla v_2|^2) \mathrm{d}x = R^3 B(t)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u_t|^2 \mathrm{d}x \leqslant R \max_{x \in B_1(0)} V(x) \int_{\mathbb{R}^3} (t^2 |v_1|^2 + (1-t)^2 |v_2|^2) \mathrm{d}x = R B_2(t)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^q \mathrm{d}x = R^{2q-3} \int_{\mathbb{R}^3} (t^q |v_1|^q + (1-t)^q |v_2|^q) \mathrm{d}x = R^{2q-3} B_q(t) \qquad q \in (2, 6]$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2 \mathrm{d}x\right)^{1+\alpha} = R^{1+\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (t^2 |v_1|^2 + (1-t)^2 |v_2|^2) \mathrm{d}x\right)^{1+\alpha} = R^{1+\alpha} \widetilde{B}(t) \tag{6}$$

由条件(g_3)可知，对于任意的 $t \in \mathbb{R}$，存在正常数 C_3, C_4，使得 $G(t) \geqslant -C_3 |t|^p - C_4$. 结合(1)式、(4)式和(6)式可以得到

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\beta}(u_t) = {} & \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) |u_t|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2(1+\alpha)} \|u_t\|_2^{2(1+\alpha)} + \\ & \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \int_{B_R^{-1}(0)} G(u_t) \mathrm{d}x - \frac{\beta}{r} \int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^r \mathrm{d}x < \\ & \frac{aR^3}{2} B(t) + \frac{R}{2} B_2(t) + \frac{bR^6}{4} B^2(t) + \frac{R^{1+\alpha}}{2(1+\alpha)} \widetilde{B}(t) + \\ & C_3 R^{2p-3} B_p(t) + C C_4 R^{-3} - \frac{R^{2r-3}}{r} B_r(t) \end{aligned}$$

因为 $r \in \left(\max\left\{p, \frac{9}{2}\right\}, 6\right)$，所以当 R 趋于正无穷时，$J_{\lambda,\beta}(u_t)$ 趋于负无穷. 因此，存在充分大的 R 使得

$$\sup_{u \in \varphi_0(\partial_0 \triangle)} J_{\lambda,\beta}(u) < c^* = \inf_{u \in \partial P_\varepsilon^+ \cap \partial P_\varepsilon^-} J_{\lambda,\beta}(u)$$

根据以上分析可知，$J_{\lambda,\beta}$ 满足引理3的条件，所以 $c_{\lambda,\beta} = \inf\limits_{\varphi \in \Gamma} \sup\limits_{u \in \varphi(\triangle) \backslash W} J_{\lambda,\beta}(u)$ 是 $J_{\lambda,\beta}$ 的临界值，$c_{\lambda,\beta} \geqslant c^*$. 因此，存在 $u_{\lambda,\beta} \in E \backslash (P_\varepsilon^+ \cup P_\varepsilon^-)$，使得 $J_{\lambda,\beta}(u_{\lambda,\beta}) = c_{\lambda,\beta}$，$J'_{\lambda,\beta}(u_{\lambda,\beta}) = 0$.

步骤2 取 λ 和 β 趋于0. 根据 $c_{\lambda,\beta}$ 的定义，对于任意的 $(\lambda, \beta) \in (0, 1] \times (0, 1]$，有

$$c_{\lambda,\beta} \leqslant C_R = \sup_{u \in \varphi_0(\triangle)} J_{1,0}(u) < \infty \tag{7}$$

不失一般性，假设 $\lambda = \beta$. 取序列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 1]$ 满足 λ_n 趋于 0^+，则存在 J_{λ_n,β_n} 的临界点序列 $\{u_{\lambda_n}\}$(仍记为 $\{u_n\}$)使得 $J_{\lambda_n,\beta_n}(u_n) = c_{\lambda_n,\beta_n}$. 下面要证 $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 由 $J_{\lambda,\beta}$ 的定义可以得到

$$c_{\lambda_n,\beta_n} = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2(1+\alpha)} \|u_n\|_2^{2(1+\alpha)} +$$

$$\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(u_n)\mathrm{d}x-\frac{\beta}{r}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$0=a\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\mathrm{d}x+\lambda\|u_n\|_2^{2(1+\alpha)}+$$
$$b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}g(u_n)u_n\mathrm{d}x-\beta\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x \tag{9}$$

此外，由引理 1 可得

$$\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x),x)u_n^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{b}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{3\lambda}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\mathrm{d}x\right)^{1+\alpha}-3\int_{\mathbb{R}^3}\left(G(u_n)+\frac{\beta}{r}|u_n|^r\right)\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

用 4，$-\frac{1}{\mu}$，-1 分别乘(8) 式、(9) 式、(10) 式，最后相加得到

$$4c_{\lambda_n,\beta_n}=\frac{a(3\mu-2)}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu-2}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla V(x),x)u_n^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{b(\mu-2)}{2\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{\lambda(\mu-2-3\mu\alpha-2\alpha)}{2\mu(1+\alpha)}\|u_n\|_2^{2(1+\alpha)}+$$
$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}g(u_n)u_n-G(u_n)\right)\mathrm{d}x+\frac{\beta(r-\mu)}{\mu r}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x$$

因为 $\alpha<\frac{\mu-2}{3\mu+2}$ 并且 $\mu>2$，结合条件(V_2) 和(7) 式可得

$$4C_R>\frac{a(3\mu-2)}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{b(\mu-2)}{2\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}g(u_n)u_n-G(u_n)\right)\mathrm{d}x$$

又由条件(g_1) 可知

$$4C_R>\frac{a(3\mu-2)}{2\mu}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{b(\mu-2)}{2\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{\upsilon}{\mu}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\mathrm{d}x$$

利用 Sobolev 连续嵌入，

$$4C_R>\left(\frac{a(3\mu-2)}{2\mu}-\frac{C\upsilon}{\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{b(\mu-2)}{2\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2$$

因此，当 $\upsilon>0$ 充分小时，

$$4C_R>\frac{b(\mu-2)}{2\mu}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2$$

则存在正常数 C_5，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x<C_5 \tag{11}$$

此外，结合(2) 式、(7) 式和(8) 式以及假设条件(V_1)，(g_2)，(g_3)，可以得到：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得

$$C_R>\frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(u_n)\mathrm{d}x-\frac{\beta}{r}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x>$$
$$\frac{1-\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V_0u_n^2\mathrm{d}x-C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}u_n^6\mathrm{d}x-\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^r\mathrm{d}x>$$
$$\frac{1-\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V_0u_n^2\mathrm{d}x-C_\varepsilon S^{-3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^3-\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x \tag{12}$$

由插值不等式、Sobolev 不等式和 Young 不等式，可以推出对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\widetilde{C}_\varepsilon>0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{6-r}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-2}{4}}\leqslant$$

$$\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{6-r}{2}} + \widetilde{C}_\varepsilon S^{\frac{3(2-r)}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{3(r-2)}{2}} \tag{13}$$

结合(11)式、(12)式和(13)式，可知$\{u_n\}$在E中有界. 又因为

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(J_{\lambda,\beta}(u_n) - \frac{\lambda_n}{2(1+\alpha)}\|u_n\|_2^{2(1+\alpha)} + \frac{\beta_n}{r}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^r \mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\beta_n} = c^* > \frac{\varepsilon^2}{4}$$

并且，对于任意的$\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，

$$\lim_{n\to\infty} J'(u_n)\Psi = \lim_{n\to\infty}\left(J'_{\lambda_n,\beta_n}(u_n)\Psi - \lambda_n\|u_n\|_2^{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^3} u_n\Psi \mathrm{d}x + \beta_n\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{r-2}u_n\Psi \mathrm{d}x\right) = 0$$

所以，$\{u_n\}$是J在c^*水平集上的有界PS序列. 因此，存在$u^* \in E$，使得$\{u_n\}$在E中弱收敛到u^*，$\{u_n\}$在$L^q(\mathbb{R}^3)$中强收敛到u^*，$q \in (2, 6)$.

$$\begin{aligned}&\langle J'(u_n) - J'(u^*), u_n - u^*\rangle = \\ &\|u_n - u^*\|^2 + b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u_n - u^*)|^2 \mathrm{d}x + \\ &b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^*|^2 \mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u^* \nabla(u_n - u^*)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}(g(u_n) - g(u^*))(u_n - u^*)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为$\{u_n\}$在E中有界，所以

$$b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u^*|^2 \mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u^* \nabla(u_n - u^*)\mathrm{d}x \to 0 \qquad n \to \infty$$

由条件(g_2),(g_3)可得：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$C_\varepsilon > 0$，使得$|g(t)| \leqslant \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1}$. 结合Hölder不等式，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}(g(u_n) - g(u^*))(u_n - u^*)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3}[\varepsilon(|u_n| + |u^*|) + C_\varepsilon(|u_n|^{p-1} + |u^*|^{p-1})]|u_n - u^*|\mathrm{d}x \leqslant \\ &\varepsilon C + C_\varepsilon(|u_n|_p^{p-1} + |u^*|_p^{p-1})|u_n - u^*|_p \to 0 \qquad n \to \infty\end{aligned}$$

因此

$$\langle J'(u_n) - J'(u^*), u_n - u^*\rangle = \|u_n - u^*\|^2 + b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u_n - u^*)|^2 \mathrm{d}x + o_n(1)$$

由$\langle J'(u_n) - J'(u^*), u_n - u^*\rangle \to 0$可知，$\{u_n\}$在$E$中强收敛到$u^*$，此外，$J'(u^*) = 0$. 所以由$u_n \in E\backslash(P_\varepsilon^+ \cup P_\varepsilon^-)$可以得到$u^* \in E\backslash(P_\varepsilon^+ \cup P_\varepsilon^-)$，因此，$u^*$是方程(1)的变号解.

步骤3　定义

$$\bar{c} = \inf_{v\in\Theta} J(v) \qquad \Theta = \{v \in E\backslash\{0\}: J'(v) = 0, v^\pm \not\equiv 0\}$$

根据步骤2的证明过程可知$\Theta \neq \varnothing$，$\bar{c} \leqslant c^*$. 由$\bar{c}$的定义，存在序列$\{u_n\} \in \Theta$，使得$J(u_n) \to \bar{c}$，$J'(u_n) = 0$，$u_n^\pm \not\equiv 0$. 根据步骤2的讨论，$J_{\lambda,\beta}$在$c_{\lambda,\beta}$水平集上的有界PS序列也是J在c^*水平集上的有界PS序列，所以，$\{u_n\}$在E中有界，并且由上一步的结论可知，$\{u_n\}$在E中强收敛到u，所以$J(u) = \bar{c}$，$J'(u) = 0$. 此外，由$\langle J'(u_n), u_n^\pm\rangle = 0$可推断出：对于任意的$0 < \varepsilon < 1$，存在$C_\varepsilon > 0$，使得

$$\|u_n^\pm\|^2 \leqslant \|u_n^\pm\|^2 + b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^\pm|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n^\pm)u_n^\pm \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^p \mathrm{d}x$$

根据Sobolev不等式，有

$$(1 - \varepsilon)\|u_n^\pm\|^2 \leqslant C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^p \mathrm{d}x$$

由$\{u_n\}$在E中有界并且$p > 2$可知，$\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^\pm|^p \mathrm{d}x \geqslant C$，所以$\int_{\mathbb{R}^3}|u^\pm|^p \mathrm{d}x \geqslant C$. 因此$u^\pm \not\equiv 0$. 由以上分析可知$u \in \Theta$并且$J(u) = \inf_{v\in\Theta} J(v)$，即$J(u) \leqslant J(v)(\forall v \in \Theta)$. 因此，$u$是方程(1)的基态变号解. 定理1的证明完成.

参考文献：

[1] 唐榆婷，唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：81-86.

[2] HE X M，ZOU W M. Existence and Concentration Behavior of Positive Solutions for a Kirchhoff Equation in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Differential Equations，2012，252(2)：1813-1834.

[3] LI G B，YE H Y. Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Differential Equations，2014，257(2)：566-600.

[4] CHEN C Y，KUO Y C，WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions [J]. Journal of Differential Equations，2011，250(4)：1876-1908.

[5] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60-63.

[6] 苑紫冰，欧增奇. 一类具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(8)：32-36.

[7] 陈星，吴行平，唐春雷. 一类渐近 3 -线性 Kirchhoff 型方程的正基态解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(4)：22-25.

[8] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：54-59.

[9] ZHANG Z T，PERERA K. Sign Changing Solutions of Kirchhof Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，317(2)：456-463.

[10] 彭秋颖，吕颖. 带有临界指数的 Kirchhoff 方程最小能量变号解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(10)：23-29.

[11] DENG Y B，PENG S J，SHUAI W. Existence and Asymptotic Behavior of Nodal Solutions for the Kirchhoff-Type Problems in $\mathbb{R}^3$ [J]. Journal of Functional Analysis，2015，269(11)：3500-3527.

[12] SUN J J，LI L，CENCEIJ M，et al. Infinitely Many Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Type Problems in $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Analysis，2019，186：33-54.

[13] LIU Z S，LOU Y J，ZHANG J J. A Perturbation Approach to Studying Sign-changing Solutions of Kirchhoff Equations with a General Nonlinearity [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata，2022，201(3)：1229-1255.

[14] CASSANI D，LIU Z S，TARSI C，et al. Multiplicity of Sign-changing Solutions for Kirchhoff-type Equations [J]. Nonlinear Analysis，2019，186：145-161.

[15] LIU Z L，WANG Z Q，ZHANG J J. Infinitely Many Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata，2016，195(3)：775-794.

[16] LIU J Q，LIU X Q，WANG Z Q. Multiple Mixed States of Nodal Solutions for Nonlinear Schrödinger Systems [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2015，52(3/4)：565-586.

责任编辑　廖坤