第 48 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 1 月
Vol. 48 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.004

一类带 $p(x)$-双调和算子的 Kirchhoff 型方程解的存在性①

余颖， 储昌木， 何忠菊

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：研究了一类带 $p(x)$-双调和算子的 Kirchhoff 型方程，基于变指数 Lebesgue-Sobolev 空间中的相关理论，利用变分方法，获得了该方程非平凡弱解的存在性.

关 键 词：$p(x)$-双调和算子；Kirchhoff 型方程；变分方法；非平凡弱解

中图分类号：O176.3 **文献标志码：A** **文章编号：**1000-5471(2023)01-0026-06

Existence of Solutions for a Class of Kirchhoff Type Equation Involving the $p(x)$-Biharmonic Operators

YU Ying, CHU Changmu, HE Zhongju

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025

Abstract: This paper is devoted to studying a class of Kirchhoff type equation involving the $p(x)$-biharmonic operators. In view of the theories of variable exponent Lebesgue-Sobolev spaces, the existence of nontrivial weak solutions to this problem is obtained by means of variational methods.

Key words: $p(x)$-biharmonic operator; Kirchhoff type equation; variational methods; nontrivial weak solutions

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，考虑一类带 $p(x)$-双调和算子的 Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} \left(a - b\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\Delta u|^{p(x)} \mathrm{d}x\right) \Delta^2_{p(x)} u = f(x)|u|^{\alpha(x)-2}u - g(x)|u|^{\beta(x)-2}u & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a \geqslant b > 0$，$p \in C(\overline{\Omega})$，$1 < p^- = \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \leqslant p^+ = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < N$，$f, g, \alpha, \beta \in C(\overline{\Omega})$，对于所有的 $x \in \overline{\Omega}$，$f(x), g(x) > 0$，$\Delta^2_{p(x)} u = \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$ 为 $p(x)$-双调和算子.

近年来，涉及 $p(x)$-拉普拉斯算子的椭圆方程及变分方法的研究，受到了许多学者的关注[1-8]. 特别地，文献[1]研究了涉及凹凸非线性项的 $p(x)$-双调和方程

---

① 收稿日期：2022-07-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11861021，11661021).

作者简介：余颖，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：储昌木，教授.

$$\begin{cases}\Delta^2_{p(x)}u+v(x)|u|^{p(x)-2}u=\lambda f(x)|u|^{q(x)-2}u-\lambda g(x)|u|^{r(x)-2}u & x\in\Omega\\ u=\Delta u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

针对 $q(x)$,$r(x)$ 和 $p(x)$ 满足不同的条件，分别应用强制弱下半连续性、Ekeland's 变分原理及山路引理等变分方法获得了方程(2) 非平凡弱解的存在性. 然而，关于带 $p(x)$- 双调和算子的 Kirchhoff 型方程的研究结果相对较少[9-11]. 受以上文献的启发，本文讨论方程(1) 非平凡弱解的存在性.

定理 1　假设 $a\geqslant b>0$，$p(x)$,$\alpha(x)$,$\beta(x)\in C(\overline{\Omega})$，$f(x)$,$g(x)>0$ 满足

$$1<\beta^-\leqslant\beta^+<p^-\leqslant p^+<\alpha^-\leqslant\alpha(x)<\min\left\{\frac{N}{2},\ \frac{Np(x)}{N-2p(x)}\right\}\qquad (p^+)^2<2(p^-)^2\tag{3}$$

则方程(1) 至少有一个非平凡弱解.

1　预备知识

令

$$C_+(\overline{\Omega})=\{p(x):p(x)\in C(\overline{\Omega}),\ p(x)>1,\ x\in\overline{\Omega}\}$$

$$L^{p(x)}(\Omega)=\{u:u\ \text{为可测的实值函数},\int_\Omega|u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\}$$

$L^{p(x)}$ 对应的范数为

$$|u|_{p(x)}=\inf\left\{\eta>0:\int_\Omega\left|\frac{u}{\eta}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant1\right\}$$

$$W^{k,p(x)}(\Omega)=\{u\in L^{p(x)}(\Omega):D^\gamma u\in L^{p(x)}(\Omega),\ |\gamma|\leqslant k\}\qquad k=1,2,\cdots$$

其中 $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$ 为多重指标，$|\gamma|=\sum_{i=1}^N\gamma_i$，$W^{k,p(x)}$ 对应的范数为

$$\|u\|_{k,p(x)}=\sum_{|\gamma|\leqslant k}|D^\gamma u|_{p(x)}$$

由文献[12]知，$L^{p(x)}$ 和 $W^{k,p(x)}(\Omega)$ 为可分的自反 Banach 空间. 用 $W_0^{k,p(x)}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p(x)}(\Omega)$ 中的闭包，记

$$X=W_0^{1,p(x)}(\Omega)\cap W^{2,p(x)}(\Omega)$$

其范数为

$$\|u\|_X=\|u\|_{1,p(x)}+\|u\|_{2,p(x)}$$

令

$$\|u\|=\inf\left\{\eta>0:\int_\Omega\left(\left|\frac{\Delta u(x)}{\eta}\right|^{p(x)}\right)\mathrm{d}x\leqslant1\right\}\qquad u\in X$$

由文献[12] 知，在 X 中 $\|\ \|$ 与 $\|\ \|_X$ 等价，X 是可分的自反 Banach 空间.

命题 1[13](Hölder 不等式)　若 $p(x)$,$q(x)\in C_+(\overline{\Omega})$ 满足 $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$，则对所有的 $u\in L^{p(x)}(\Omega)$，$v\in L^{q(x)}(\Omega)$，有

$$\left|\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^-}\right)|u|_{p(x)}|v|_{q(x)}\leqslant2|u|_{p(x)}|v|_{q(x)}$$

命题 2[14]　令 $\rho(u)=\int_\Omega|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x$，$u\in X$. 若 $\|u\|\geqslant1$，则有 $\|u\|^{p^-}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|^{p^+}$；若 $\|u\|\leqslant1$，则有 $\|u\|^{p^+}\leqslant\rho(u)\leqslant\|u\|^{p^-}$；$\|u\|=0$ 当且当 $\rho(u)=0$.

命题 3[14]　假设 $q(x)\in C_+(\overline{\Omega})$ 且 $q(x)<p^*(x)=\frac{Np(x)}{N-2p(x)}$，$x\in\overline{\Omega}$. 则 X 到 $L^{q(x)}(\Omega)$ 的嵌入是连续且紧的.

命题 4[15]　设 $\psi(u)=\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x$，则

$$\langle\psi'(u),\ v\rangle=\int_\Omega|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\Delta v\,\mathrm{d}x\qquad u,v\in X$$

且满足:

(i) $\psi'(u)$ 是连续且有界的严格单调算子;

(ii) $\psi'(u)$ 是 S_+ 型的,即若 $u_n \rightharpoonup u$ 且 $\limsup\limits_{n\to\infty} \psi'(u_n)(u_n - u) \leqslant 0$,则有 $u_n \to u$;

(iii) $\psi'(u)$ 是同胚的.

定义 1 如果对任意的 $v \in X$,有

$$\left(a - b\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\Delta u|^{p(x)} \mathrm{d}x\right)\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u \Delta v \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)|u|^{\alpha(x)-2}uv\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)|u|^{\beta(x)-2}uv\mathrm{d}x = 0$$

则称 $u \in X$ 为方程(1)的弱解.显然,方程(1)的弱解与泛函

$$J(u) = a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2 - \int_\Omega \frac{f(x)}{\alpha(x)}|u|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{g(x)}{\beta(x)}|u|^{\beta(x)}\mathrm{d}x$$

的临界点等价.

2 主要结果的证明

在证明主要结果前,先证明泛函 J 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

引理 1 当定理 1 的条件成立时,泛函 J 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件,其中 $c < \dfrac{a^2}{2b}$.

证 设 $\{u_n\} \subset X$ 为 J 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,即

$$J(u_n) \to c \qquad n \to \infty \tag{4}$$

且在 X^* 中 $J'(u_n) \to 0 (n \to \infty)$.其中 X^* 是 X 的对偶空间.

首先证明序列 $\{u_n\}$ 在 X 中有界.令 $\theta \in \left(p^+, \min\left\{\alpha^-, \dfrac{2(p^-)^2}{p^+}\right\}\right)$,则由(3)式和(4)式,有

$$\begin{aligned}
c + \|u_n\| \geqslant{}& J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle = \\
& a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x - \frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{a}{\theta}\int_\Omega |\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x + \\
& \frac{b}{\theta}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\int_\Omega |\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\frac{f(x)}{\alpha(x)}|u_n|^{\alpha(x)} - \frac{g(x)}{\beta(x)}|u_n|^{\beta(x)}\right)\mathrm{d}x + \\
& \frac{1}{\theta}\int_\Omega (f(x)|u_n|^{\alpha(x)} - g(x)|u_n|^{\beta(x)})\,\mathrm{d}x \geqslant \\
& a\left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega |\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x + b\left(\frac{1}{\theta p^+} - \frac{1}{2(p^-)^2}\right)\left(\int_\Omega |\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2 + \\
& \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha^-}\right)\int_\Omega f(x)|u_n|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{\beta^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega g(x)|u_n|^{\beta(x)}\mathrm{d}x \geqslant \\
& a\left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^{p^-} + b\left(\frac{1}{\theta p^+} - \frac{1}{2(p^-)^2}\right)\|u_n\|^{2p^-}
\end{aligned} \tag{5}$$

由 $p^- > 1$ 知,$\{u_n\}$ 在 X 中有界.

接下来证明在 X 中 $u_n \to u$.由于 X 是自反 Banach 空间,且 $\{u_n\}$ 在 X 中有界,所以存在子列(仍用 $\{u_n\}$ 表示)和 $u \in X$,使得当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{cases}
u_n \rightharpoonup u & x \in X \\
u_n \to u & x \in L^{s(x)}(\Omega),\ 1 \leqslant s(x) < p^*(x) \\
u_n(x) \to u(x) & \text{a.e. } x \in \Omega
\end{cases} \tag{6}$$

由(6)式和 Hölder 不等式可知,当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(x)|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n(u_n - u)\mathrm{d}x\right| \leqslant{}& \int_\Omega |f(x)|u_n|^{\alpha(x)-1}||u_n - u|\mathrm{d}x \leqslant \\
& \max_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|\int_\Omega |u_n|^{\alpha(x)-1}|u_n - u|\mathrm{d}x \leqslant
\end{aligned}$$

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \, \left| |u_n|^{\alpha(x)-1} \right|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} |u_n - u|_{\alpha(x)} \to 0 \tag{7}$$

类似地，当 $n\to\infty$ 时，

$$\left|\int_\Omega g(x)|u_n|^{\beta(x)-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\right| \to 0$$

因此

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega g(x)|u_n|^{\beta(x)-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x=0\end{cases} \tag{8}$$

由(4)式可知，$\langle J'(u_n),u_n-u\rangle\to 0$，即

$$\langle J'(u_n),u_n-u\rangle=\left(a-b\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\int_\Omega|\Delta u_n|^{p(x)-2}\Delta u_n(\Delta u_n-\Delta u)\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega f(x)|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x)|u_n|^{\beta(x)-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

综上所述，可得

$$\left(a-b\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\int_\Omega|\Delta u_n|^{p(x)-2}\Delta u_n(\Delta u_n-\Delta u)\mathrm{d}x\to 0 \tag{9}$$

因为 $\{u_n\}$ 在 X 中有界，所以存在子列(仍用 $\{u_n\}$ 表示)和 $u\in X$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\to t_0\geqslant 0$$

如果 $t_0=\dfrac{a}{b}$，则

$$a-b\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\to 0$$

由(6)式和 Hölder 不等式，对任意 $v\in X$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left[f(x)(|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n-|u|^{\alpha(x)-2}u)-g(x)(|u_n|^{\beta(x)-2}u_n-|u|^{\beta(x)-2}u)\right]v\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

因为

$$\langle J'(u_n),v\rangle=\left(a-b\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\int_\Omega|\Delta u_n|^{p(x)-2}\Delta u_n\Delta v\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega(f(x)|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n-g(x)|u_n|^{\beta(x)-2}u_n)v\mathrm{d}x$$

且当 $n\to\infty$ 时，$\langle J'(u_n),v\rangle\to 0$，故

$$\int_\Omega(f(x)|u_n|^{\alpha(x)-2}u_n-g(x)|u_n|^{\beta(x)-2}u_n)v\mathrm{d}x\to 0$$

因此

$$\int_\Omega(f(x)|u|^{\alpha(x)-2}u-g(x)|u|^{\beta(x)-2}u)v\mathrm{d}x=0$$

根据变分法基本原理[16]可得

$$f(x)|u(x)|^{\alpha(x)-2}u(x)-g(x)|u(x)|^{\beta(x)-2}u(x)=0\qquad \text{a.e. } x\in\Omega$$

又因为 $f(x),g(x)>0$，所以 $u=0$. 因此

$$\int_\Omega\frac{f(x)}{\alpha(x)}|u_n|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{g(x)}{\beta(x)}|u_n|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\to$$
$$\int_\Omega\frac{f(x)}{\alpha(x)}|u|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{g(x)}{\beta(x)}|u|^{\beta(x)}\mathrm{d}x=0$$

综上所述，当 $t_0=\dfrac{a}{b}$ 时，有

$$J(u_n)=a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2-\int_\Omega \frac{f(x)}{\alpha(x)}|u_n|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{g(x)}{\beta(x)}|u_n|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\to \frac{a^2}{b}-\frac{b}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{2b}$$

这与 $J(u_n)\to c<\frac{a^2}{2b}$ 矛盾，故 $t_0\neq\frac{a}{b}$. 因此

$$a-b\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\to a-bt_0\neq 0 \tag{11}$$

由(9)式可得

$$\int_\Omega |\Delta u_n|^{p(x)-2}\Delta u_n(\Delta u_n-\Delta u)\mathrm{d}x\to 0$$

根据命题 4，当 $n\to\infty$ 时，在 X 中有 $u_n\to u$. 因此，当 $c<\frac{a^2}{2b}$ 时，J 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

下面验证泛函 J 满足山路引理.

引理 2 当定理 1 的条件成立时，泛函 J 具有如下山路几何结构：

(i) 存在 $\rho,\delta>0$，使得对任意 $u\in X$ 且 $\|u\|=\rho$，有 $J(u)\geqslant\delta>0$；

(ii) 存在 $w\in X$ 满足 $\|w\|>\rho$ 且 $J(w)<0$.

证 由紧嵌入 $X\hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$ 知，存在 $C>0$，使得 $|u|_{\alpha(x)}\leqslant C\|u\|$.

设 $\|u\|=\rho<1$，则

$$\begin{aligned}J(u)=&a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2-\int_\Omega \frac{f(x)}{\alpha(x)}|u|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{g(x)}{\beta(x)}|u|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{p^+}\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2(p^-)^2}\left(\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2-\frac{f^+}{\alpha^-}\int_\Omega |u|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x+\frac{g^-}{\beta^+}\int_\Omega |u|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+}-\frac{b}{2(p^-)^2}\|u\|^{2p^-}-\frac{f^+C^{\alpha^-}}{\alpha^-}\|u\|^{\alpha^-}\end{aligned}$$

注意到 $p^+<2p^-$ 且 $p^+<\alpha^-$，故存在 $\rho,\delta>0$，使得对任意 $u\in X$ 且$\|u\|=\rho$，有 $J(u)\geqslant\delta>0$.

令 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi>0$，且 $t>1$，则

$$\begin{aligned}J(t\varphi)\leqslant&\frac{a}{p^-}\int_\Omega |t\Delta\varphi|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2(p^+)^2}\left(\int_\Omega |t\Delta\varphi|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2-\frac{f^-}{\alpha^+}\int_\Omega |t\varphi|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x+\frac{g^+}{\beta^-}\int_\Omega |t\varphi|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{a}{p^-}t^{p^+}\int_\Omega |\Delta\varphi|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2(p^+)^2}t^{2p^-}\left(\int_\Omega |\Delta\varphi|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2-\frac{f^-}{\alpha^+}t^{\alpha^-}\int_\Omega |\varphi|^{\alpha(x)}\mathrm{d}x+\frac{g^+}{\beta^-}t^{\beta^+}\int_\Omega |\varphi|^{\beta(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由(3)式可得，当 $t\to+\infty$ 时，有 $J(t\varphi)\to-\infty$. 则当 $t>1$ 足够大时，令 $w=t\varphi$，使得 $\|w\|>\rho$ 且 $J(w)<0$.

定理 1 的证明 由引理 2 知，J 具有山路几何结构. 定义

$$\Gamma=\{\xi\in C([0,1],X):\xi(0)=0,\ \xi(1)=w\}$$

$$c=\inf_{\xi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\xi(t))$$

注意到对于所有的 $u\in X\backslash\{0\}$，有$\max\limits_{t>0}\left\{at-\frac{b}{2}t^2\right\}=\frac{a^2}{2b}$，则

$$J(u)\leqslant a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{a^2}{2b}$$

因此 $c<\frac{a^2}{2b}$. 设$\{u_n\}$是 J 的一个$(\mathrm{PS})_c$ 序列，由引理 1 知，J 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件. 由山路引理[17] 可得方程(1)有一个解 $\tilde{u}$，且 $J(\tilde{u})=c$. 由 $J(\tilde{u})=c>0=J(0)$，可得 $\tilde{u}$ 是方程(1) 的一个非平凡弱解. 定理 1 得证.

参考文献：

[1] AYAZOGLU R，ALISOY G，EKINCIOGLU I. Existence of One Weak Solution for $p(x)$-Biharmonic Equations Involving a Concave-Convex Nonlinearity [J]. Matematicki Vesnik，2017，69(4)：296-307.

[2] BARAKET S，RDAULESCU V D. Combined Effects of Concave-Convex Nonlinearities in a Fourth-Order Problem With Variable Exponent [J]. Advanced Nonlinear Studies，2016，16(3)：409-419.

[3] HEIDARKHANI S，ALISOY G A，MORADI S，et al. Existence of One Weak Solution for $p(x)$-Biharmonic Equations With Navier Boundary Conditions [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik，2016，67(3)：1-13.

[4] KEFI K. For a Class of $p(x)$-Biharmonic Operators With Weights [J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas，Físicas Naturales(Serie A)，2019，113(2)：1557-1570.

[5] ZHOU Z. On a $p(x)$-Biharmonic Problem With Navier Boundary Condition [J]. Boundary Value Problems，2018，149：1-14.

[6] 蒙璐，储昌木，雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：82-88.

[7] 陈佳，李麟. 涉及 Δ_λ 算子的 Kirchhoff 方程基态解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(6)：41-44.

[8] 鲁雄，王跃. 一类传送带问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(2)：96-102.

[9] AFROUZI G A，MIRZAPOUR M，CHUNG N T. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Problems Involving $p(x)$-Biharmonic Operators [J]. Zeitschrift Für Analysis und Ihre Anwendungen，2014，33(3)：289-303.

[10] DARHOUCHE O. Existence and Multiplicity Results for a Class of Kirchhoff Type Problems Involving the $p(x)$-Biharmonic Operator [J]. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática，2019，37(2)：23-33.

[11] 缪清. 一类带 $p(x)$-双调和算子的 Kirchhoff 型问题的多解性 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2020，44(1)：26-30.

[12] FAN X L，ZHAO D. On the Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，263(1)：424-446.

[13] YUCEDAG Z. Existence of Solutions for $p(x)$-Laplacian Equations Without Ambrosetti-Rabinowitz Type Condition [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2015，38(3)：1023-1033.

[14] AMROUSS EL A，OURRAOUI A. Existence of Solutions for a Boundary Problem Involving $p(x)$-Biharmonic Operator [J]. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática，2013，31(1)：179-192.

[15] AMROUSS EL A，MORADI F，MOUSSAOUI M. Existence of Solutions for Fourth-Order PDEs With Variable Exponents [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2009，2009(153)：1-13.

[16] WILLEM M. Minimax Theorems，Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications [M]. Boston：Birkhäuser，1996：7-36.

[17] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis，1973，14(4)：349-381.

责任编辑　廖坤