第 48 卷 第 1 期　　西 南 师 范 大 学 学 报(自然科学版)　　2023 年 1 月
Vol. 48 No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.005

芬斯勒流形上的两个重要不等式[①]

程新跃，　张希滨

重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要：主要研究了芬斯勒几何中的 Poincare-Lichnerowicz 不等式和 Laplacian 第一特征值的下界估计. 通过使用积分型 Bochner 公式及其相关的不等式，在加权 Ricci 曲率 Ric_N 有正下界的条件下得到了两个重要的不等式，改进了芬斯勒流形上的两个已知的重要结果.

关　键　词：芬斯勒流形；加权 Ricci 曲率；Bochner 公式；Poincare-Lichnerowicz 不等式；第一特征值

中图分类号：O186.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)01－0032－08

Two Important Inequalities on Finsler Manifolds

CHENG Xinyue，　ZHANG Xibin

School of Mathematical Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China

Abstract：In this paper，we concentrate on studying Poincare-Lichnerowicz inequality and the lower bound estimation of the Laplacian first eigenvalue in Fensler geometry. By applying the integral Bochner formula and its related inequalities，we obtain two important inequalities under the condition that the weighted Ricci curvature Ric_N has a positive lower bound. As a result，our results improve two known important inequalities on the Finsler manifold.

Key words：Finsler manifold；weighted Ricci curvature；Bochner formula；Poincare-Lichnerowicz inequality；the first eigenvalue

芬斯勒几何是黎曼几何的一种自然推广，是没有二次型限制的黎曼几何. 与黎曼几何的情形相似，在 Ricci 曲率有下界的条件下，芬斯勒流形上有着非常丰富的几何与分析性质[1-2]. 文献[3]定义了芬斯勒几何中的加权 Ricci 曲率. 文献[4]建立了 Bochner 公式及相应的不等式. Bochner 公式及相应的不等式在芬斯勒流形上的几何与分析问题的研究中有着极为深刻的影响. 利用逐点 Bochner-Weitzenbock 公式和积分型 Bochner-Weitzenbock 公式，文献[5]在芬斯勒流形的加权 Ricci 曲率 Ric_N 有下界的条件下，得到了 Poincare-Lichnerowicz 不等式. 文献[6]给出了芬斯勒流形上的 $p(>1)$-Bochner-Weitzenbock 公式和 p-Reilly 型公式，并且在加权 Ricci 曲率 Ric_N 有下界的 n 维芬斯勒流形上，得到了无边或带有凸边界的紧致芬斯勒流形

① 收稿日期：2022－06－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11871126)；重庆师范大学研究基金项目(17XLB022).
作者简介：程新跃，教授，主要从事微分几何的研究.

上的 p-Poincare 不等式. 文献[7]在芬斯勒流形的加权 Ricci 曲率 Ric_N 有下界的条件下，得到了芬斯勒 Laplacian 第一非零 Neumann 特征值的下界估计. 文献[8]则在加权 Ricci 曲率 Ric_∞ 有下界的完备芬斯勒测度空间中得到了芬斯勒 Laplacian 第一特征值的下界估计.

本文的主要目的是在加权 Ricci 曲率 Ric_N 有正下界的芬斯勒流形上导出重要的泛函不等式和几何不等式. 主要研究结果由两部分组成：首先，我们给出了芬斯勒流形上优化的 Poincare-Lichnerowicz 不等式；其次，我们得到了芬斯勒流形上 Laplacian 第一特征值的一个优化的下界估计.

定义

$$\omega = \inf_{(x,y)\in TM\setminus\{0\}} \frac{S(x,y)}{F(x,y)}$$

这里，$F(x,y)$ 为给定的芬斯勒度量，$S(x,y)$ 为 S -曲率.

本文的主要结论如下：

定理 1　设(M,F,m)是一个可测的紧致无边的芬斯勒流形，且满足$\mathrm{Ric}_N \geqslant K > 0$，其中 $N \in (n,\infty)$. 对任意的 $f \in H^1(M)$，设$(u_t)_{t\geqslant 0}$ 是满足 $u_0 = f$ 的热方程的整体解，则

$$\mathrm{Var}_m(f) \leqslant \frac{N-n}{(N-n)K+\omega^2}\int_M F^2(\nabla f)\mathrm{d}m - \frac{2(N-n)}{(N-n)K+\omega^2}\int_M\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m \tag{1}$$

其中 $\mathrm{Var}_m(f)$ 表示 f 的方差，$g(t) = g_{\nabla u_t}(\nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t), \nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t))$.

若 $\Delta f = -\lambda f$，其中$\lambda \in \mathbb{R}$并且 $f \in H_0^1(M,F,\mathrm{d}m)$，我们分别称$\lambda$ 和f 是芬斯勒流形(M,F,m)的特征值和与之相应的特征函数. 令

$$\lambda_1 = \inf_{u\in H_0^1(M)} \frac{\displaystyle\int_M F^*(x,\mathrm{d}u)^2\mathrm{d}m}{\displaystyle\int_M u^2\mathrm{d}m} \tag{2}$$

我们称 λ_1 是(M,F,m)的第一特征值. 一个很自然的问题就是研究芬斯勒流形上 Laplacian 第一特征值的下界估计. 我们在 Ric_N 有下界的紧致芬斯勒流形上得到了芬斯勒 Laplacian 第一特征值的一个新的下界估计.

定理 2　设(M,F,m)是一个可测的紧致无边的芬斯勒流形，且满足$\mathrm{Ric}_N \geqslant K > 0$，其中 $N \in (n,\infty)$. 则当第一特征值 $\lambda_1 > 0$ 时，有

$$\lambda_1 \geqslant K + \frac{\omega^2}{N-n} \tag{3}$$

(1) 式和(3) 式分别给出了紧致芬斯勒流形上的 Poincare-Lichnerowicz 不等式和芬斯勒 Laplacian 第一特征值的下界估计，分别改进了文献[5,9] 中的相关不等式.

1　预备知识

给定一个 n 维 C^∞ 流形 M，F 是流形 M 上的芬斯勒度量，记 F 的 Busemaun-Hausdorff 体积形式为

$$\mathrm{d}m = \sigma(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

其中体积系数 $\sigma(x)$ 定义为[10]

$$\sigma(x) = \frac{\mathrm{Vol}(B^n(1))}{\mathrm{Vol}(y \in \mathbb{R}^n \mid F(x, y^i b_i) < 1)}$$

这里，Vol 表示欧氏体积，$B^n(1)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准单位球. (M,F,m) 的 S -曲率可以表示成

$$S = \frac{\partial G^i}{\partial y^i} - y^i\frac{\partial \log\sigma}{\partial x^i}$$

其中 G^i 是 F 的测地系数.

文献[3]定义了芬斯勒流形上的加权 Ricci 曲率. 具体地，给定一个测度为 m 的 n 维芬斯勒流形(M,F,m)

和切向量 $\boldsymbol{v} \in T_x M \backslash \{0\}$. 令 $\eta:(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ 是满足 $\dot{\eta}(0)=\boldsymbol{v}$ 的测地线，并且测度 m 对应的体积形式沿着测地线 η 分解成

$$\mathrm{d}m=\mathrm{e}^{-\psi_\eta} \sqrt{\det(g_{ij}(\eta, \dot{\eta}))}\, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

其中 $\psi_\eta=\psi_\eta(\eta(t), \dot{\eta}(t)):(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ 为一个 C^∞ 函数. 对任意的 $N \in (n, \infty)$，加权 Ricci 曲率定义为

$$\mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{v})=\mathrm{Ric}(\boldsymbol{v})+\psi_\eta''(0)-\frac{\psi_\eta'(0)^2}{N-n} \tag{4}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 和 $N \downarrow n$ 时，可定义如下的加权 Ricci 曲率：

$$\mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{v})=\mathrm{Ric}(\boldsymbol{v})+\psi_\eta''(0) \tag{5}$$

$$\mathrm{Ric}_n(\boldsymbol{v})=\begin{cases}\mathrm{Ric}(\boldsymbol{v})+\psi_\eta''(0) & \psi_\eta'(0)=0 \\ -\infty & \psi_\eta'(0) \neq 0\end{cases}$$

事实上，容易得到 $\psi_\eta'(0)=S(x, \boldsymbol{v})$ 就是芬斯勒几何中关于测度 m 的 S-曲率，且

$$\psi_\eta''(0)=\dot{S}(x, \boldsymbol{v})=S_{|m}(x, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}^m$$

其中“|”表示关于 Chern 联络的水平协变导数[11]. 因此，可以进一步把 $\mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{v})$ 写成[12]

$$\mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{v})=\mathrm{Ric}(\boldsymbol{v})+\dot{S}(x, \boldsymbol{v})-\frac{S(x, \boldsymbol{v})^2}{N-n}$$

一般地，若对任意的 $x \in M$ 和切向量 $\boldsymbol{v} \in T_x M$，总有 $\mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{v}) \geqslant KF^2(x, \boldsymbol{v})$(这里 K 为实常数)，则 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$.

给定流形 M 上的一个光滑函数 u，则 u 在 M 上任意点 x 处的微分为 $\mathrm{d}u_x=\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)\mathrm{d}x^i$. 我们可以通过 Legendre 变换定义函数 u 在点 x 处的梯度向量[13] 为

$$\nabla u(x)=L^{-1}(\mathrm{d}u(x)) \in T_x M$$

因此，在局部坐标下，∇u 可以写成[12]

$$\nabla u(x)=\begin{cases} g^{*ij}(x, \mathrm{d}u) \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} & x \in M_u \\ 0 & x \in M \backslash M_u \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$M_u=\{x \in M \mid \mathrm{d}u(x) \neq 0\}$$

$g^{*ij}(x, \mathrm{d}u)$ 为 F 的对偶芬斯勒度量 F^* 的基本张量，且

$$g^{*ij}(x, \mathrm{d}u)=g^{ij}(x, \nabla u)$$

给定流形 M 上的一个光滑测度 m，对应的体积形式为

$$\mathrm{d}m=\sigma(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

设 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 M 上的一个向量场. 定义向量场 $\boldsymbol{X}$ 关于光滑测度 m 的散度为

$$\mathrm{div}_m \boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^i}{\partial x^i}+\frac{\boldsymbol{X}^i}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right)$$

对任意的 $\phi \in C_c^\infty(M)$，可以通过散度公式

$$\int_M \phi\, \mathrm{div}_m(\boldsymbol{X})\mathrm{d}m=-\int_M \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{X})\mathrm{d}m$$

定义弱意义下的散度 $\mathrm{div}_m(\boldsymbol{X})$，其中 $C_c^\infty(M)$ 表示 M 上具有紧致支集的光滑函数构成的空间.

对函数 $u \in H_{\mathrm{loc}}^1(M)$，定义函数 u 在芬斯勒流形上的 Laplacian 为

$$\Delta u=\mathrm{div}_m(\nabla u) \tag{7}$$

等价地，我们在弱的意义下定义函数 u 的 Laplacian 为满足以下条件的 Δu：对所有的 $\phi \in C_c^{\infty}(M)$，

$$\int_M \phi \Delta u \,\mathrm{d}m = -\int_M \mathrm{d}\phi(\nabla u)\mathrm{d}m$$

由 Laplacian 及散度定义，对流形 M 上任意的光滑函数 φ，有

$$\mathrm{div}_m(\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + \mathrm{d}\varphi(\nabla u) \tag{8}$$

令 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是流形 M 上的非零向量场，对任意的切向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T_x M$，定义流形 M 上的加权黎曼度量 $g_{\boldsymbol{V}}$ 为[14]

$$g_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = g_{ij}(x, \boldsymbol{V})\boldsymbol{X}^i \boldsymbol{Y}^j$$

特别地，$g_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}) = F^2(x, \boldsymbol{V})$. 在加权黎曼流形 $(M, g_{\boldsymbol{V}}, m)$ 上，可定义线性梯度向量场与线性 Laplacian 分别为

$$\nabla^{\boldsymbol{V}} u = \begin{cases} g^{ij}(x, \boldsymbol{V}) \dfrac{\partial u}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^i} & x \in M_u \\ 0 & x \in M \backslash M_u \end{cases}$$

$$\Delta^{\boldsymbol{V}} u = \mathrm{div}_m(\nabla^{\boldsymbol{V}} u) \tag{9}$$

由(8)式可以得到，对任意的 $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$，有 $\nabla^{\nabla u} u = \nabla u$ 和 $\Delta^{\nabla u} u = \Delta u$.

在 $H^1_0(M)$ 上的能量泛函 E 被定义为[9]

$$E(u) = \frac{\int_M F(\nabla u)^2 \mathrm{d}m}{\int_M u^2 \mathrm{d}m} = \frac{\int_M F^*(x, \mathrm{d}u)^2 \mathrm{d}m}{\int_M u^2 \mathrm{d}m}$$

对函数 $u, \varphi \in H^1_0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[F^*(x, \mathrm{d}u + \varepsilon \mathrm{d}\varphi)^2] \big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial [F^{*2}]}{\partial \xi_i}(x, \mathrm{d}u) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 2\nabla^i u(x, \mathrm{d}u) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 2\mathrm{d}\varphi(\nabla u)$$

因此，对任意 $u, \varphi \in H^1_0$，若 $\int_M u^2 \mathrm{d}m = 1$，则

$$\mathrm{d}_u E(\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}[E(u + \varepsilon\varphi)] \big|_{\varepsilon=0} = 2\int_M \mathrm{d}\varphi(\nabla u)\mathrm{d}m - 2\lambda \int_M u\varphi \,\mathrm{d}m$$

其中 $\lambda = E(u)$. 根据 Laplacian 弱定义，上式等价于

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}_u E(\varphi) = -\int_M [\Delta u + \lambda u]\varphi \,\mathrm{d}m$$

因此，函数 $u \in H^1_0$ 满足 $\mathrm{d}_u E = 0$ 当且仅当

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

我们分别称 λ 和 u 是 (M, F, m) 的一个特征值和特征函数.

接下来介绍非线性热方程

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \Delta u_t$$

对每一个初值 $f \in H^1_0(M)$ 并且 $T > 0$，存在唯一的满足 $u_0 = f$ 的热方程的整体解 $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$. 如果 (M, F, m) 的可反数 $\Lambda_F < \infty$ 且具有有限体积，通过构建热流[15-16]作为能量泛函 E 的梯度流，可证明以下两条性质成立[9]：

(i) 若 $c \leqslant u_0 \leqslant C$ 几乎处处成立，则当 $t > 0$ 时，$c \leqslant u_t \leqslant C$ 几乎处处成立；

(ii) $\lim\limits_{t \to \infty} E(u_t) = 0$.

本文中，我们总假定 $\Lambda_F < \infty$.

2 若干重要的引理

设(M, F, m)是测度可测的芬斯勒流形. 为了证明定理 1，我们需要一些必要的引理.

引理 1[9] 若(M, F, m)满足 $m(M) < \infty$ 且流形是完备的，则常值函数 $1 \in H_0^1(M)$.

引理 2[4] 给定 $u \in C^\infty(M)$，则在 $M_u = \{x \in M \mid \mathrm{d}u \neq 0\}$ 上，有

$$\Delta^{\nabla u}\left[\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right] - \mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) = \mathrm{Ric}_\infty(\nabla u) + \|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}^2$$

当 $\mathrm{Ric}_\infty \geqslant K$ 时，有

$$\Delta^{\nabla u}\left[\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right] - \mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) \geqslant KF^2(\nabla u) + \mathrm{d}[F(\nabla u)](\nabla^{\nabla u}[F(\nabla u)])$$

其中$\|\cdot\|_{HS(\nabla u)}$表示关于度量 $g_{\nabla u}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数，∇u 表示 u 的梯度向量场，Δu 表示 u 的 Laplacian.

推论 1[4] 假若对某个 $K \in \mathbb{R}$，有 $\mathrm{Ric}_\infty \geqslant K$. 给定 $u \in H_{\mathrm{loc}}^2(M) \cap C^1(M)$ 使得 $\Delta u \in H_{\mathrm{loc}}^1(M)$，那么，对所有的非负函数 $\phi \in H_c^1(M) \cap L^\infty(M)$，总有

$$-\int_M \mathrm{d}\phi\left(\nabla^{\nabla u}\left(\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right)\right)\mathrm{d}m \geqslant$$

$$\int_M \phi\{\mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) + KF^2(\nabla u) + \mathrm{d}[F(\nabla u)](\nabla^{\nabla u}[F(\nabla u)])\}\mathrm{d}m$$

根据引理 2 及(4),(5) 式，可以得到以下结果：

命题 1 给定 $u \in C^\infty(M)$ 及 $N \in (n, \infty)$，则在 $M_u = \{x \in M \mid \mathrm{d}u \neq 0\}$ 上有

$$\Delta^{\nabla u}\left[\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right] - \mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) = \mathrm{Ric}_N(\nabla u) + \frac{S(\nabla u)^2}{N-n} + \|\nabla^2 u\|_{HS(\nabla u)}^2 \tag{10}$$

及

$$\Delta^{\nabla u}\left[\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right] - \mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) \geqslant \mathrm{Ric}_N(\nabla u) + \frac{S(\nabla u)^2}{N-n} + \mathrm{d}[F(\nabla u)](\nabla^{\nabla u}[F(\nabla u)]) \tag{11}$$

易见，(11) 式比文献[4] 中相应的不等式更优. 进一步，类似于文献[4] 的讨论，我们可以用同样的方法得到下面的积分型不等式：

推论 2 设(M, F, m)是一个可测的紧致无边芬斯勒流形. 若流形 M 满足 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$，其中 $N \in (n, \infty)$ 且 $K \in \mathbb{R}$. 给定 $u \in H^2(M) \cap C^1(M)$ 使得 $\Delta u \in H^1(M)$，则对所有的非负函数 $\phi \in H_c^1(M) \cap L^\infty(M)$，我们有

$$-\int_M \mathrm{d}\phi\left(\nabla^{\nabla u}\left(\frac{F^2(\nabla u)}{2}\right)\right)\mathrm{d}m \geqslant$$

$$\int_M \phi\left\{\mathrm{d}(\Delta u)(\nabla u) + KF^2(\nabla u) + \frac{S(\nabla u)^2}{N-n} + g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))\right\}\mathrm{d}m \tag{12}$$

这里，我们用到了

$$\mathrm{d}[F(\nabla u)](\nabla^{\nabla u}[F(\nabla u)]) = g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))$$

根据引理 1，取测试函数 $\phi = 1$，可以得到以下引理：

引理 3 若(M, F, m)是紧致无边的芬斯勒流形，且满足 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$，其中 $N \in (n, \infty)$ 且 $K \in \mathbb{R}$. 给定$u \in H^2(M) \cap C^1(M)$，使得 $\Delta u \in H^1(M)$，则有

$$K\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m \leqslant$$

$$\int_M (\Delta u)^2 \mathrm{d}m - \frac{1}{N-n}\int_M (S(\nabla u))^2 \mathrm{d}m - \int_M g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))\mathrm{d}m \tag{13}$$

由于(M, F, m)是紧致的芬斯勒流形，我们可以将 m 标准化使得 $m(M)=1$. 定义 $f \in L^2(M)$ 的方差为

$$\mathrm{Var}_m(f) = \int_M \left(f - \int_M f\mathrm{d}m\right)^2 \mathrm{d}m = \int_M f^2 \mathrm{d}m - \left(\int_M f\mathrm{d}m\right)^2$$

此外，$(u_t)_{t\geqslant 0}$ 是满足 $u_0 = f$ 的热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解，则对任何 $f \in H^1(M)$，根据线性化热半群的性质，在 $L^2(M)$ 中有质量守恒[4]

$$\int_M u_t \mathrm{d}m = \int_M f\mathrm{d}m$$

和遍历性[6]

$$\lim_{t\to\infty} u_t = \int_M f\mathrm{d}m$$

引理 4[4]　设$(u_t)_{t\geqslant 0}$ 是热方程的整体解. 则对所有 $t>0$，有

$$\frac{\partial F^2(\nabla u_t)}{\partial t} = 2\mathrm{d}(\Delta u_t)(\nabla u_t)$$

几乎处处成立.

3　主要定理的证明

定理 1 的证明　设$(u_t)_{t\geqslant 0}$ 是满足 $u_0 = f$ 的热方程的整体解. 令

$$\Phi(t) = \| u_t \|_{L^2}^2 = \int_M u_t^2 \mathrm{d}m$$

那么根据遍历性可得

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \int_M \mathrm{d}m \left(\int_M f\mathrm{d}m\right)^2 = \left(\int_M f\mathrm{d}m\right)^2$$

且

$$\mathrm{Var}_m(f) = \int_M f^2 \mathrm{d}m - \left(\int_M f\mathrm{d}m\right)^2 =$$

$$\Phi(0) - \lim_{t\to\infty}\Phi(t) = -\int_0^\infty \Phi'(t)\mathrm{d}t \tag{14}$$

根据 $\Phi(t)$ 的定义，我们知道

$$\Phi'(t) = 2\int_M u_t \Delta u_t \mathrm{d}m = -2\int_M \mathrm{d}u_t(\nabla u_t)\mathrm{d}m =$$

$$-2\int_M g_{\nabla u_t}(\nabla u_t, \nabla u_t)\mathrm{d}m = -2\int_M F^2(\nabla u_t)\mathrm{d}m \tag{15}$$

由引理 4，对 $t>0$，我们有

$$\Phi''(t) = -2\int_M \frac{\partial F^2(\nabla u_t)}{\partial t}\mathrm{d}m = -4\int_M \mathrm{d}(\Delta u_t)(\nabla u_t)\mathrm{d}m = 4\int_M (\Delta u_t)^2 \mathrm{d}m$$

由定义，$S(\nabla u)^2 \geqslant \omega^2 F^2(\nabla u)$. 根据引理 3，有

$$\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m \leqslant \frac{N-n}{(N-n)K+\omega^2}\left\{\frac{1}{4}\Phi''(t) - \int_M g_{\nabla u_t}(\nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t), \nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t))\mathrm{d}m\right\}$$

从而有

$$-\Phi'(t) \leqslant \frac{N-n}{2[(N-n)K+\omega^2]}\Phi''(t) - \frac{2(N-n)}{(N-n)K+\omega^2}\int_M g_{\nabla u_t}(\nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t), \nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t))\mathrm{d}m$$

最后，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_m(f) = -\int_0^\infty \Phi'(t)\mathrm{d}t \leqslant \\
\frac{N-n}{2[(N-n)K+\omega^2]}\int_0^\infty \Phi''(t)\mathrm{d}t - \frac{2(N-n)}{(N-n)K+\omega^2}\int_M\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m = \\
\frac{N-n}{2[(N-n)K+\omega^2]}(\lim_{t\to\infty}\Phi'(t)-\Phi'(0)) - \frac{2(N-n)}{(N-n)K+\omega^2}\int_M\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m
\end{aligned}
$$

其中

$$
g(t) = g_{\nabla u_t}(\nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t), \nabla^{\nabla u_t}F(\nabla u_t))
$$

由(15)式得

$$
\Phi'(0) = -2\int_M F^2(\nabla f)\mathrm{d}m
$$

此外,我们知道$\lim_{t\to\infty}E(u_t)=0$,所以$\lim_{t\to\infty}\Phi'(t)=0$. 因此

$$
\mathrm{Var}_m(f) \leqslant \frac{N-n}{(N-n)K+\omega^2}\int_M F^2(\nabla f)\mathrm{d}m - \frac{2(N-n)}{(N-n)K+\omega^2}\int_M\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m \tag{16}
$$

这就完成了定理 1 的证明.

作为引理 3 的应用,定理 2 的结果是自然的.

定理 2 的证明 通过假设和引理 3,我们得到

$$
K\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m - \int_M (\Delta u)^2\mathrm{d}m + \frac{\omega^2}{N-n}\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m + \int_M g_{\nabla u}(\nabla^{\nabla u}F(\nabla u), \nabla^{\nabla u}F(\nabla u))\mathrm{d}m \leqslant 0
$$

因为 $\Delta u = -\lambda u$,我们有

$$
\int_M (\Delta u)^2\mathrm{d}m = \lambda^2\int_M u^2\mathrm{d}m
$$

进一步,有

$$
-\lambda^2\int_M u^2\mathrm{d}m + K\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m + \frac{\omega^2}{N-n}\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m \leqslant 0
$$

这表明

$$
\left(K+\frac{\omega^2}{N-n}\right)\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m \leqslant \lambda^2\int_M u^2\mathrm{d}m
$$

从而,我们有

$$
\lambda^2 \geqslant \left(K+\frac{\omega^2}{N-n}\right)\frac{\int_M F^2(\nabla u)\mathrm{d}m}{\int_M u^2\mathrm{d}m}
$$

因此,由(2)式我们得到

$$
\lambda_1 \geqslant K + \frac{\omega^2}{N-n}
$$

这就完成了定理 2 的证明.

定理 1 和定理 2 分别改进了文献[5,9]中的两个不等式. 特别地,当 S-曲率满足 $\omega^2 \geqslant \frac{K(N-n)}{N-1}$ 时,我们给出了具有更优上界的 Poincare-Lichnerowicz 不等式及第一特征值的更优的下界.

参考文献:

[1] 程新跃,瞿秋红. 黎曼流形上导航术问题的推广[J]. 西南大学学报(自然科学版),2021,43(4):85-91.

[2] CHENG X Y,SHEN Z M. Some Inequalities on Finsler Manifolds with Weighted Ricci Curvature Bounded Below [J].

Results in Mathematics，2022，77(2)：1-23.

[3] OHTA S I. Finsler Interpolation Inequalities [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2009，36(2)：211-249.

[4] OHTA S I，STURM K T. Bochner-Weitzenböck Formula and Li-Yau Estimates on Finsler Manifolds [J]. Advances in Mathematics，2014，252：429-448.

[5] OHTA S I. Some Functional Inqualities on Non-Reversible Finsler Manifolds [J]. Proceedings Indian Academy of Sciences，2017，127(5)：833-855.

[6] XIA Q L. Geometric and Functional Inequalities on Finsler Manifolds [J]. The Journal of Geometric Analysis，2020，30(3)：3099-3148.

[7] WANG G F，XIA C. A Sharp Lower Bound for the First Eigenvalue on Finsler Manifolds [J]. Annales de Institut Henri Poincare-Analyse Non Lineaire，2013，30(6)：983-996.

[8] YIN S T，MO X H. Some Results on Complete Finsler Measure Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2021，497(1)：124846.

[9] OHTA S I. Comparison Finsler Geometry [M]. Cham：Springer International Publishing，2021.

[10] 程新跃，李婷婷，殷丽. 关于射影 Ricci 曲率的比较定理与共形不变性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(2)：52-59.

[11] BAO D，CHERN S S，SHEN Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry [M]. New York：Springer-Verlag，2000.

[12] CHENG X Y. Some Fundamental Problems in Global Finsler Geometry [J]. AUT Journal of Mathematics and Computing，2021，2(2)：185-198.

[13] 吴玉婷，刘建成. 黎曼流形中的近 Yamabe 孤立子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：25-28.

[14] SHEN Z M. Lectures on Finsler Geometry [M]. Singapore：World Scientific，2001.

[15] CHENG X Y. Gradient Estimates for Positive Solutions of Heat Equations Under Finsler-Ricci Flow [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2022，508(2)：125897.

[16] CHENG X Y，WU P S. Gradient Estimates for Positive Global Solutions of Heat Equation Under Closed Finsler-Ricci Flow [J]. Journal of Finsler Geometry and its Applications，2022，3(1)：1-15.

责任编辑　廖坤